

1. Aufgabe

- a. Stellen Sie die Funktion $z = x \text{ AND } y$ nur mit Hilfe von OR und NOT dar.

$$x \text{ AND } y = \overline{\overline{x \text{ AND } y}} = \overline{\overline{x} \text{ OR } \overline{y}}$$

- b. Stellen Sie die Funktion $z = x \text{ OR } y$ nur mit Hilfe von AND und NOT dar.

$$x \text{ OR } y = \overline{\overline{x \text{ OR } y}} = \overline{\overline{x} \text{ AND } \overline{y}}$$

2. Aufgabe

- a. Wie viele Boolesche Funktionen $f : \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}^n$ gibt es ?

$\{0, 1\}^2$ hat $2^2 = 4$ Elemente, $\{0, 1\}^n$ hat 2^n Elemente, also hat eine Menge aus geordneten 2^2 -Tupeln, in denen in jeder Komponente 2^n Elemente möglich sind, gerade $(2^n)^4 = 2^{4 \cdot n}$ Elemente. Genau so viele Funktionen

$$f : \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}^n$$

gibt es.

- b. Wie viele Boolesche Funktionen $f : \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}^n$ gibt es ?

$\{0, 1\}^3$ hat $2^3 = 8$ Elemente, $\{0, 1\}^n$ hat 2^n Elemente, also hat eine Menge aus geordneten 2^3 -Tupeln, in denen in jeder Komponente 2^n Elemente möglich sind, gerade $(2^n)^8 = 2^{8 \cdot n}$ Elemente. Genau so viele Funktionen

$$f : \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}^n$$

gibt es.

- c. Wie viele Boolesche Funktionen $f: \{0, 1\}^m \rightarrow \{0, 1\}^n$ gibt es ?
 $\{0, 1\}^m$ hat $b := 2^m$ Elemente, $\{0, 1\}^n$ hat 2^n Elemente, also hat eine Menge aus geordneten 2^m -Tupeln, in denen in jeder Komponente 2^n Elemente möglich sind, gerade $(2^n)^b = 2^{b \cdot n}$ Elemente. Genau so viele Funktionen

$$f: \{0, 1\}^m \rightarrow \{0, 1\}^n$$

gibt es.

3. Aufgabe

Die Boolesche Funktion $f: \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$ habe die folgende Wahrheitstafel:

x	y	f(x,y)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Beschreiben Sie diese Funktion, indem Sie nur das AND und das NOT-Gatter benutzen.

Beispielsweise ist: $f(x, y) = \bar{x} \cdot y + x \cdot \bar{y}$

4. Aufgabe

Beweisen Sie das Distributivgesetz für das ausschließende Oder:

$$(x \oplus y) \cdot z = x \cdot z \oplus y \cdot z$$

Beweis:

In Aufgabe 3 haben wir gerade eine Formel für das ausschließende Oder hergeleitet. Es ist:

$$\begin{aligned} x \cdot z \oplus y \cdot z &= \overline{x \cdot z} \cdot y \cdot z + x \cdot z \cdot \overline{y \cdot z} = (\overline{x \cdot z} \cdot y + x \cdot \overline{y \cdot z}) \cdot z = \\ &= ((\overline{x} + \overline{z}) \cdot y + x \cdot (\overline{y} + \overline{z})) \cdot z = \\ &= (\overline{x} \cdot y + x \cdot \overline{y} + y \cdot \overline{z} + x \cdot \overline{z}) \cdot z = \\ &= (\overline{x} \cdot y + x \cdot \overline{y} + y \cdot \overline{z} + x \cdot \overline{z}) \cdot z = \\ &= (x \oplus y) \cdot z + (x + y) \cdot \overline{z} \cdot z = (x \oplus y) \cdot z + (x + y) \cdot 0 = \\ &= (x \oplus y) \cdot z + 0 = (x \oplus y) \cdot z \end{aligned}$$

5. Aufgabe

Wie Sie sicher noch aus Kapitel 1 wissen, ist $x \rightarrow y$ äquivalent zu $(\neg x) \vee y$ bzw. in unserer Algebra-Notation äquivalent zu $\overline{x} + y$.

