

# 6

## Übungsaufgaben

### 1. Aufgabe

Sei  $M = \{ a, b, c \}$ .

- a. Es sei  $R = \{ (a, a), (a, c), (c, c) \}$ . Ist  $R$  reflexiv? Ist  $R$  symmetrisch? Ist  $R$  transitiv?
- $R$  ist nicht reflexiv, da  $(b, b) \notin R$
- $R$  ist nicht symmetrisch, da  $(a, c) \in R$ , aber  $(c, a) \notin R$
- $R$  ist transitiv
- b. Sie erweitern jetzt  $R$  zu  $R^+ = \{ (a, a), (a, c), (c, a), (c, c) \}$ . Ist  $R^+$  eine Äquivalenzrelation?
- $R^+$  ist nicht reflexiv, da  $(b, b) \notin R$
- $R^+$  ist symmetrisch
- $R^+$  ist transitiv
- $R^+$  ist keine Äquivalenzrelation
- c. Sei  $R^{++} = \{ (a, a), (a, c), (c, a), (c, c), (b, b) \}$ . Zeigen Sie:  $R^{++}$  ist eine Äquivalenzrelation. Geben Sie außerdem die Klassen an, in die  $R^{++}$  die Menge  $M$  aufteilt.
- $R^{++}$  ist reflexiv, da auch  $(b, b) \in R$
- $R^{++}$  ist symmetrisch
- $R^{++}$  ist transitiv
- $R^{++}$  ist eine Äquivalenzrelation
- $M$  wird in die zwei Klassen  $\{a, c\}$  und  $\{b\}$  aufgeteilt.

## 2. Aufgabe

**Achtung: Diese Aufgabe ist sehr schwer und keineswegs so einfach zu bearbeiten, wie ich es mir bei der Formulierung gedacht habe!**

- a.  $M$  sei eine Menge mit 3 Elementen. Es  $M^2$  die Menge der 2-Tupel mit Elementen aus  $M$ . Es sei  $R$  die Relation auf  $M^2 \times M^2$ , die folgendermaßen definiert ist:

$$(a_1, a_2) R (b_1, b_2) \leftrightarrow (a_1, a_2) = (b_1, b_2) \vee (a_1, a_2) = (b_2, b_1)$$

Zeigen Sie:  $R$  ist eine Äquivalenzrelation.

In wie viel Klassen teilt  $R$  die Menge  $M^2$  ein? (Hinweis: Die Antwort steht explizit in Kapitel 3)

Man sieht unmittelbar:  $R$  ist reflexiv,  $R$  ist symmetrisch und  $R$  ist transitiv. Also ist  $R$  eine Äquivalenzrelation.

Aus der Formel von Aufgabenteil c (die wird dort auch erklärt) ergibt sich:  
Anzahl der Klassen = 6.

Für Ungläubige:

(Sei  $M = \{a, b, c\}$ . Dann haben wir die Klassen  $[(a,a)]$ ,  $[(b,b)]$ ,  $[(c,c)]$ ,  $[(a,b)]$ ,  $[(a,c)]$ ,  $[(b,c)]$  )

- b.  $M$  sei eine Menge mit 10 Elementen. Es  $M^4$  die Menge der 4-Tupel mit Elementen aus  $M$ . Es sei  $R$  die Relation auf  $M^4 \times M^4$ , die folgendermaßen definiert ist:

$$(a_1, \dots, a_4) R (b_1, \dots, b_4) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (b_1, \dots, b_4) \text{ ist eine Permutation von } (a_1, \dots, a_4)$$

Zeigen Sie:  $R$  ist eine Äquivalenzrelation.

In wie viel Klassen teilt  $R$  die Menge  $M^4$  ein? (Hinweis: Die Antwort steht explizit in Kapitel 3)

Man sieht unmittelbar:  $R$  ist reflexiv,  $R$  ist symmetrisch und  $R$  ist transitiv. Also ist  $R$  eine Äquivalenzrelation.

