

1. Aufgabe

Wir benutzen in dieser Aufgabe entscheidend den Satz:

$$\text{Für alle } x, y \in \mathbf{R} \text{ gilt: } |x + y| \leq |x| + |y|$$

(Dreiecksungleichung)

Zum Beweis müssen Sie die beiden Fälle

- x und y haben gleiches Vorzeichen (da gilt das $=$ - Zeichen)
- x und y haben unterschiedliches Vorzeichen (da gilt das $<$ - Zeichen)

unterscheiden.

- a. Sei $P(x) = 4 \cdot x$. Zeigen Sie: $P(x) = O(x)$.

$$\text{Es ist } P(x) = O(x) \leftrightarrow \exists_{\xi \in \mathbf{R}} \exists_{c > 0} \forall_{x \geq \xi} |4 \cdot x| < c \cdot x$$

Setze $\xi = 0$ und $c = 5$. Dann ist die Erfüllung der Definition offensichtlich.

- b. Sei $P(x) = a_1 \cdot x$. Zeigen Sie: $P(x) = O(x)$.

$$\text{Es ist } P(x) = O(x) \leftrightarrow \exists_{\xi \in \mathbf{R}} \exists_{c > 0} \forall_{x \geq \xi} |a_1 \cdot x| < c \cdot x$$

Setze $\xi = 0$ und $c = |a_1| + 1$. Dann ist die Erfüllung der Definition offensichtlich.

- c. Sei $P(x) = 4 \cdot x + 10000$. Zeigen Sie: $P(x) = O(x)$.

$$\text{Es ist } P(x) = O(x) \leftrightarrow \exists_{\xi \in \mathbf{R}} \exists_{c > 0} \forall_{x \geq \xi} |4 \cdot x + 10000| < c \cdot x$$

Es ist $4 \cdot x + 10000 = x \left(4 + \frac{10000}{x} \right)$. Setze $\xi = 10001$. Dann gilt für alle $x \geq \xi$:

$$\left| 4 \cdot x + 10000 \right| = \left| x \left(4 + \frac{10000}{x} \right) \right| < 5 \cdot x$$

Also ist mit $\xi = 10001$ und $c = 5$ die Definition erfüllt.

d. Sei $P(x) = a_1 \cdot x + a_0$. Zeigen Sie: $P(x) = O(x)$.

Es ist $P(x) = O(x) \leftrightarrow \exists_{\xi \in \mathbf{R}} \exists_{c > 0} \forall_{x \geq \xi} |a_1 \cdot x + a_0| < c \cdot x$

Es ist $a_1 \cdot x + a_0 = x \left(a_1 + \frac{a_0}{x} \right)$. Setze $\xi = |a_0| + 1$. Dann gilt für alle $x \geq \xi$:

$$\left| a_1 \cdot x + a_0 \right| = \left| x \left(a_1 + \frac{a_0}{x} \right) \right| < x \cdot (|a_1| + 1)$$

Also ist mit $\xi = |a_0| + 1$ und $c = |a_1| + 1$ die Definition erfüllt.

e. Sei $P(x) = 4 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 17$. Zeigen Sie: $P(x) = O(x^3)$

Es ist $P(x) = O(x^3) \leftrightarrow \exists_{\xi \in \mathbf{R}} \exists_{c > 0} \forall_{x \geq \xi}$

$$|4 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 17| < c \cdot x^3$$

Es ist $4 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 17 = x^3 \left(4 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{17}{x^3} \right)$

Setze $\xi = 18$. Dann gilt für alle $x \geq \xi$:

$$\left| 4 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 17 \right| \leq x^3 \left(4 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{17}{x^3} \right) < 7 \cdot x^3$$

Also ist mit $\xi = 18$ und $c = 7$ die Definition erfüllt.

f. Sei $P(x) = a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$. Zeigen Sie: $P(x) = O(x^3)$

$$\text{Es ist } P(x) = O(x^3) \leftrightarrow \exists_{\xi \in \mathbf{R}} \exists_{c > 0} \forall_{x \geq \xi}$$

$$|a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0| < c \cdot x^3$$

Es ist

$$a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 = x^3 \left(a_3 + \frac{a_2}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_0}{x^3} \right)$$

Setze $\xi = \max(1, |a_2|, |a_1|, |a_0|)$. Dann gilt für alle $x \geq \xi$:

$$\begin{aligned} |a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0| &\leq \\ x^3 \left(|a_3| + \left| \frac{a_2}{x} \right| + \left| \frac{a_1}{x^2} \right| + \left| \frac{a_0}{x^3} \right| \right) &< (|a_3| + 4) \cdot x^3 \end{aligned}$$

Also ist mit $\xi = \max(1, |a_2|, |a_1|, |a_0|)$ und $c = |a_3| + 4$ die Definition erfüllt.

g. Sei $P(x)$ ein Polynom vom Grad n . Zeigen Sie: $P(x) = O(x^n)$

$$\text{Es sei } P(x) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i. \text{ Dann ist } P(x) = O(x^n) \leftrightarrow$$

$$\exists_{\xi \in \mathbf{R}} \exists_{c > 0} \forall_{x \geq \xi} \left| \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i \right| < c \cdot x^n$$

Es ist

$$\sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i = x^n \cdot \left(a_n + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{x^{n-i}} \right)$$

Setze $\xi = \max\{1 + |a_i| \mid 0 \leq i < n\}$. Dann gilt für alle $x \geq \xi$:

$$\left| \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i \right| \leq x^n \cdot \left(|a_n| + \sum_{i=0}^{n-1} \left| \frac{a_i}{x^{n-i}} \right| \right) < x^n \cdot (|a_n| + n)$$

Also ist mit $\xi = \max \{1 + |a_i| \mid 0 \leq i < n\}$ und $c = |a_n| + n$ die Definition erfüllt.

2. Aufgabe

Wir benutzen in dieser Aufgabe entscheidend den Satz:

$$\text{Für alle } x, y \in \mathbf{R} \text{ gilt: } |x + y| \geq ||x| - |y||$$

Wieder müssen Sie zum Beweis die beiden Fälle

- x und y haben gleiches Vorzeichen (da gilt das $>$ - Zeichen)
- x und y haben unterschiedliches Vorzeichen (da gilt das $=$ - Zeichen)

unterscheiden.

- a. Sei $P(x) \neq 0$ ein Polynom vom Grad 0. Zeigen Sie: $\frac{1}{P(x)} = O(1)$

Trivial. (Ehrenwort!)

- b. Sei $P(x) = 4 \cdot x$. Zeigen Sie: $\frac{1}{P(x)} = O\left(\frac{1}{x}\right)$.

$$\text{Folgt aus: } \left| \frac{1}{4x} \right| < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} \text{ für } x > 0$$

c. Sei $P(x) = a_1 \cdot x$. Zeigen Sie: $\frac{1}{P(x)} = O\left(\frac{1}{x}\right)$.

Wir nehmen an: $a_1 \neq 0$. Dann gilt für $x > 0$

$$\left| \frac{1}{a_1 \cdot x} \right| < \left| \frac{2}{a_1} \right| \cdot \frac{1}{x}$$

d. Sei $P(x) = 4 \cdot x + 10000$. Zeigen Sie: $\frac{1}{P(x)} = O\left(\frac{1}{x}\right)$.

Es ist für $x > 5000$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{4 \cdot x + 10000} \right| &= \left| \frac{1}{4 + \frac{10000}{x}} \right| \cdot \left| \frac{1}{x} \right| < \frac{1}{\left| 4 - \frac{10000}{x} \right|} \cdot \left| \frac{1}{x} \right| = \\ &= \frac{1}{4 - \frac{10000}{x}} \cdot \left| \frac{1}{x} \right| < \frac{1}{4 - 2} \cdot \left| \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{1}{x} \right| \end{aligned}$$

e. Sei $P(x) = a_1 \cdot x + a_0$. Zeigen Sie: $\frac{1}{P(x)} = O\left(\frac{1}{x}\right)$.

Wir nehmen an: $a_1 \neq 0$. Dann gilt für $x > \left| \frac{2 a_0}{a_1} \right|$:

$$\left| \frac{1}{a_1 \cdot x + a_0} \right| = \left| \frac{1}{a_1 + \frac{a_0}{x}} \right| \cdot \left| \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{\left| a_1 - \frac{|a_0|}{x} \right|} \cdot \left| \frac{1}{x} \right| =$$

$$= \frac{1}{|a_1| - \frac{|a_0|}{x}} \cdot \left| \frac{1}{x} \right| < \frac{1}{|a_1| - \frac{|a_1|}{2}} \cdot \left| \frac{1}{x} \right| = \frac{2}{|a_1|} \cdot \frac{1}{x}$$

f. Sei $P(x) = 4 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 17$. Zeigen Sie: $\frac{1}{P(x)} = O\left(\frac{1}{x^3}\right)$

Es sei $x > \max \{1, 2, 5, 17\}$, also $x > 17$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{4 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 17} \right| &= \left| \frac{1}{4 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{17}{x^3}} \right| \cdot \left| \frac{1}{x^3} \right| \leq \\ &= \frac{1}{4 - \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2} - \frac{17}{x^3}} \cdot \left| \frac{1}{x^3} \right| \leq \frac{1}{4 - \frac{2}{x} - \frac{5}{x} - \frac{17}{x}} \cdot \left| \frac{1}{x^3} \right| < \\ &< \frac{1}{4 - 1 - 1 - 1} \cdot \left| \frac{1}{x^3} \right| = 1 \cdot \frac{1}{x^3} \end{aligned}$$

g. Sei $P(x) = a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$. Zeigen Sie: $\frac{1}{P(x)} = O\left(\frac{1}{x^3}\right)$

Wir nehmen an: $a_3 \neq 0$.

Es sei $x > \max \left\{ 1, \left| \frac{4 \cdot a_2}{a_3} \right|, \left| \frac{4 \cdot a_1}{a_3} \right|, \left| \frac{4 \cdot a_0}{a_3} \right| \right\}$. Dann gilt:

$$\left| \frac{1}{a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0} \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \frac{1}{a_3 + \frac{a_2}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_0}{x^3}} \right| \cdot \left| \frac{1}{x^3} \right| \leq \\
&\leq \frac{1}{\left| a_3 \right| - \left| \frac{a_2}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_0}{x^3} \right|} \cdot \left| \frac{1}{x^3} \right| \leq \\
&\leq \frac{1}{\left| a_3 \right| - \left| \frac{a_2}{x} \right| - \left| \frac{a_1}{x^2} \right| - \left| \frac{a_0}{x^3} \right|} \cdot \left| \frac{1}{x^3} \right| \leq \\
&\leq \frac{1}{\left| a_3 \right| - \left| \frac{a_2}{x} \right| - \left| \frac{a_1}{x} \right| - \left| \frac{a_0}{x} \right|} \cdot \left| \frac{1}{x^3} \right| < \\
&< \frac{1}{\left| a_3 \right| - \left| \frac{a_3}{4} \right| - \left| \frac{a_3}{4} \right| - \left| \frac{a_3}{4} \right|} \cdot \left| \frac{1}{x^3} \right| = \frac{4}{a_3} \cdot \frac{1}{x^3}
\end{aligned}$$

h. Sei $P(x)$ ein Polynom vom Grad $n > 0$. Zeigen Sie: $\frac{1}{P(x)} = O\left(\frac{1}{x^n}\right)$

$$\text{Es sei } P(x) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i.$$

Weiter sei $x > \max\left\{1, \left|\frac{(n+1) \cdot a_i}{a_n}\right|, 0 \leq i < n\right\}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i} \right| &= \left| \frac{1}{a_n + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{x^{n-i}}} \right| \cdot \left| \frac{1}{x^n} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\left| a_n - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{x^{n-i}} \right|} \cdot \left| \frac{1}{x^n} \right| \leq \frac{1}{\left| a_n - \sum_{i=0}^{n-1} \left| \frac{a_i}{x^{n-i}} \right| \right|} \cdot \left| \frac{1}{x^n} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\left| a_n - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|a_i|}{x} \right|} \cdot \left| \frac{1}{x^n} \right| < \frac{1}{\left| a_n - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|a_n|}{n+1} \right|} \cdot \left| \frac{1}{x^n} \right| = \\ &= \frac{n+1}{|a_n|} \cdot \frac{1}{x^n} \end{aligned}$$

3. Aufgabe

$$\text{Sei } P(x) = 4 \cdot x^3 - 12 \cdot x^2 + 7 \cdot x - 1000,$$

$$Q(x) = 2 \cdot x^5 + 14 \cdot x^4 + 4 \cdot x^3 - 12 \cdot x^2 + 7 \cdot x - 1000.$$

a. Zeigen Sie: $\frac{P(x)}{Q(x)} = O\left(\frac{1}{x^2}\right).$

Wegen Aufgaben 1 und 2 weiß man: Es gibt $\xi_1, c_1 > 0$ und $\xi_2, c_2 > 0$ so, dass

(i) Für alle $x > \xi_1$ gilt: $|P(x)| < c_1 \cdot x^3$

(ii) Für alle $x > \xi_2$ gilt: $\left| \frac{1}{Q(x)} \right| < c_2 \cdot \frac{1}{x^5}$

Sei nun $\xi = \max(\xi_1, \xi_2)$ und $c = c_1 \cdot c_2$. Dann folgt:

$$\text{Für alle } x > \xi \text{ gilt: } \left| \frac{P(x)}{Q(x)} \right| < c \cdot \frac{x^3}{x^5} = c \cdot \frac{1}{x^2}$$

b. Zeigen Sie: $\frac{Q(x)}{P(x)} = O(x^2).$

Die Bearbeitung erfolgt völlig analog zu Aufgabe 3 a)

4. Aufgabe

$$\text{Sei } P(x) = a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0,$$

$$Q(x) = a_7 \cdot x^7 + a_6 \cdot x^6 + a_5 \cdot x^5 + a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0.$$

a. Zeigen Sie: $\frac{P(x)}{Q(x)} = O\left(\frac{1}{x^4}\right).$

Die Bearbeitung erfolgt völlig analog zu Aufgabe 3 a)

b. Zeigen Sie: $\frac{Q(x)}{P(x)} = O(x^4).$

Die Bearbeitung erfolgt völlig analog zu Aufgabe 3 a)

5. Aufgabe

Sei $P(x)$ ein Polynom vom Grad m und $Q(x)$ ein Polynom vom Grad n .

Zeigen Sie: $\frac{P(x)}{Q(x)} = O(x^{m-n}).$

Die Bearbeitung erfolgt völlig analog zu Aufgabe 3 a)

6. Aufgabe

Im Anhang zur Analysis in diesem Buch können Sie nachlesen, dass für beliebige $a > 0$ gilt:

$$a^x = e^{x \cdot \log(a)}$$

Entscheiden Sie mit Hilfe dieser Beziehung, ob die folgenden Aussagen korrekt sind – Gegebenenfalls geben Sie ein Gegenbeispiel bzw. argumentieren mit einem der Sätze dieses Kapitels.

- a. Für alle $a \in \mathbf{R}$ gilt: $f(x) = a^x$ wächst schneller als jedes Polynom
Das ist falsch, unter anderem deswegen, weil a^x für $a \leq 0$ durch die obige Gleichung gar nicht definiert ist.
- b. Für alle $a \in \mathbf{R}$ mit $a \neq 0$ gilt: $f(x) = a^x$ wächst schneller als jedes Polynom
Das ist falsch, unter anderem deswegen, weil a^x für $a < 0$ durch die obige Gleichung gar nicht definiert ist.
- c. Für alle $a \in \mathbf{R}$ mit $a > 0$ gilt: $f(x) = a^x$ wächst schneller als jedes Polynom
Das ist falsch, unter anderem deswegen, weil a^x für $a = 1$ die konstante Funktion 1 ist.
- d. Für alle $a \in \mathbf{R}$ mit $a > 0$, $a \neq 1$ gilt: $f(x) = a^x$ wächst schneller als jedes Polynom
Das ist falsch, weil a^x für $0 < a < 1$ für wachsende x eine fallende Funktion ist. In diesem Fall ist $\log(a)$ negativ.
- e. Für alle $a \in \mathbf{R}$ mit $a > 1$ gilt: $f(x) = a^x$ wächst schneller als jedes Polynom
Das ist richtig und wird genauso wie der entsprechende Satz für $f(x) = e^x$ bewiesen.
- f. Für alle $a \in \mathbf{R}$ gilt: $f(x) = x^a$ wächst schneller als $\log(x)$
Das ist falsch, unter anderem deswegen, weil x^a für $x > 0$ und $a = 0$ die konstante Funktion 1 ist.

