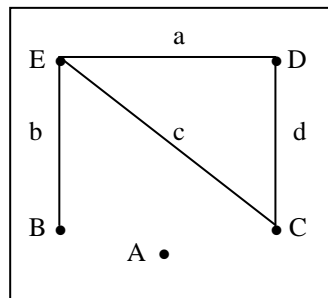


Sie haben drei Darstellungsmöglichkeiten eines Graphen kennen gelernt: Als Bild, gemäß der mathematischen Definition und als Matrix. Sie werden in den folgenden Aufgaben immer wieder aufgefordert, zwischen diesen Darstellungen hin und her zu wechseln

## 1. Aufgabe

Sie sehen jeweils einen ungerichteten Graphen in einer Darstellung. Geben Sie dazu die beiden äquivalenten Darstellungen an.

a.



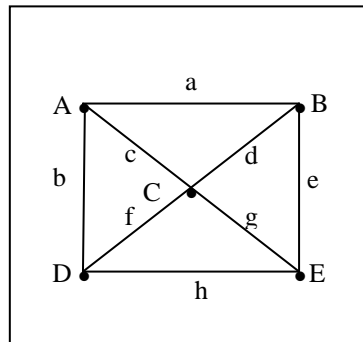
$V = \{ A, B, C, D, E \}$ ,  $E = \{ a, b, c, d \}$  und  $\Psi: E \rightarrow P(V)$  mit folgender Wertetabelle:

x	a	b	c	d
$\Psi(x)$	$\{E, D\}$	$\{E, B\}$	$\{E, C\}$	$\{D, C\}$

	A	B	C	D	E
A	0	0	0	0	0
B	0	0	0	0	1
C	0	0	0	1	1
D	0	0	1	0	1
E	0	1	1	1	0

- b.  $V = \{A, B, C, D, E\}$ ,  $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$  und  $\Psi: E \rightarrow P(V)$  mit folgender Wertetabelle:

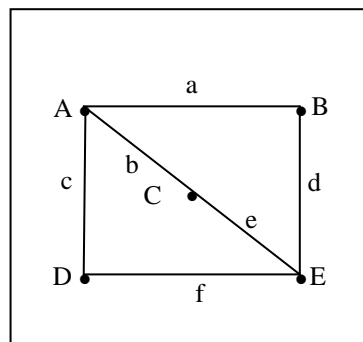
x	a	b	c	D	e	f	g	h
$\Psi(x)$	{A,B}	{A,D}	{A,C}	{B,C}	{B,E}	{C,D}	{C,E}	{D,E}



	A	B	C	D	E
A	0	1	1	1	0
B	1	0	1	0	1
C	1	1	0	1	1
D	1	0	1	0	1
E	0	1	1	1	0

c.

	A	B	C	D	E
A	0	1	1	1	0
B	1	0	0	0	1
C	1	0	0	0	1
D	1	0	0	0	1
E	0	1	1	1	0



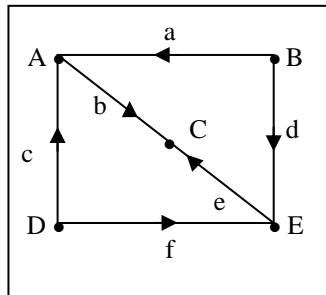
$V = \{ A, B, C, D, E \}$ ,  $E = \{ a, b, c, d, e, f \}$  und  $\Psi: E \rightarrow P(V)$  mit folgender Wertetabelle:

x	a	b	c	d	e	f
$\Psi(x)$	$\{A,B\}$	$\{A,C\}$	$\{A,D\}$	$\{B,E\}$	$\{C,E\}$	$\{D,E\}$

## 2. Aufgabe

Sie sehen jeweils einen gerichteten Graphen in einer Darstellung. Geben Sie dazu die beiden äquivalenten Darstellungen an.

a.