Aus der Formel von Aufgabenteil c (die wird dort auch erklärt) ergibt sich:

Anzahl der Klassen = 715

Für Ungläubige: Testen Sie das mit dem Programm „Aufgabe2“ im Ordner Kapitel 6 auf meiner Homepage

- c.  $M$  sei eine Menge mit  $n$  Elementen. Es  $M^k$  die Menge der  $k$ -Tupel mit Elementen aus  $M$ . Es sei  $R$  die Relation auf  $M^k \times M^k$ , die folgendermaßen definiert ist:

$$(a_1, \dots, a_k) R (b_1, \dots, b_k) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (b_1, \dots, b_k) \text{ ist eine Permutation von } (a_1, \dots, a_k)$$

Zeigen Sie:  $R$  ist eine Äquivalenzrelation.

Auch hier sieht man sieht unmittelbar:  $R$  ist reflexiv,  $R$  ist symmetrisch und  $R$  ist transitiv. Also ist  $R$  eine Äquivalenzrelation.

In wie viel Klassen teilt  $R$  die Menge  $M^k$  ein? (Hinweis: Die Antwort steht explizit in Kapitel 3)

Die Antwort ist:  $\text{Anzahl}(n,k) = \sum_{i=1}^k \binom{n}{i} \cdot \binom{k-1}{i-1}$  Hierbei setzen wir – wie üblich – für den Fall  $b > a$  den Wert  $\binom{a}{b} = 0$

Diese Formel erklärt sich folgendermaßen:

Sei  $M$  ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Menge  $\{1, \dots, n\}$ . Der Wert  $i$  bezeichnet die Anzahl der voneinander verschiedenen Elemente von  $M$ , die sich in einem Tupel befinden. Es gibt bei einem festen  $i$  gerade (das wissen wir aus Kapitel 3)  $\binom{n}{i}$  verschiedene Teilmengen von  $M$  mit genau  $i$

Elementen. Wenn wir jetzt eine Tupel mit  $k$  Komponenten haben, dann lautet die Frage:

Seien  $i, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  beliebig. Wie viele Möglichkeiten gibt es, genau  $i$  fest vorgegebene Elemente auf  $k$  Komponenten ohne Berücksichtigung der Reihenfolge zu verteilen?

Die Antwort lautet:  $\binom{k-1}{i-1}$

### **Beweis:**

Wir beweisen diese Behauptung durch Anwendung des Satzes 3.9:

Sei dazu

$$T_i^k \text{ sortiert} = \{ (x_1, \dots, x_k) \in M^k \mid \begin{array}{l} x_1 \leq \dots \leq x_k \\ \text{Für genau } i-1 \text{ Indizes } j(1), \dots, j(i-1) \text{ gilt:} \\ x_{j(a)} < x_{j(a)+1} \\ \text{Für genau } k-i \text{ Indizes } j(i), \dots, j(k-1) \text{ gilt:} \\ x_{j(a)} = x_{j(a)+1} \end{array} \}$$

Bei dieser Definition haben wir genau  $i$  verschiedene Elemente in unserem Tupel.

Wir haben also  $k-1$  Stellen, an denen ein  $\leq$ -Zeichen steht. Dieses  $\leq$ -Zeichen kann an genau  $i-1$  Stellen durch ein echtes  $<$ -Zeichen ersetzt werden.

Dafür gibt es  $\binom{k-1}{i-1}$  Möglichkeiten, das entspricht der Anzahl der

Teilmengen mit  $i-1$  Elementen, die eine Menge mit  $k-1$  Elemente hat.

Ich gebe ein Beispiel:

Es sei  $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ , Es sei  $k = 5$ ,  $i = 3$  und unsere 3 Elemente, die wir in einem 5-Tupel verteilen wollen, seien: 1, 3 und 8.

