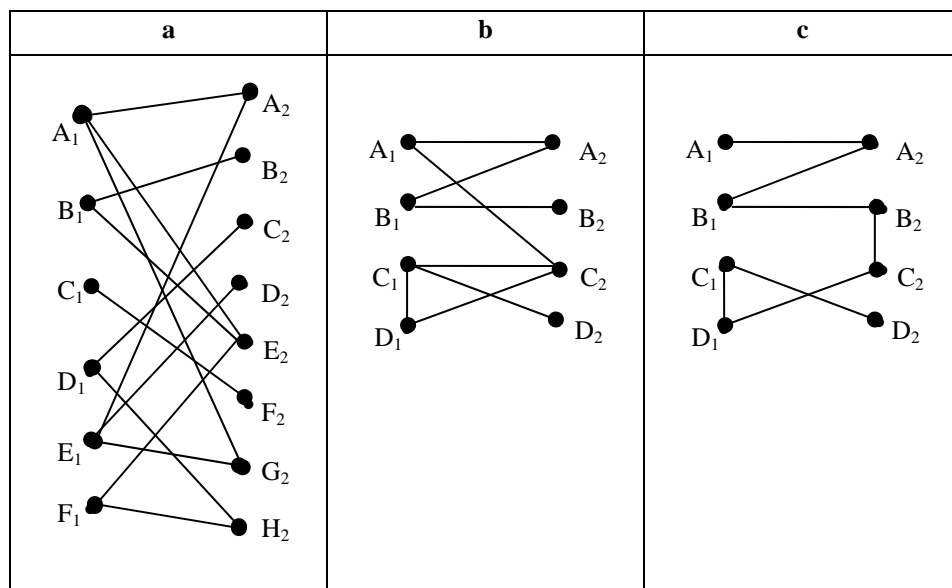


1. Aufgabe

Welche der folgenden Graphen sind bipartit, welche nicht? Begründen Sie Ihre Antwort mit der Definition eines bipartiten Graphen.



- a. Dieser Graph ist bipartit mit den Mengen $V = V_1 \cup V_2$,
 $V_1 = \{ A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1 \}$, $V_2 = \{ A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2, G_2, H_2 \}$

- b. Dieser Graph ist nicht bipartit.

Beweis:

Es sei V disjunkte Vereinigung zweier nicht leerer Mengen V_1 und V_2 , so dass jede Kante von G einen Knoten aus V_1 mit einem Knoten aus V_2 verbindet. Es sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $C_1 \in V_1$. Da es eine Kante von C_1 nach C_2 gibt, folgt: $C_2 \in V_2$. Aus demselben Grund folgt: $D_1 \in V_1$ und schließlich $C_1 \in V_2$ im Widerspruch zur Annahme.

- c. Dieser Graph ist bipartit mit den Mengen $V = V_1 \cup V_2$, mit
 $V_1 = \{ A_1, B_1, C_1, C_2 \}$, $V_2 = \{ A_2, B_2, D_1, D_2 \}$
- d. Es sei $V = \{ A, B, C, D \}$, $E = \{ a, b, c, d \}$ und $\Psi: E \rightarrow P(V)$ mit folgender Wertetabelle gegeben:

x	a	b	c	d
$\Psi(x)$	$\{A,B\}$	$\{B,C\}$	$\{C,D\}$	$\{A,D\}$

Dieser Graph ist bipartit mit den Mengen $V = V_1 \cup V_2$, mit
 $V_1 = \{ A, C \}$, $V_2 = \{ B, D \}$

- e. Es sei $V = \{ A, B, C, D, E \}$, $E = \{ a, b, c, d, e \}$ und $\Psi: E \rightarrow P(V)$ mit folgender Wertetabelle gegeben:

x	A	b	c	d	e
$\Psi(x)$	$\{A,B\}$	$\{B,E\}$	$\{D,E\}$	$\{C,D\}$	$\{A,C\}$

Dieser Graph ist nicht bipartit.

Beweis:

Es sei V disjunkte Vereinigung zweier nicht leerer Mengen V_1 und V_2 , so dass jede Kante von G einen Knoten aus V_1 mit einem Knoten aus V_2 verbindet. Es sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $A \in V_1$. Da es eine Kante von A nach B gibt, folgt: $B \in V_2$. Aus demselben Grund folgt: $E \in V_1$, $D \in V_2$, $C \in V_1$ und schließlich $A \in V_2$ im Widerspruch zur Annahme.

2. Aufgabe

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen über bipartite Graphen wahr oder falsch sind. Bei Falschheit geben Sie ein Gegenbeispiel, bei Wahrheit geben Sie einen Beweis.

- a. Ein Graph, der einen Zyklus enthält, kann nicht bipartit sein.
Falsch, vergleiche den bipartiten Graphen aus Aufgabe 1 d, der den Zyklus (A, D, C, B, A) enthält. (Machen Sie eine Skizze!)

- b. Ein Graph, mit einem Zyklus, der aus 3 Kanten besteht, kann nicht bipartit sein.

Das ist richtig. **Beweis:**

Es sei V disjunkte Vereinigung zweier nicht leerer Mengen V_1 und V_2 , so dass jede Kante von G einen Knoten aus V_1 mit einem Knoten aus V_2 verbindet. Es seien A, B und C drei Punkte des Graphen, die zu einem Zyklus (A, B, C, A) gehören. Es sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $A \in V_1$. Da es eine Kante von A nach B gibt, folgt: $B \in V_2$. Aus demselben Grund folgt: $C \in V_1$ und schließlich $A \in V_2$ im Widerspruch zur Annahme.

- c. Ein Graph, mit einem Zyklus, der aus 4 Kanten besteht, kann nicht bipartit sein.
Falsch, vergleiche den bipartiten Graphen aus Aufgabe 1 d, der den Zyklus (A, D, C, B, A) enthält. (Machen Sie eine Skizze!)

- d. Ein Graph, mit einem Zyklus, der aus 5 Kanten besteht, kann nicht bipartit sein.

Das ist richtig. **Beweis:**

Es sei V disjunkte Vereinigung zweier nicht leerer Mengen V_1 und V_2 , so dass jede Kante von G einen Knoten aus V_1 mit einem Knoten aus V_2 verbindet. Es seien A_1, A_2, A_3, A_4 und A_5 fünf Punkte des Graphen, die zu einem Zyklus $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_1)$ gehören. Es sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $A_1 \in V_1$. Dann folgt: $A_3 \in V_1$ und $A_5 \in V_1$, also $A_1 \in V_2$ im Widerspruch zur Annahme, dass $A_1 \in V_1$ war.

- e. Ein Graph, mit einem Zyklus, der aus einer ungeraden Anzahl von Kanten besteht, kann nicht bipartit sein.

Das ist richtig. **Beweis:**

Es sei V disjunkte Vereinigung zweier nicht leerer Mengen V_1 und V_2 , so dass jede Kante von G einen Knoten aus V_1 mit einem Knoten aus V_2 verbindet. Es seien A_1, \dots, A_{2n+1} ($2n+1$) Punkte des Graphen, die zu einem Zyklus $(A_1, \dots, A_{2n+1}, A_1)$ gehören. Es sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $A_1 \in V_1$. Dann folgt für alle $1 \leq i \leq n$: $A_{2i} \in V_2$ und $A_{2i+1} \in V_1$. Insbesondere ist $A_{2n+1} \in V_1$ und damit $A_1 \in V_2$ im Widerspruch zur Annahme, dass $A_1 \in V_1$ war.

- f. Wenn es für ein Matching in einem bipartiten Graphen einen ungarischen Punkt gibt, dann gibt es kein Matching dieses Graphen ohne ungarische Punkte.

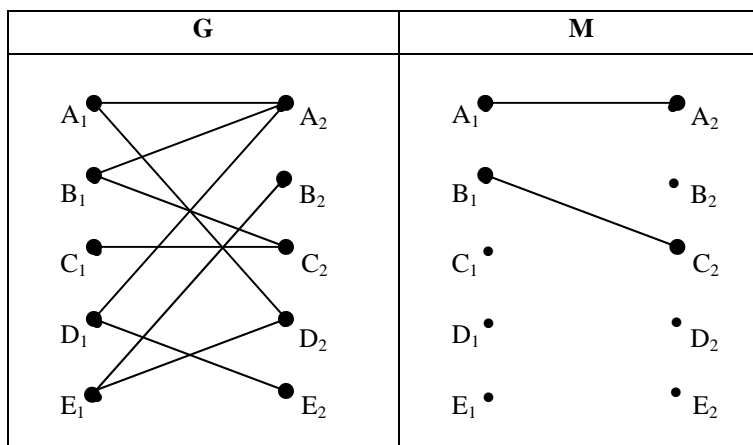
Das ist richtig und folgt sofort aus Satz 19.3

- g. Wenn ein Punkt eines bipartiten Graphen für ein Matching M ein ungarischer Punkt ist, dann ist er für jedes andere Matching dieses Graphen ebenfalls ein ungarischer Punkt.

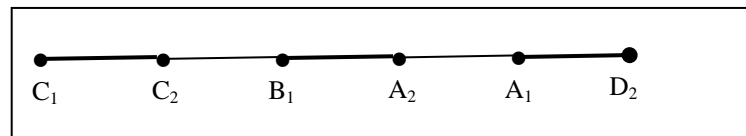
Das ist falsch, betrachten Sie dazu die zwei Beispiele aus Abschnitt 19.3

3. Aufgabe

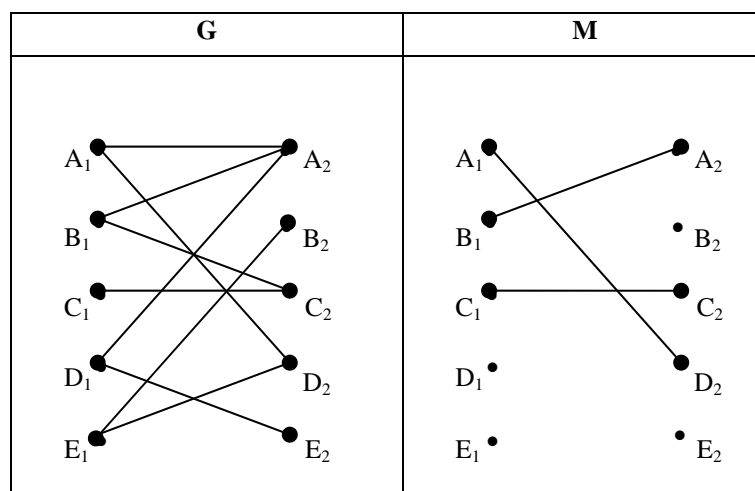
Gegeben der folgende bipartite Graph G und ein Matching M .



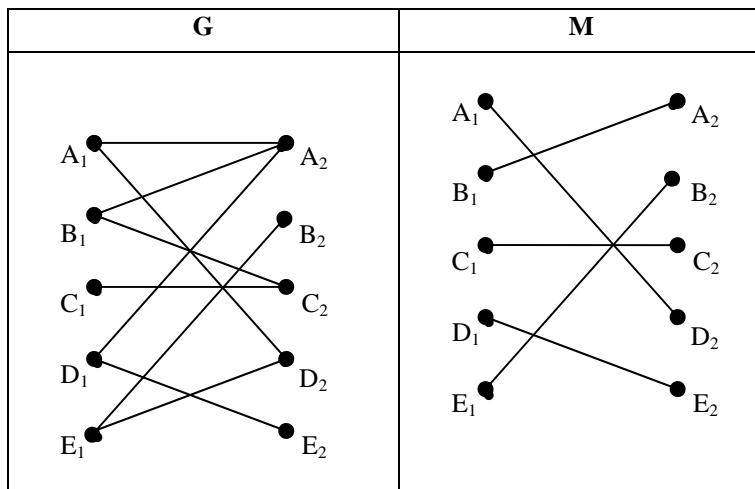
- a. Finden Sie einen M erweiternden Weg, mit dem Sie den Punkt C_1 zu dem Matching M hinzufügen können.



Ist ein erweiternder Weg, der unser Matching M folgendermaßen erweitert:



- b. Versuchen Sie, das Matching M zu vervollständigen.
Das ist sehr leicht:



4. Aufgabe

Betrachten Sie die folgenden 4 Matrizen von bipartiten Graphen und bearbeiten Sie sie mit dem ungarischen Algorithmus. Beginnen Sie die Suche nach einem maximalen Matching stets mit den bereits ausgewählten Kanten, die Sie an der fett gedruckten Darstellung erkennen können. Falls Ihr maximales Matching nicht vollständig ist, begründen Sie, warum es bei dieser Matrix nicht möglich ist, ein vollständiges Matching zu finden. Konstruieren Sie erweiternde Bäume, die Sie gegebenenfalls als ungarische Bäume nachweisen können.

a.

	a	b	c	d	e
A	1	1	0	0	0
B	0	1	0	1	0
C	0	0	1	0	1
D	1	1	1	0	0
E	1	0	0	0	0

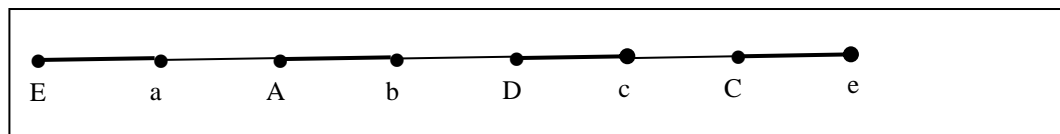
Diagram showing connections between nodes A, B, C, D, E and a, b, c, d, e. A connects to a, B to b, C to c, D to d, and E to e.

	a	b	c	d	e
A	1	1	0	0	0
B	0	1	0	1	0
C	0	0	1	0	1
D	1	1	1	0	0
E	1	0	0	0	0

Diagram showing connections between nodes A, B, C, D, E and a, b, c, d, e. A connects to a, B to b, C to c, D to d, and E to e.

	a	b	c	d	e
A	1	1	0	0	0
B	0	1	0	1	0
C	0	0	1	0	1
D	1	1	1	0	0
E	1	0	0	0	0

Erweiternder Baum (Weg) für E



liefert das folgende vollständige Matching

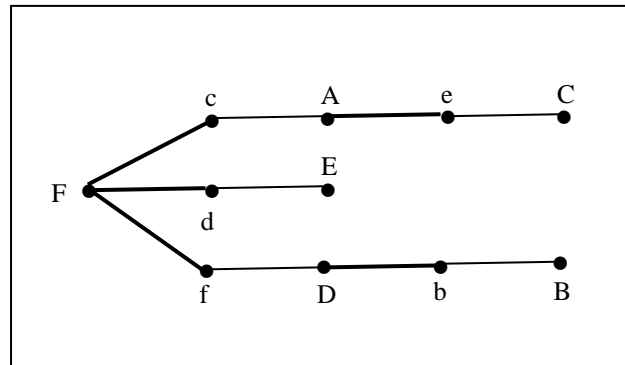
	<table border="1"> <tr> <th></th><th>a</th><th>b</th><th>c</th><th>d</th><th>e</th></tr> <tr> <th>A</th><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr> <th>B</th><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr> <th>C</th><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr> <th>D</th><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr> <th>E</th><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>		a	b	c	d	e	A	1	1	0	0	0	B	0	1	0	1	0	C	0	0	1	0	1	D	1	1	1	0	0	E	1	0	0	0	0
	a	b	c	d	e																																
A	1	1	0	0	0																																
B	0	1	0	1	0																																
C	0	0	1	0	1																																
D	1	1	1	0	0																																
E	1	0	0	0	0																																

b.

	a	b	C	d	e	f	g
A	0	0	1	1	1	0	0
B	0	1	0	1	0	1	0
C	0	0	1	0	1	0	0
D	0	1	0	0	1	1	0
E	0	0	0	1	0	0	0
F	0	0	1	1	0	1	0
G	1	0	0	0	0	0	1

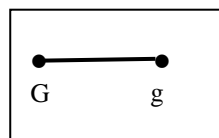
	<table border="1"> <tr> <th></th><th>a</th><th>b</th><th>c</th><th>d</th><th>e</th><th>f</th><th>g</th></tr> <tr> <th>A</th><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr> <th>B</th><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr> <th>C</th><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr> <th>D</th><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr> <th>E</th><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr> <th>F</th><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr> <th>G</th><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> </table>		a	b	c	d	e	f	g	A	0	0	1	1	1	0	0	B	0	1	0	1	0	1	0	C	0	0	1	0	1	0	0	D	0	1	0	0	1	1	0	E	0	0	0	1	0	0	0	F	0	0	1	1	0	1	0	G	1	0	0	0	0	0	1
	a	b	c	d	e	f	g																																																										
A	0	0	1	1	1	0	0																																																										
B	0	1	0	1	0	1	0																																																										
C	0	0	1	0	1	0	0																																																										
D	0	1	0	0	1	1	0																																																										
E	0	0	0	1	0	0	0																																																										
F	0	0	1	1	0	1	0																																																										
G	1	0	0	0	0	0	1																																																										

Ungarischer Baum für F



Und

Erweiternder Baum (Weg) für G



liefern das folgende maximale, nicht vollständige Matching

A

●

●

a

B

●

●

b

C

●

●

c

D

●

●

d

E

●

●

e

F

●

f

G

●

●

g

A

●

●

a

B

●

●

b

C

●

●

c

D

●

●

d

E

●

●

e

F

●

f

G

●

●

g

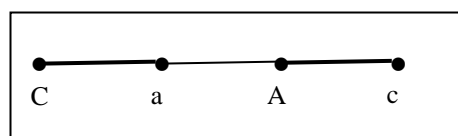
	a	b	c	d	e	f	g
A	0	0	1	1	1	0	0
B	0	1	0	1	0	1	0
C	0	0	1	0	1	0	0
D	0	1	0	0	1	1	0
E	0	0	0	1	0	0	0
F	0	0	1	1	0	1	0
G	1	0	0	0	0	0	1

c.

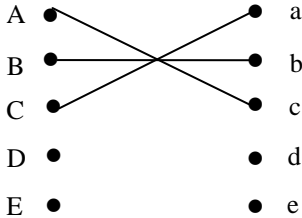
	a	b	c	d	e
A	1	0	1	0	0
B	1	1	0	1	1
C	1	0	0	0	0
D	0	1	0	0	0
E	1	0	1	0	0

<p> A •————• a B •————• b C • • c D • • d E • • e </p>	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <th></th><th>a</th><th>b</th><th>c</th><th>d</th><th>e</th></tr> <tr> <th>A</th><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr> <th>B</th><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr> <th>C</th><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr> <th>D</th><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr> <th>E</th><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>		a	b	c	d	e	A	1	0	1	0	0	B	1	1	0	1	1	C	1	0	0	0	0	D	0	1	0	0	0	E	1	0	1	0	0
	a	b	c	d	e																																
A	1	0	1	0	0																																
B	1	1	0	1	1																																
C	1	0	0	0	0																																
D	0	1	0	0	0																																
E	1	0	1	0	0																																

Erweiternder Baum (Weg) für C

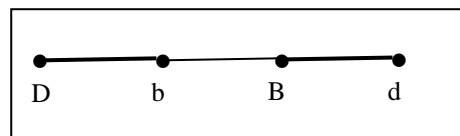


liefert das folgende Matching

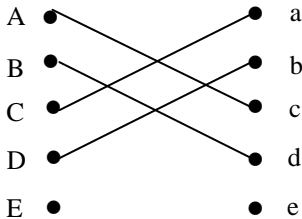


	a	b	c	d	e
A	1	0	1	0	0
B	1	1	0	1	1
C	1	0	0	0	0
D	0	1	0	0	0
E	1	0	1	0	0

Erweiternder Baum (Weg) für D

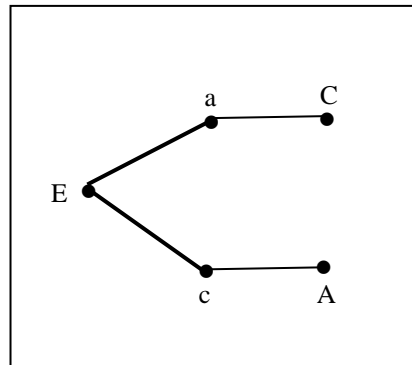


liefert das folgende Matching



	a	b	c	d	e
A	1	0	1	0	0
B	1	1	0	1	1
C	1	0	0	0	0
D	0	1	0	0	0
E	1	0	1	0	0

Der Ungarische Baum für E



zeigt, dass dieses maximale Matching unvollständig ist.

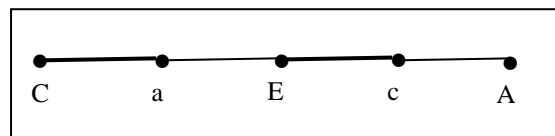
d.

	a	b	c	d	e
A	1	0	1	0	0
B	1	1	0	1	1
C	1	0	0	0	0
D	0	1	0	0	0
E	1	0	1	0	0

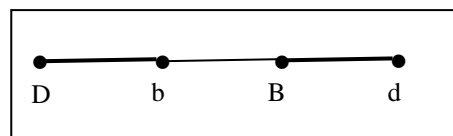
<pre> graph LR A((A)) --- a((a)) B((B)) --- b((b)) E((E)) --- a </pre>	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <th></th><th>a</th><th>b</th><th>c</th><th>d</th><th>e</th></tr> <tr> <th>A</th><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr> <th>B</th><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr> <th>C</th><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr> <th>D</th><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr> <th>E</th><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>		a	b	c	d	e	A	1	0	1	0	0	B	1	1	0	1	1	C	1	0	0	0	0	D	0	1	0	0	0	E	1	0	1	0	0
	a	b	c	d	e																																
A	1	0	1	0	0																																
B	1	1	0	1	1																																
C	1	0	0	0	0																																
D	0	1	0	0	0																																
E	1	0	1	0	0																																

	a	b	c	d	e
A	1	0	1	0	0
B	1	1	0	1	1
C	1	0	0	0	0
D	0	1	0	0	0
E	1	0	1	0	0

Der Ungarische Baum (Weg) für C



Und der erweiternde Baum (Weg) für D



liefern das folgende maximale, nicht vollständige Matching

A

B

C

D

E

a

b

c

d

e

	a	b	c	d	e
A	1	0	1	0	0
B	1	1	0	1	1
C	1	0	0	0	0
D	0	1	0	0	0
E	1	0	1	0	0

5. Aufgabe

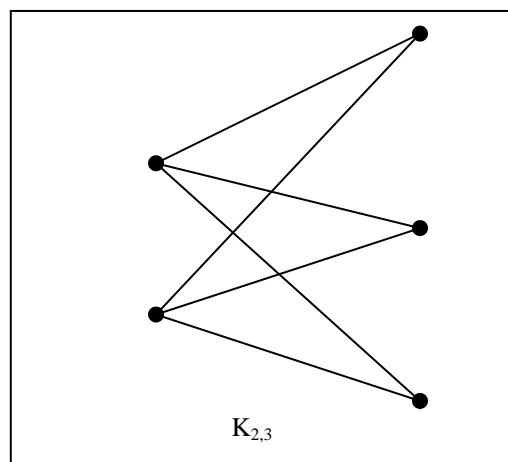
Begründen Sie mit Hilfe des Heiratssatzes von Hall, warum es bei den Graphen von Aufgabe 4 b, 4 c (und 4 d) keine vollständigen Matchings geben kann.

Zu Aufgabe 4b: Sei $T \subseteq V_1$ definiert durch $T = \{ A, B, C, D, E, F \}$. Dann ist $|T| = 6$, aber T ist nur mit den 5 Elementen $\{ b, c, d, e, f \}$ verbunden.

Zu den Aufgaben 4c und 4d: Sei $T \subseteq V_1$ definiert durch $T = \{ A, C, D, E \}$. Dann ist $|T| = 4$, aber T ist nur mit den 3 Elementen $\{ a, b, c \}$ verbunden.

6. Aufgabe

Der vollständige bipartite Graph $K_{m,n}$ für zwei Punktemengen A mit $|A| = m$ und B mit $|B| = n$ ist als der bipartite Graph definiert, der jeden Punkt von A mit jedem Punkt von B durch eine Kante verbindet. Die folgende Grafik zeigt den Graphen $K_{2,3}$.



- Wie viele Kanten hat $K_{m,n}$?
 $K_{m,n}$ hat $m \cdot n$ Kanten.
- Wie viele Kanten hat ein maximales Matching?
Ein maximales Matching hat $\min(m, n)$ Kanten.
- Unter welchen Voraussetzungen gibt es ein vollständiges Matching?

Unter der Voraussetzung, dass $m \geq n$ ist.

- d. Wie viele verschiedene maximale Matchings gibt es?

Es sei $m < n$. Dann gibt es $\frac{n!}{(n-m)!}$ Möglichkeiten.

Falls $m > n$ ist, gibt es $n! \cdot \binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!}$ Möglichkeiten.

Sei also $\max = \max(m, n)$ und $\min = \min(m, n)$. Dann gilt stets:

Es gibt $\frac{\max!}{(\max - \min)!}$ Möglichkeiten.