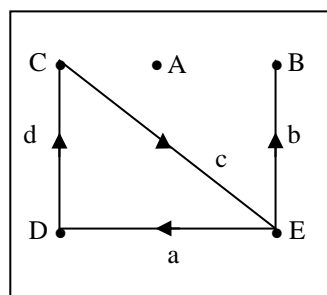
$V = \{ A, B, C, D, E \}$ ,  $E = \{ a, b, c, d, e, f \}$  und  $\Psi: E \rightarrow V^2$  mit folgender Wertetabelle:

x	a	b	c	d	e	f
$\Psi(x)$	$(B,A)$	$(A,C)$	$(D,A)$	$(B,E)$	$(E,C)$	$(D,E)$

	A	B	C	D	E
A	0	0	1	0	0
B	1	0	0	0	1
C	0	0	0	0	0
D	1	0	0	0	1
E	0	0	1	0	0

- b.  $V = \{ A, B, C, D, E \}$ ,  $E = \{ a, b, c, d \}$  und  $\Psi: E \rightarrow V^2$  mit folgender Wertetabelle:

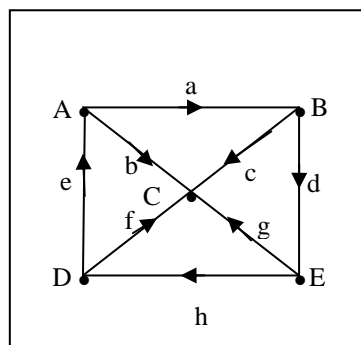
x	a	b	c	d
$\Psi(x)$	(E,D)	(E,B)	(C,E)	(D,C)



	A	B	C	D	E
A	0	0	0	0	0
B	0	0	0	0	0
C	0	0	0	0	1
D	0	0	1	0	0
E	0	1	0	1	0

c.

	A	B	C	D	E
A	0	1	1	0	0
B	0	0	1	0	1
C	0	0	0	0	0
D	1	0	1	0	0
E	0	0	1	1	0



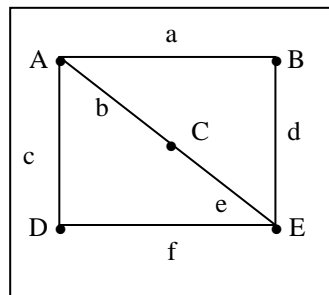
$V = \{ A, B, C, D, E \}$ ,  $E = \{ a, b, c, d, e, f, g, h \}$  und  $\Psi: E \rightarrow V^2$  mit folgender Wertetabelle:

x	a	b	c	d	e	f	g	h
$\Psi(x)$	(A,B)	(A,C)	(B,C)	(B,E)	(D,A)	(D,C)	(E,C)	(E,D)

### 3. Aufgabe

Geben Sie zu den Graphen aus den Aufgaben 2 jeweils die zugeordneten ungerichteten Graphen auf alle drei Weisen an

a.



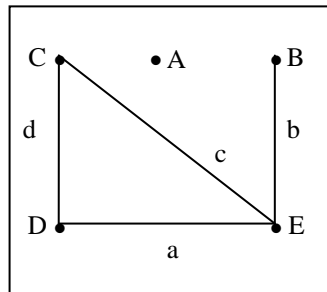
$V = \{ A, B, C, D, E \}$ ,  $E = \{ a, b, c, d, e, f \}$  und  $\Psi: E \rightarrow P(V)$  mit folgender Wertetabelle:

x	a	b	c	d	e	f
$\Psi(x)$	{B,A}	{A,C}	{D,A}	{B,E}	{E,C}	{D,E}

	A	B	C	D	E
A	0	1	1	1	0
B	1	0	0	0	1
C	1	0	0	0	1
D	1	0	0	0	1
E	0	1	1	1	0

- b.  $V = \{A, B, C, D, E\}$ ,  $E = \{a, b, c, d\}$  und  $\Psi: E \rightarrow P(V)$  mit folgender Wertetabelle:

x	a	b	C	d
$\Psi(x)$	$\{E, D\}$	$\{E, B\}$	$\{C, E\}$	$\{D, C\}$

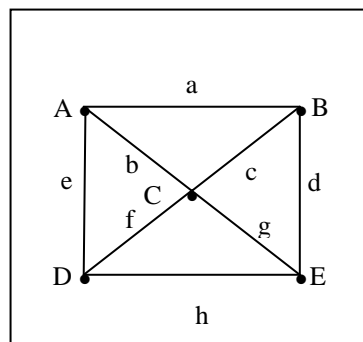




	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>	<b>E</b>
<b>A</b>	0	0	0	0	0
<b>B</b>	0	0	0	0	1
<b>C</b>	0	0	0	1	1
<b>D</b>	0	0	1	0	1
<b>E</b>	0	1	1	1	0

c.