Wir erhalten folgende Möglichkeiten:

$\{a,b\} \subseteq \{1,2,3,4\}$	$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$	Tupelelemente	Tupel
$\{1,2\}$	$x_1 < x_2 < x_3 = x_4 = x_5$	$1 < 3 < 8 = 8 = 8$	$(1, 3, 8, 8, 8)$
$\{1, 3\}$	$x_1 < x_2 = x_3 < x_4 = x_5$	$1 < 3 = 3 < 8 = 8$	$(1, 3, 3, 8, 8)$
$\{1, 4\}$	$x_1 < x_2 = x_3 = x_4 < x_5$	$1 < 3 = 3 = 3 < 8$	$(1, 3, 3, 3, 8)$
$\{2, 3\}$	$x_1 = x_2 < x_3 < x_4 = x_5$	$1 = 1 < 3 < 8 = 8$	$(1, 1, 3, 8, 8)$
$\{2, 4\}$	$x_1 = x_2 < x_3 = x_4 < x_5$	$1 = 1 < 3 = 3 < 8$	$(1, 1, 3, 3, 8)$
$\{3, 4\}$	$x_1 = x_2 = x_3 < x_4 < x_5$	$1 = 1 = 1 < 3 < 8$	$(1, 1, 1, 3, 8)$

### 3. Aufgabe

Sei  $M$  die Potenzmenge  $P(\mathbb{N})$  der natürlichen Zahlen. Man untersuche die beiden Relationen  $\subseteq$  und  $\subsetneq$ , die beide auf  $P(\mathbb{N}) \times P(\mathbb{N})$  definiert sind, auf Reflexivität, Symmetrie und Transitivität.

$\subseteq$		
Eigenschaft	Liegt vor	Begründung/Gegenbeispiel
Reflexivität	ja	Jede Menge ist Teilmenge von sich selber
Symmetrie	nein	$\{1\} \subseteq \{1, 2\}$ , aber $\{1, 2\} \not\subseteq \{1\}$
Transitivität	ja	$(A \subseteq B \text{ und } B \subseteq C) \rightarrow (A \subseteq C)$

$\subsetneq$		
Eigenschaft	Liegt vor	Begründung/Gegenbeispiel
Reflexivität	nein	Jede Menge ist Teilmenge von sich selber
Symmetrie	nein	$\{1, 2\} \not\subseteq \{1\}$ , aber $\{1\} \subseteq \{1, 2\}$
Transitivität	nein	$\{1\} \subsetneq \{9\}$ und $\{9\} \subsetneq \{1,2\}$ , aber $\{1\} \not\subseteq \{1,2\}$

#### 4. Aufgabe

Es sei  $M$  die Menge  $\{ \text{Anton, Bastian, Cesar} \}$ . Anton spricht die Sprachen Deutsch und Französisch, Bastian spricht nur Deutsch, Cesar spricht nur Französisch. Die Relation  $R$  auf  $M \times M$  sei definiert durch:

$$x R y \leftrightarrow x \text{ und } y \text{ sprechen eine gemeinsame Sprache.}$$

Untersuchen Sie  $R$  auf Reflexivität, Symmetrie und Transitivität. Ist  $R$  eine Äquivalenzrelation?

$R$  ist keine Äquivalenzrelation, denn man sieht zwar, dass  $R$  reflexiv und symmetrisch ist,  $R$  ist aber nicht transitiv, denn:

Bastian  $R$  Anton (beide sprechen Deutsch) und Anton  $R$  Cesar (beide sprechen Französisch), aber: Es gilt nicht, dass Bastian  $R$  Cesar (es gibt keine Sprache, die beide gemeinsam haben)

## 5. Aufgabe

Es sei  $\mathbf{R}^2$  die Menge von reellen Zahlenpaaren. (Eine genaue Klärung des Begriffs der reellen Zahlen finden Sie in Kapitel 9 – wird hier aber nicht gebraucht). Auf dieser Menge sei die folgende Relation  $R$  definiert:

$$(x_1, y_1) R (x_2, y_2) \leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$$

Zeigen Sie:  $R$  ist eine Äquivalenzrelation.

Ich behaupte: Die Äquivalenzklassen entsprechen genau den verschiedenen Kreisen, die man um den Koordinatenursprung im  $\mathbf{R}^2$  zeichnen kann. Dabei denke ich an unseren weisen Vorfahren Pythagoras. Was meine ich hier genau?

$R$  ist eine Äquivalenzrelation, weil das Gleichheitszeichen reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Eine Äquivalenzklasse ist genau die Menge der Punkte  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ , die alle den gleichen Abstand vom Nullpunkt haben:

