

1. Aufgabe

Finden Sie stets alle Lösungen (reell und komplex) der folgenden Quadratischen Gleichungen mit reellen Koeffizienten. Machen Sie stets die Probe!

a. $x^2 - 14x + 49 = 0$
 $x^2 - 14x + 49 = (x - 7)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 7$

b. $x^2 - 24x + 153 = 0$
 $x^2 - 24x + 153 = x^2 - 24x + 144 + 9 = (x - 12)^2 - (3i)^2 =$
 $= (x - (12 - 3i)) \cdot (x - (12 + 3i)) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = 12 - 3i \vee x = 12 + 3i$

c. $x^2 - 3x - 4 = 0$
 $x^2 - 3x - 4 = x^2 - 3x + 2,25 - 6,25 = (x - 1,5)^2 - 2,5^2 =$
 $= (x - 4) \cdot (x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 4 \vee x = -1$

d. $x^2 + 22x + 121 = 0$
 $x^2 + 22x + 121 = (x + 11)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -11$

e. $x^2 - 7x + 10 = 0$
 $x^2 - 7x + 10 = x^2 - 7x + 12,25 - 2,25 = (x - 3,5)^2 - 1,5^2 =$
 $= (x - 5) \cdot (x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 5 \vee x = 2$

f. $x^2 - 10x + 41 = 0$
 $x^2 - 10x + 41 = x^2 - 10x + 25 + 16 = (x - 5)^2 - (4i)^2 =$
 $= (x - (5 - 4i)) \cdot (x - (5 + 4i)) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = 5 - 4i \vee x = 5 + 4i$

2. Aufgabe

Berechnen Sie die Beträge der folgenden komplexen Zahlen

a. $z = 3$
 $|z| = 3$

b. $z = -5$
 $|z| = 5$

c. $z = 4 \cdot i$
 $|z| = 4$

d. $z = -12 \cdot i$
 $|z| = 12$

e. $z = 4 + 3 \cdot i$
 $|z| = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

f. $z = 1 - 2 \cdot i$
 $|z| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$

g. $z = -5 + i$
 $|z| = \sqrt{25 + 1} = \sqrt{26}$

h. $z = -7 - 24 \cdot i = -(7 + 24 \cdot i)$
 $|z| = \sqrt{49 + 576} = \sqrt{625} = 25$

3. Aufgabe

Berechnen Sie jeweils das Produkt der folgenden komplexen Zahlen z_1 und z_2 :

a. $z_1 = -2 + 5i$, $z_2 = 6 - 7i$
 $(-2 + 5i) \cdot (6 - 7i) = -12 + 35 + (14 + 30)i = 23 + 44i$

b. $z_1 = 5 + 12i$, $z_2 = 5 - 12i$
 $(5 + 12i) \cdot (5 - 12i) = 25 + 144 = 169$

c. $z_1 = 0,6 + 0,8i$, $z_2 = 0,6 - 0,8i$
 $(0,6 + 0,8i) \cdot (0,6 - 0,8i) = 0,36 + 0,64 = 1$

4. Aufgabe

Berechnen Sie jeweils den Quotienten $\frac{z_1}{z_2}$ der folgenden komplexen Zahlen z_1 und z_2 :

a. $z_1 = 1$, $z_2 = 0,6 + 0,8i$
 $\frac{1}{0,6 + 0,8i} = 0,6 - 0,8i$

b. $z_1 = -2 + 5i$, $z_2 = 3 + i$
 $\frac{-2 + 5i}{3 + i} = \frac{(-2 + 5i) \cdot (3 - i)}{10} = \frac{-1 + 17i}{10} = -0,1 + 1,7i$

c. $z_1 = 4 + 7i$, $z_2 = 7 - 24i$
 $\frac{4 + 7i}{7 - 24i} = \frac{(4 + 7i) \cdot (7 + 24i)}{625} = \frac{-140 + 145i}{625} =$
 $= \frac{-28 + 29i}{125} = -0,224 + 0,232i$

5. Aufgabe

Zeigen Sie: Die Menge der komplexen Zahlen vom Betrag 1 $\{ z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1 \}$ ist eine Gruppe bezüglich der Multiplikation.

- (i) Aus $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ (Satz 10.12) folgt, dass die Multiplikation zweier komplexer Zahlen vom Betrag 1 wieder eine komplexe Zahl vom Betrag 1 ergibt.
- (ii) Das Assoziativgesetz gilt in ganz \mathbf{C} , also auch in der Menge der komplexen Zahlen vom Betrag 1
- (iii) Das neutrale Element in \mathbf{C} ist die Zahl 1. Da $|1| = 1$ ist, gehört es auch zu der Menge der komplexen Zahlen vom Betrag 1
- (iv) Aus $|z| = 1$ folgt auch $|z| = |\bar{z}| = 1$, also gilt:

$$\left| z^{-1} \right| = \left| \frac{\bar{z}}{|z|^2} \right| = |\bar{z}| = 1, \text{ d.h. zu jeder komplexen Zahl } z \text{ mit dem Betrag } 1$$

hat auch das multiplikative Inverse z^{-1} den Betrag 1.

6. Aufgabe

Ziehen Sie die Wurzel aus den folgenden komplexen Zahlen z . Machen Sie stets die Probe!

a. $z = -9$
 $\sqrt{-9} = 3 \cdot i$

b. $z = 8 \cdot i$
 $\sqrt{8 \cdot i} = 2 + 2 \cdot i$

c. $z = -45 - 28 \cdot i = -(45 + 28 \cdot i)$

Es ist $\sqrt{(-45)^2 + (-28)^2} = \sqrt{2025 + 784} = \sqrt{2809} = 53$

Also wird:

$$\sqrt{-45 - 28 \cdot i} = \sqrt{\frac{1}{2}(-45 + 53)} - \sqrt{\frac{1}{2}(45 + 53)} \cdot i = 2 - 7 \cdot i$$

d. $z = 32 + 24 \cdot i$

Es ist $\sqrt{32^2 + 24^2} = \sqrt{1024 + 576} = \sqrt{1600} = 40$

Also wird:

$$\sqrt{32 + 24 \cdot i} = \sqrt{\frac{1}{2}(32 + 40)} + \sqrt{\frac{1}{2}(-32 + 40)} \cdot i = 6 + 2 \cdot i$$

7. Aufgabe

Finden Sie stets alle Lösungen (reell und komplex) der folgenden Quadratischen Gleichungen mit komplexen Koeffizienten. Machen Sie stets die Probe!

a. $x^2 - (2 - i)x - 2 \cdot i = 0$

$$\begin{aligned} x^2 - (2 - i)x - 2 \cdot i &= (x - (1 - 0,5 \cdot i))^2 - 0,75 + i - 2 \cdot i = \\ &= (x - (1 - 0,5 \cdot i))^2 - (\sqrt{0,75 + i})^2 \end{aligned}$$

Es ist aber

$$\sqrt{0,75^2 + 1} = \sqrt{1,5625} = 1,25$$

Und daher:

$$\sqrt{0,75 + i} = \sqrt{\frac{1}{2}(0,75 + 1,25)} + \sqrt{\frac{1}{2}(-0,75 + 1,25)} \cdot i = 1 + 0,5 \cdot i$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned} x^2 - (2 - i)x - 2 \cdot i &= (x - (1 - 0,5 \cdot i))^2 - (1 + 0,5 \cdot i)^2 = \\ &= (x - 2) \cdot (x + i) = 0 \leftrightarrow x = 2 \vee x = -i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b. } & x^2 + (6 - 3i)x + 8 - 12i = 0 \\
 & x^2 + (6 - 3i)x + 8 - 12i = (x + (3 - 1,5i))^2 - 6,75 + 9i + 8 - 12i \\
 & = (x + (3 - 1,5i))^2 - \left(\sqrt{-1,25 + 3i}\right)^2
 \end{aligned}$$

Es ist aber:

$$\sqrt{(-1,25)^2 + 3^2} = \sqrt{1,5625 + 9} = \sqrt{10,5625} = 3,25$$

Und daher:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{-1,25 + 3i} &= \sqrt{\frac{1}{2}(-1,25 + 3,25)} + \sqrt{\frac{1}{2}(1,25 + 3,25)} \cdot i = \\
 &= 1 + \sqrt{2,25} \cdot i = 1 + 1,5i
 \end{aligned}$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
 x^2 + (6 - 3i)x + 8 - 12i &= (x + (3 - 1,5i))^2 - (1 + 1,5i)^2 = \\
 &= (x - (-2 + 3i)) \cdot (x - (-4)) = 0 \leftrightarrow x = -2 + 3i \vee x = -4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c. } & x^2 - (2 + 3i)x + 4 + 8i = 0 \\
 & x^2 - (2 + 3i)x + 4 + 8i = (x - (1 + 1,5i))^2 + 1,25 - 3i + 4 + 8i = \\
 & = (x - (1 + 1,5i))^2 - \left(\sqrt{-5,25 - 5i}\right)^2
 \end{aligned}$$

Es ist aber:

$$\sqrt{(-5,25)^2 + (-5)^2} = \sqrt{27,5625 + 25} = \sqrt{52,5625} = 7,25$$

Und daher:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{-5,25 - 5i} &= \sqrt{\frac{1}{2}(-5,25 + 7,25)} - \sqrt{\frac{1}{2}(5,25 + 7,25)} \cdot i = \\
 &= 1 - \sqrt{6,25} \cdot i = 1 - 2,5i
 \end{aligned}$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
 x^2 - (2 + 3i)x + 4 + 8i &= (x - (1 + 1,5i))^2 - (1 - 2,5i)^2 = \\
 (x - (2 - i)) \cdot (x - 4i) &= 0 \leftrightarrow x = 2 - i \vee x = 4i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d. } & x^2 + 16 = 0 \\
 & x^2 + 16 = (x + 4i)(x - 4i) = 0 \leftrightarrow x = -4i \vee x = 4i
 \end{aligned}$$

e. $x^2 - (8 - 6i)x + 7 - 24i = 0$
 $x^2 - (8 - 6i)x + 7 - 24i = (x - (4 - 3i))^2 = 0 \Leftrightarrow x = 4 - 3i$

f. $x^2 - (3 - 2i)x + 17 - 7i = 0$
 $x^2 - (3 - 2i)x + 17 - 7i = (x - (1,5 - i))^2 - 1,25 + 3i + 17 - 7i$
 $= (x - (1,5 - i))^2 - (\sqrt{-15,75 + 4i})^2$

Es ist aber:

$$\sqrt{(-15,75)^2 + 4^2} = \sqrt{248,0625 + 16} = \sqrt{264,0625} = 16,25$$

Und damit:

$$\begin{aligned}\sqrt{-15,75 + 4i} &= \sqrt{\frac{1}{2}(-15,75 + 16,25)} + \sqrt{\frac{1}{2}(15,75 + 16,25)} \cdot i = \\ &= \sqrt{0,25} + \sqrt{16} \cdot i = 0,5 + 4i\end{aligned}$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned}x^2 - (3 - 2i)x + 17 - 7i &= (x - (1,5 - i))^2 - (0,5 + 4i)^2 = \\ (x - (2 + 3i)) \cdot (x - (1 - 5i)) &= 0 \Leftrightarrow x = 2 + 3i \vee x = 1 - 5i\end{aligned}$$