	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>	<b>E</b>
<b>A</b>	0	1	1	1	0
<b>B</b>	1	0	1	0	1
<b>C</b>	1	1	0	1	1
<b>D</b>	1	0	1	0	1
<b>E</b>	0	1	1	1	0



$V = \{ A, B, C, D, E \}$ ,  $E = \{ a, b, c, d, e, f, g, h \}$  und  $\Psi: E \rightarrow P(V)$  mit folgender Wertetabelle:

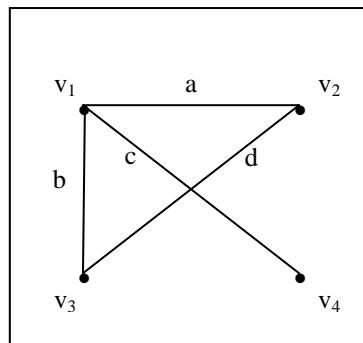
x	a	b	c	d	e	f	g	h
$\Psi(x)$	$\{A,B\}$	$\{A,C\}$	$\{B,C\}$	$\{B,E\}$	$\{D,A\}$	$\{D,C\}$	$\{E,C\}$	$\{E,D\}$

#### 4. Aufgabe

Zeichnen Sie einen Graphen mit 4 Knoten  $v_1, v_2, v_3$  und  $v_4$  und den zusätzlichen Eigenschaften:

$$\text{Grad}(v_1) = 3, \text{Grad}(v_2) = \text{Grad}(v_3) = 2, \text{Grad}(v_4) = 1$$

Geben Sie anschließend noch für Ihren Graphen die mathematische Beschreibung und die Charakterisierung mittels einer Matrix.



$V = \{ v_1, v_2, v_3, v_4 \}$ ,  $E = \{ a, b, c, d \}$  und  $\Psi: E \rightarrow P(V)$  mit folgender Wertetabelle:

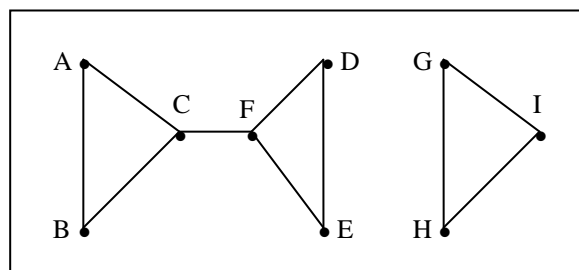
x	a	b	c	d
$\Psi(x)$	$\{ v_1, v_2 \}$	$\{ v_1, v_3 \}$	$\{ v_1, v_4 \}$	$\{ v_3, v_2 \}$

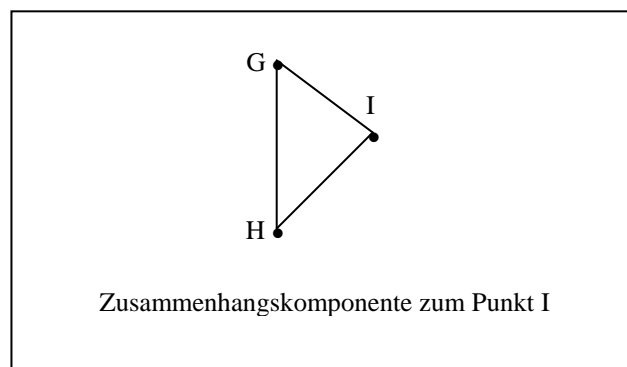
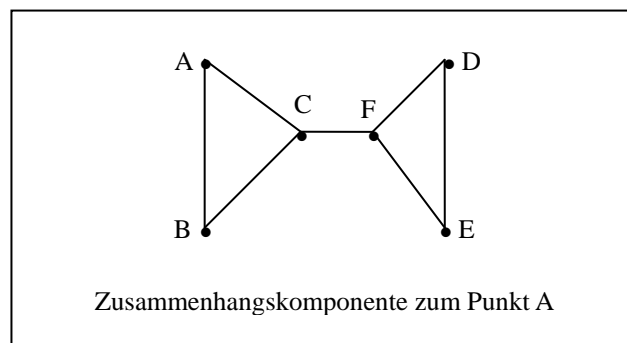
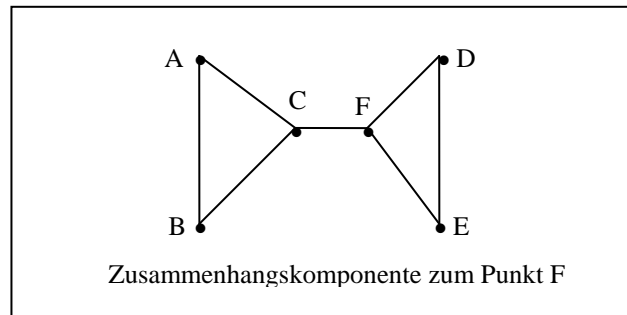
	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$
$v_1$	0	1	1	1
$v_2$	1	0	1	0
$v_3$	1	1	0	0
$v_4$	1	0	0	0

## 5. Aufgabe

Geben Sie zu den folgenden ungerichteten Graphen die Zusammenhangskomponenten zu den verlangten Punkten an. Machen Sie das immer in Form einer Grafik. Welche dieser Graphen sind zusammenhängend?

- a. Zeichnen Sie die Zusammenhangskomponente zum Punkt F, die Zusammenhangskomponente zum Punkt A und die Zusammenhangskomponente zum Punkt I für den folgenden Graph



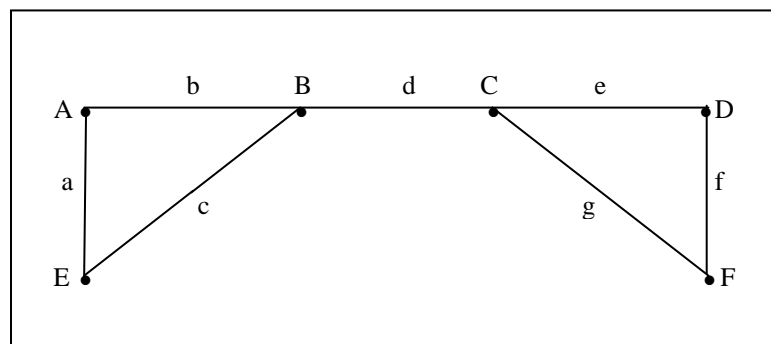


- b. Zeichnen Sie die Zusammenhangskomponente zum Punkt A und die Zusammenhangskomponente zum Punkt F für den folgenden Graph G:

Es sei  $V = \{A, B, C, D, E, F\}$ ,  $E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$  und  $\Psi: E \rightarrow P(V)$  mit folgender Wertetabelle gegeben:

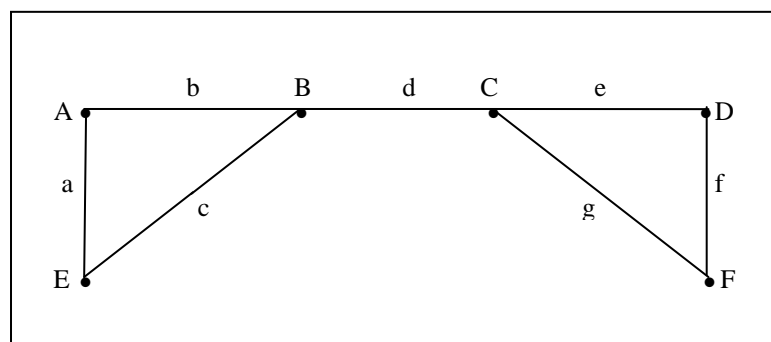
x	a	b	c	d	e	f	g
$\Psi(x)$	$\{A, E\}$	$\{A, B\}$	$\{E, B\}$	$\{B, C\}$	$\{C, D\}$	$\{D, F\}$	$\{C, F\}$

Bild:



Zusammenhangskomponente zum Punkt A =

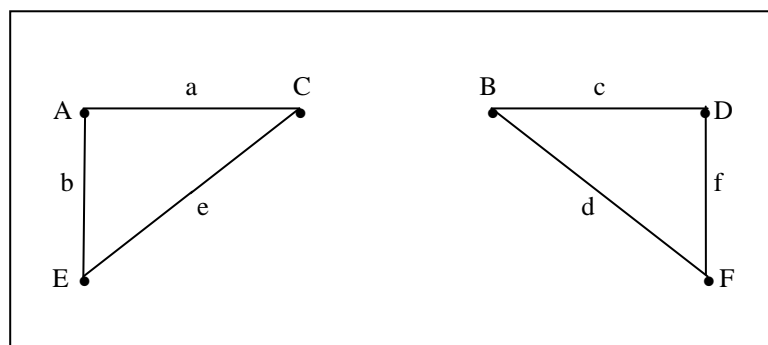
Zusammenhangskomponente zum Punkt F:



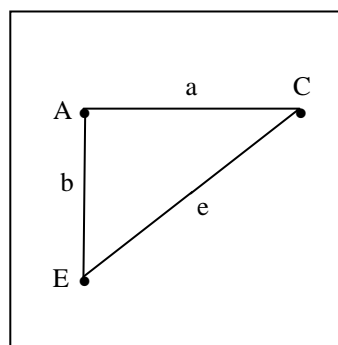
- c. Zeichnen Sie die Zusammenhangskomponente zum Punkt A und die Zusammenhangskomponente zum Punkt F für den Graphen mit der folgenden Adjazenzmatrix:

	A	B	C	D	E	F
A	0	0	1	0	1	0
B	0	0	0	1	0	1
C	1	0	0	0	1	0
D	0	1	0	0	0	1
E	1	0	1	0	0	0
F	0	1	0	1	0	0

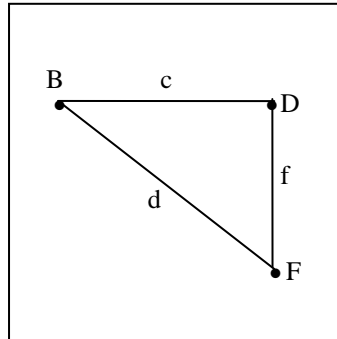
Bild:



Zusammenhangskomponente zum Punkt A:



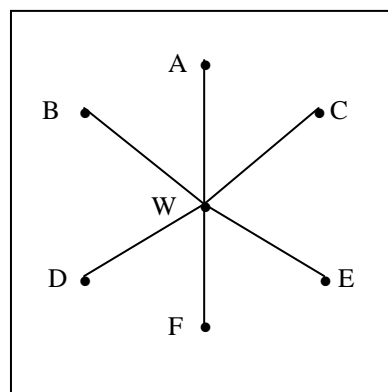
Zusammenhangskomponente zum Punkt F:



**6. Aufgabe**

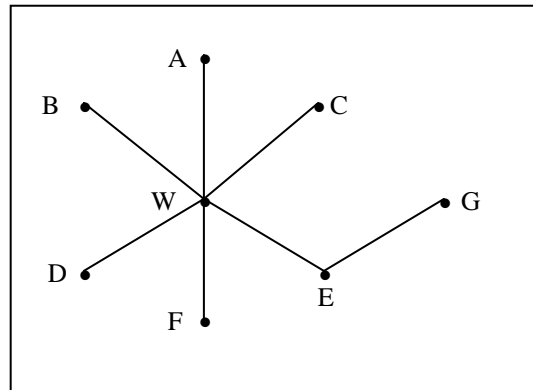
Entscheiden Sie jeweils, ob der folgende Graph ein Baum ist oder nicht.

a.



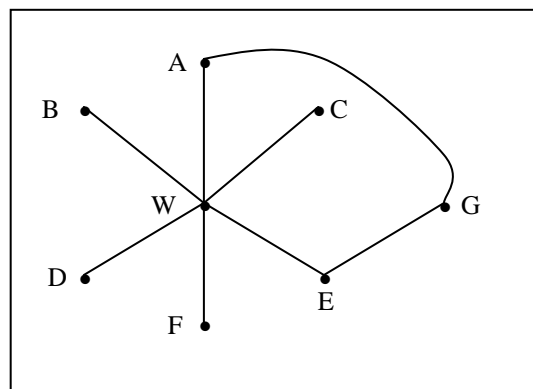
Baum!

b.



Baum!

c.



Kein Baum, da es Zyklen gibt!



## 7. Aufgabe

Erkennen Sie bei den folgenden ungerichteten Graphen, ob es Euler-Zyklen gibt oder ob es andere Euler-Wege gibt und konstruieren Sie gegebenenfalls einen dieser Wege.

a.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
B	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0
C	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0
D	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
E	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1
F	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0
G	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1
H	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
I	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1
J	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0

Es gibt genau 2 Punkte mit ungeradem Grad, nämlich B und G. Falls der Graph zusammenhängend ist, gibt es also einen Eulerweg. Das testen wir, indem wir eine Kante zwischen B und G hinzufügen und den Algorithmus ablaufen lassen:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
B	0	0	1	0	0	1	2	0	0	0
C	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0
D	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
E	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1
F	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0
G	0	2	1	0	1	1	0	0	0	1
H	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
I	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1
J	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0

(A, D, C, B, F, C, E, G, B, G, C, I, A)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
D	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
F	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
G	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
H	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
I	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
J	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0

(F, C, E, G, B, G, C, I, A, D, C, B, F)

(F, C, E, G, B, G, C, I, A, D, C, B, F, G, J, E, I, J, H, F)

[illegible]

<b>J</b>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
----------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Wir haben also alle Kanten verbraucht, der Graph war zusammenhängend, wir haben einen Eulerzyklus konstruiert. Wenn wir nun noch unsere Hilfskante wieder entfernen, erhalten wir den Eulerweg:

(B, G, C, I, A, D, C, B, F, G, J, E, I, J, H, F, C, E, G,)

b.

	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>	<b>E</b>	<b>F</b>	<b>G</b>	<b>H</b>	<b>I</b>	<b>J</b>
<b>A</b>	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
<b>B</b>	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0
<b>C</b>	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0
<b>D</b>	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
<b>E</b>	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1
<b>F</b>	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0
<b>G</b>	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1
<b>H</b>	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
<b>I</b>	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
<b>J</b>	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0

Hier haben 4 Punkte (A, B, G und I) ungeraden Grad, wir brauchen also gar nicht erst zu versuchen, eine Eulerweg oder Eulerzyklus zu finden.

c.

	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>	<b>E</b>	<b>F</b>	<b>G</b>	<b>H</b>	<b>I</b>	<b>J</b>
<b>A</b>	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
<b>B</b>	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
<b>C</b>	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0
<b>D</b>	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
<b>E</b>	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1
<b>F</b>	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0
<b>G</b>	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1
<b>H</b>	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
<b>I</b>	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1
<b>J</b>	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0



<b>J</b>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
----------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Wir haben also alle Kanten verbraucht, der Graph war zusammenhängend, wir haben einen Eulerzyklus konstruiert.

## 8. Aufgabe

Erkennen Sie bei den folgenden gerichteten Graphen, ob es Euler-Zyklen gibt oder ob es andere Euler-Wege gibt und konstruieren Sie gegebenenfalls einen dieser Wege.

a.

	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>	<b>E</b>	<b>F</b>	<b>G</b>
<b>A</b>	0	0	1	1	0	0	0
<b>B</b>	1	0	0	0	0	0	0
<b>C</b>	0	0	0	0	0	0	1
<b>D</b>	0	0	0	0	0	1	0
<b>E</b>	0	1	0	0	0	0	0
<b>F</b>	1	0	0	0	1	0	0
<b>G</b>	0	0	0	0	0	1	0

	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>	<b>E</b>	<b>F</b>	<b>G</b>	$g^+$
<b>A</b>	0	0	1	1	0	0	0	2
<b>B</b>	1	0	0	0	0	0	0	1
<b>C</b>	0	0	0	0	0	0	1	1
<b>D</b>	0	0	0	0	0	1	0	1
<b>E</b>	0	1	0	0	0	0	0	1
<b>F</b>	1	0	0	0	1	0	0	2
<b>G</b>	0	0	0	0	0	1	0	1
$g^-$	2	1	1	1	1	2	1	