Außerdem ist $x \leftrightarrow y$ äquivalent zu $(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$ bzw. in unserer Algebra-Notation äquivalent zu $(x \rightarrow y) \cdot (y \rightarrow x)$

Frage: Sind die beiden folgenden Ausdrücke logisch äquivalent? Beweisen Sie Ihre Antwort!

$$(i) \ x \quad (ii) \ (y \leftrightarrow (x \rightarrow y))$$

Die beiden folgenden Ausdrücke sind nicht logisch äquivalent. Das zeigt die Belegung von x mit dem Wahrheitswert 0 (dann ist (i) falsch) und von y mit dem Wahrheitswert 1. In diesem Fall ist (ii) wahr.

6. Aufgabe

Geben Sie zu der folgenden Funktion f mit der untenstehenden Wahrheitstafel die minterm - und maxterm - Darstellungen an:

x_1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
x_2	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
x_3	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
x_4	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0

Minterm:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot \bar{x}_4 + \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4 + x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4 + \\ + x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4 + x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4$$

Maxterm:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + \bar{x}_4) \cdot \\ (x_1 + x_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4) \cdot (x_1 + \bar{x}_2 + x_3 + \bar{x}_4) \cdot \\ (x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + x_4) \cdot (x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4) \cdot \\ (\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3 + x_4) \cdot (\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4) \cdot \\ (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + x_4) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4)$$

7. Aufgabe

Finden Sie die minterm - und maxterm - Ausdrücke für die NAND - , NOR - , XOR - und XNOR - Operationen. Vergleichen Sie Ihre Lösungen mit den Formeln, die Sie für diese Ausdrücke bereits kennen gelernt haben.

Name	Wahrheitswert-Tabelle	Boolesche Formel	Minterm	Maxterm															
NAND	<table><tr><th>x</th><th>y</th><th>z</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	x	y	z	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	$z = \overline{x \cdot y}$	$z = \bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot y + x \cdot \bar{y}$	$z = \bar{x} + \bar{y}$
x	y	z																	
0	0	1																	
0	1	1																	
1	0	1																	
1	1	0																	
NOR	<table><tr><th>x</th><th>y</th><th>z</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	x	y	z	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	$z = \overline{x + y}$	$z = \bar{x} \cdot \bar{y}$	$z = (x + \bar{y}) \cdot (\bar{x} + y) \cdot (\bar{x} + \bar{y})$
x	y	z																	
0	0	1																	
0	1	0																	
1	0	0																	
1	1	0																	
XOR (ausschließen- des Oder)	<table><tr><th>x</th><th>y</th><th>z</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	x	y	z	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	$z = x \oplus y = x \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot y$	$z = \bar{x} \cdot y + x \cdot \bar{y}$	$z = (x + y) \cdot (\bar{x} + \bar{y})$
x	y	z																	
0	0	0																	
0	1	1																	
1	0	1																	
1	1	0																	
XNOR	<table><tr><th>x</th><th>y</th><th>z</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	x	y	z	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	$z = \overline{x \oplus y} = x \cdot y + \bar{x} \cdot \bar{y}$	$z = x \cdot y + \bar{x} \cdot \bar{y}$	$z = (x + \bar{y}) \cdot (\bar{x} + y)$
x	y	z																	
0	0	1																	
0	1	0																	
1	0	0																	
1	1	1																	

8. Aufgabe

Ein Kollege sagt Ihnen: „Ich habe heute eine Boolesche Funktion f in 3 Variablen konstruiert, für die gilt:

$$f(\overline{x_1}, x_2, x_3) = f(x_1, \overline{x_2}, x_3) = f(x_1, x_2, \overline{x_3}) = \overline{f(x_1, x_2, x_3)} \quad "$$

Sie können den Kollegen nicht besonders leiden und sagen schnell: „Eine solche Funktion gibt es gar nicht.“ Waren Sie zu voreilig?

Sie waren zu voreilig!! Betrachten Sie:

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Also: $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}$

Bzw.:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + \overline{x_3}) \cdot (x_1 + \overline{x_2} + x_3) \cdot (\overline{x_1} + x_2 + x_3) \cdot (\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3})$$

(Mit dem Maxterm-Ausdruck sieht man schnell die Gleichung für $\overline{f(x_1, x_2, x_3)}$)

9. Aufgabe

Geben Sie eine Formel an

- für die Anzahl der UND - und ODER - Bausteine bei einem minterm - Ausdruck
- für die Anzahl der UND - und ODER - Bausteine bei einem maxterm - Ausdruck

In welcher Situation sollte man also welchen Ausdruck wählen ?

Sei f eine Boolesche Funktion, $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$. Die 0 trete m_0 mal als Funktionswert auf, die 1 trete m_1 mal als Funktionswert auf. Es ist $m_0 + m_1 = 2^n$.

Bei dem minterm - Ausdruck erhalten wir m_1 Summanden von n -fachen Produkten. Das bedeutet, dass man im Falle $m_1 \leq 2^{n-1}$ die minterm-Darstellung wählen sollte.

Bei dem maxterm - Ausdruck erhalten wir m_0 Faktoren von n -fachen Summen. Das bedeutet, dass man im Falle $m_0 \leq 2^{n-1}$ die maxterm-Darstellung wählen sollte.

10. Aufgabe

Welcher Ausdruck ist hier kürzer, die minterm – oder die maxterm – Darstellung? Geben Sie den kürzeren Ausdruck explizit an.

x_1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
x_2	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
x_3	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
x_4	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$F(x_1, x_2, x_3, x_4)$	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1

Hier ist (vgl. Aufgabe 9) $n = 4$, $m_1 = 5 \leq 2^3$, wir wählen also die minterm - Darstellung und erhalten:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot x_4 + \\ + x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \bar{x}_4 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$$

11. Aufgabe

Geben Sie auch hier – wie in Aufgabe 10 – den kürzeren Ausdruck explizit an.

x_1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
x_2	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
x_3	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
x_4	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Hier ist (vgl. Aufgabe 9) $n = 4$, $m_0 = 1 \leq 2^3$, wir wählen also die maxterm - Darstellung und erhalten:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4$$

12. Aufgabe

Vervollständigen Sie die folgende Tabelle. Beweisen Sie Ihre Einträge!

Operation	assoziativ ?	kommutativ ?
AND	ja	ja
OR	ja	ja
NAND	??	??
NOR	??	??
XOR	??	??
XNOR	??	??

Alle 4 Operationen sind – wie man sich leicht überlegen kann – kommutativ. Es bleibt die Assoziativität zu überprüfen:

x	y	z	$\overline{x \cdot y}$	$\overline{(\overline{x \cdot y}) \cdot z}$	$\overline{y \cdot z}$	$\overline{x \cdot (\overline{y \cdot z})}$	Keine Übereinstimmung
0	0	0	1	1	1	1	
0	0	1	1	0	1	1	Hier
0	1	0	1	1	1	1	
0	1	1	1	0	0	1	Hier
1	0	0	1	1	1	0	Hier
1	0	1	1	0	1	0	
1	1	0	0	1	1	0	Hier
1	1	1	0	1	0	1	

Also ist NAND nicht assoziativ.

x	y	z	$\overline{x + y}$	$\overline{(\overline{x + y}) + z}$	$\overline{y + z}$	$\overline{x + (\overline{y + z})}$	Keine Übereinstimmung
---	---	---	--------------------	-------------------------------------	--------------------	-------------------------------------	-----------------------

0	0	0	1	0	1	0	
0	0	1	1	0	0	1	Hier
0	1	0	0	1	0	1	
0	1	1	0	0	0	1	Hier
1	0	0	0	1	1	0	Hier
1	0	1	0	0	0	0	
1	1	0	0	1	0	0	Hier
1	1	1	0	0	0	0	

Also ist NOR nicht assoziativ.

x	y	z	$x \oplus y$	$(x \oplus y) \oplus z$	$y \oplus z$	$x \oplus (y \oplus z)$	Keine Übereinstimmung
0	0	0	0	0	0	0	
0	0	1	0	1	1	1	
0	1	0	1	1	1	1	
0	1	1	1	0	0	0	
1	0	0	1	1	0	1	
1	0	1	1	0	1	0	
1	1	0	0	0	1	0	
1	1	1	0	1	0	1	

Also ist XOR assoziativ.

x	y	z	$\overline{x \oplus y}$	$\overline{(\overline{x \oplus y}) \oplus z}$	$\overline{y \oplus z}$	$\overline{x \oplus (\overline{y \oplus z})}$	Keine Übereinstimmung
0	0	0	1	0	1	0	
0	0	1	1	1	0	1	
0	1	0	0	1	0	1	
0	1	1	0	0	1	0	
1	0	0	0	1	1	1	
1	0	1	0	0	0	0	
1	1	0	1	0	0	0	
1	1	1	1	1	1	1	

Also ist XNOR assoziativ.

Wir erhalten folgende Tabelle:

Operation	assoziativ ?	kommutativ ?
AND	ja	ja
OR	ja	ja
NAND	nein	ja
NOR	nein	ja
XOR	ja	ja
XNOR	ja	ja

13. Aufgabe

Betrachten Sie die folgenden Ausdrücke für Boolesche Funktionen f und g :

$$P_1: f \cdot g = 0, \quad P_2: f = \overline{g}$$

- a. Folgt P_2 aus P_1 ? Falls ja, beweisen Sie das bitte, andernfalls geben Sie ein explizites Gegenbeispiel.

Es sei $f = g = 0$. Dann ist $f \cdot g = 0$, also P_1 wahr, aber P_2 ist falsch.

Also gilt nicht: $P_1 \rightarrow P_2$.

- b. Folgt P_1 aus P_2 ? Falls ja, beweisen Sie das bitte, andernfalls geben Sie ein explizites Gegenbeispiel.

Falls P_2 gilt, falls also $f = \overline{g}$ ist, ist $f \cdot g = 0 \cdot 1 = 0$, also ist P_1 erfüllt.

Also gilt: $P_2 \rightarrow P_1$.

14. Aufgabe

Betrachten Sie die folgenden 4 Sätze (wenn Sie ihren Inhalt verwirrend finden, kümmern Sie sich nicht drum, es geht um etwas anderes)

- a: Tischbein ist die Bezeichnung eines Möbelteils
- b: Tischbein ist der Nachname eines Jungen namens Emil
- c: Hütchen ist eine Verkleinerungsform von Hut
- d: Die Cousine von Emil Tischbein heißt Pony Hütchen

Die boolesche Formel für die Aussage „Alle 4 Sätze sind wahr“ lautet: $a \cdot b \cdot c \cdot d$

Finden Sie auf ähnliche Weise die Formeln für:

- a. Mindestens einer der 4 Sätze ist wahr

$$a + b + c + d$$

- b. Genau einer dieser 4 Sätze ist wahr

$$a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot \bar{d} + \bar{a} \cdot b \cdot \bar{c} \cdot \bar{d} + \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c \cdot \bar{d} + \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot d$$

- c. Höchstens einer dieser 4 Sätze ist wahr

$$a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot \bar{d} + \bar{a} \cdot b \cdot \bar{c} \cdot \bar{d} + \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c \cdot \bar{d} + \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot d + \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot \bar{d}$$

- d. Welche der vier folgenden Ausdrücke formalisieren die Aussage:
a ist wahr, die anderen drei Aussagen sind falsch?

(i) $a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot \bar{d}$

(ii) $a \cdot \overline{b \cdot c \cdot d}$

(iii) $a \cdot (\bar{b} + \bar{c} + \bar{d})$

(iv) $a \cdot \overline{(b + c + d)}$

Ihre Antwort kann nur aus 0 oder aus 2 Ausdrücken bestehen. Warum?

Es ist (i) = (iv) und (ii) = (iii) (alles wegen De Morgan) und (i) \neq (ii). Darum kann die Antwort nur aus keinem der angebotenen Ausdrücken oder aus zweien bestehen.

Die richtige Antwort ist: (Nur) (i) und (iv) sind wahr genau dann, wenn a wahr ist und b, c und d jeweils falsch sind.

15. Aufgabe

Es gibt bezüglich der booleschen Addition ein neutrales Element, es ist der Wahrheitswert „falsch“, also die 0. Genauso gibt es ein neutrales Element der Und-Verknüpfung, der Multiplikation: Es ist der Wahrheitswert „wahr“, also die 1. Beweisen Sie diese beiden Tatsachen.

Zur 0: Es ist $0 + 0 = 0$, $1 + 0 = 1$

Zur 1: Es ist $0 \cdot 1 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$

Dabei sind alle Gleichungen als Gleichungen von Wahrheitswerten aufzufassen, + bedeutet OR, \cdot bedeutet AND