Hier ist für alle Punkte Innengrad = Außengrad. Falls der Graph zusammenhängend ist, gibt es also einen Eulerzyklus. Das testen wir, indem wir den Algorithmus ablaufen lassen:

Wir beginnen mit dem Punkt A und erhalten den folgenden Weg:

(A, C, G, F, A, D, F, E, B, A)

Jetzt sieht die Matrix folgendermaßen aus:

	A	B	C	D	E	F	G
A	0	0	0	0	0	0	0
B	0	0	0	0	0	0	0
C	0	0	0	0	0	0	0
D	0	0	0	0	0	0	0
E	0	0	0	0	0	0	0
F	0	0	0	0	0	0	0
G	0	0	0	0	0	0	0

Wir haben also alle Kanten verbraucht, der Graph war zusammenhängend, wir haben einen Eulerzyklus konstruiert.

b.

	A	B	C	D	E	F	G
A	0	0	1	1	0	0	0
B	1	0	0	0	0	0	0
C	0	0	0	0	0	0	1
D	0	0	0	0	0	1	0
E	0	1	0	0	0	0	0
F	1	0	0	0	1	0	0
G	0	0	0	1	0	1	0

	A	B	C	D	E	F	G	$g^+$
A	0	0	1	1	0	0	0	2
B	1	0	0	0	0	0	0	1
C	0	0	0	0	0	0	1	1
D	0	0	0	0	0	1	0	1
E	0	1	0	0	0	0	0	1
F	1	0	0	0	1	0	0	2

<b>G</b>	0	0	0	1	0	1	0	2
<b>g<sup>-</sup></b>	2	1	1	2	1	2	1	

Hier gilt:

$$\begin{aligned} g^+(A) &= g^-(A) \\ g^+(B) &= g^-(B) \\ g^+(C) &= g^-(C) \\ g^+(D) &= g^-(D) - 1 \\ g^+(E) &= g^-(E) \\ g^+(F) &= g^-(F) \\ g^+(G) &= g^-(G) + 1 \end{aligned}$$

Gemäß unserem Satz 15.6 gibt es also unter der Voraussetzung, dass der Graph zusammenhängend ist, einen Eulerweg, der bei G beginnt und bei D endet. Das testen wir, indem wir eine Kante von D nach G hinzufügen und den Algorithmus ablaufen lassen:

	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>	<b>E</b>	<b>F</b>	<b>G</b>
<b>A</b>	0	0	1	1	0	0	0
<b>B</b>	1	0	0	0	0	0	0
<b>C</b>	0	0	0	0	0	0	1
<b>D</b>	0	0	0	0	0	1	1
<b>E</b>	0	1	0	0	0	0	0
<b>F</b>	1	0	0	0	1	0	0
<b>G</b>	0	0	0	1	0	1	0

Wir beginnen mit dem Punkt A und erhalten den folgenden Weg:

(A, C, G, D, F, A, D, G, F, E, B, A)

Jetzt sieht die Matrix folgendermaßen aus:

	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>	<b>E</b>	<b>F</b>	<b>G</b>
<b>A</b>	0	0	0	0	0	0	0
<b>B</b>	0	0	0	0	0	0	0
<b>C</b>	0	0	0	0	0	0	0
<b>D</b>	0	0	0	0	0	0	0
<b>E</b>	0	0	0	0	0	0	0
<b>F</b>	0	0	0	0	0	0	0

<b>G</b>	0	0	0	0	0	0	0
----------	---	---	---	---	---	---	---

Wir haben also alle Kanten verbraucht, der Graph war zusammenhängend, wir haben einen Eulerzyklus konstruiert. Wenn wir nun noch unsere Hilfskante von D nach G wieder entfernen, erhalten wir den Eulerweg:

(G, F, E, B, A, C, G, D, F, A, D)

c.

	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>	<b>E</b>	<b>F</b>	<b>G</b>
<b>A</b>	0	0	1	1	0	0	0
<b>B</b>	1	0	0	0	0	0	0
<b>C</b>	0	0	0	0	0	0	1
<b>D</b>	0	0	0	0	1	1	0
<b>E</b>	0	1	0	0	0	0	0
<b>F</b>	1	0	0	0	1	0	0
<b>G</b>	0	0	0	1	0	1	0

	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>	<b>E</b>	<b>F</b>	<b>G</b>	$g^+$
<b>A</b>	0	0	1	1	0	0	0	2
<b>B</b>	1	0	0	0	0	0	0	1
<b>C</b>	0	0	0	0	0	0	1	1
<b>D</b>	0	0	0	0	1	1	0	2
<b>E</b>	0	1	0	0	0	0	0	1
<b>F</b>	1	0	0	0	1	0	0	2
<b>G</b>	0	0	0	1	0	1	0	2
$g^-$	2	1	1	2	2	2	1	

Hier gilt:

$$g^+(A) = g^-(A)$$

$$g^+(B) = g^-(B)$$

$$g^+(C) = g^-(C)$$

$$g^+(D) = g^-(D)$$

$$g^+(E) = g^-(E) - 1$$

$$g^+(F) = g^-(F)$$

$$g^+(G) = g^-(G) + 1$$



Wieder gibt es gemäß unserem Satz 15.6 unter der Voraussetzung, dass der Graph zusammenhängend ist, einen Eulerweg, der bei G beginnt und diesmal bei E endet. Das testen wir, indem wir eine Kante von E nach G hinzufügen und den Algorithmus ablaufen lassen:

	A	B	C	D	E	F	G
A	0	0	1	1	0	0	0
B	1	0	0	0	0	0	0
C	0	0	0	0	0	0	1
D	0	0	0	0	1	1	0
E	0	1	0	0	0	0	1
F	1	0	0	0	1	0	0
G	0	0	0	1	0	1	0

Wir beginnen mit dem Punkt A und erhalten zunächst den folgenden Weg:

(A, C, G, D, E, B, A, D, F, A)

Jetzt sieht die Matrix folgendermaßen aus:

	A	B	C	D	E	F	G
A	0	0	0	0	0	0	0
B	0	0	0	0	0	0	0
C	0	0	0	0	0	0	0
D	0	0	0	0	0	0	0
E	0	0	0	0	0	0	1
F	0	0	0	0	1	0	0
G	0	0	0	0	0	1	0

Wir müssen nun einen breakout machen, der erste Punkt unseres Zyklus, an dem das möglich ist, ist der Punkt G:

(A, C, G, D, E, B, A, D, F, A)

Wir fahren fort und erhalten:

(G, D, E, B, A, D, F, A, C, G, F, E, G)

Jetzt sieht die Matrix folgendermaßen aus

	A	B	C	D	E	F	G
A	0	0	0	0	0	0	0
B	0	0	0	0	0	0	0
C	0	0	0	0	0	0	0
D	0	0	0	0	0	0	0
E	0	0	0	0	0	0	0
F	0	0	0	0	0	0	0
G	0	0	0	0	0	0	0

Wir haben also alle Kanten verbraucht, der Graph war zusammenhängend, wir haben einen Eulerzyklus konstruiert. Wenn wir nun noch unsere Hilfskante von E nach G wieder entfernen, erhalten wir den Eulerweg:

(G, D, E, B, A, D, F, A, C, G, F, E)

## 9. Aufgabe

In einem ungerichteten Graphen mit  $n$  Knoten sei jeder Knoten mit jedem anderen, davon verschiedenen Knoten durch genau eine Kante verbunden. Darüber hinaus gebe es keine weiteren Kanten in diesem Graphen.

- a. Unter welchen Voraussetzungen gibt es in solch einem Graphen einen Euler-Zyklus?

Es gibt einen Eulerzyklus genau dann, wenn  $n$  eine ungerade Zahl größer 0 ist.

- b. Unter welchen Voraussetzungen gibt es in solch einem Graphen einen Euler-Weg?

Es gibt einen Eulerweg genau dann, wenn  $n = 2$  ist.