- g. Für alle $a \in \mathbf{R}$ mit $a \neq 0$ gilt: $f(x) = x^a$ wächst schneller als $\log(x)$
 Das ist falsch, unter anderem deswegen, weil x^a für $x > 0$ und $a < 0$ eine fallende Funktion ist.
- h. Für alle $a \in \mathbf{R}$ mit $a > 0$ gilt: $f(x) = x^a$ wächst schneller als $\log(x)$
 Das ist richtig und wurde in Satz 20.1 formuliert.

7. Aufgabe

Es gibt die verschiedensten Algorithmen zum Sortieren von Listen mit n Elementen. Sie werden Sie in der entsprechenden Vorlesung lernen bzw. haben sie schon gelernt.

- a. Einer dieser Algorithmen, der so genannte Bubble Sort, ist von der Größenordnung $O(n^2)$. Dagegen ist der Quicksort – ein Algorithmus, den man gerne rekursiv beschreibt und auch rekursiv programmiert, von der Größenordnung $O(n \cdot \log(n))$. Machen Sie sich an Hand der Zahlenbeispiele $n = 100\,000$ (die Einwohnerliste einer Kleinstadt) und $n = 10\,000\,000$ (die Einwohnerliste einer Metropole) klar, was dieser Unterschied zahlenmäßig bedeutet. Veranschlagen Sie beispielsweise für einen Rechenschritt 1 Millisekunde und rechnen Sie diesen Unterschied in Zeit um.

$$n = 100000 = 10^5:$$

$$\begin{aligned} \text{Es ist } 10^5 \cdot \log(10^5) &= 5 \cdot 10^5 \cdot \log(10) \approx 1151292,55 \approx 1151 \text{ Sekunden} \approx \\ &\approx 19 \text{ Minuten.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Es ist } 10^5 \cdot 10^5 &= 10^{10} = 10^7 \text{ Sekunden} \approx 166667 \text{ Minuten} \approx 2778 \text{ Stunden} \\ &\approx 115,74 \text{ Tage} \approx \text{fast 4 Monate} \end{aligned}$$

$$n = 10000000 = 10^7:$$

$$\begin{aligned} \text{Es ist } 10^7 \cdot \log(10^7) &= 7 \cdot 10^7 \cdot \log(10) \approx 161180956,51 \approx 161181 \text{ Sekunden} \approx \\ &\approx 2686 \text{ Minuten} \approx 45 \text{ Stunden} \approx \text{knapp 2 Tage} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Es ist } 10^7 \cdot 10^7 &= 10^{14} = 10^{11} \text{ Sekunden} \approx 1666666667 \text{ Minuten} \\ &\approx 27777778 \text{ Stunden} \approx 1157407 \text{ Tage} \approx \text{fast 3171 Jahre} \end{aligned}$$

- b. Machen Sie dieselbe Untersuchung für einen Algorithmus, der exponentiell wächst. Genauer: Angenommen, Sie hätten einen Sortieralgorithmus für Listen mit n Elementen, der von der Größenordnung $O(e^x)$ wäre. Wie wäre dessen Laufzeitverhalten für die Zahlenbeispiele $n = 100\,000$ und $n = 10\,000\,000$ zu beschreiben?

$$n = 100000 = 10^5:$$

Wir werden sehr große Zahlen herausbekommen, ich arbeite daher nur mit Abschätzungen, die Sie aber alle an Ihrem Rechner überprüfen können.

Es ist $\log(10^{304}) = 304 \cdot \log(10) \approx 699,99$, also:

$$(i) \quad \exp(700) > 10^{304}$$

$$(ii) \quad \exp(1400) > 10^{608}$$

.....

$$\begin{aligned} (iii) \quad \exp(100000) &> \exp(98000) = \exp(140 \cdot 700) > 10^{140 \cdot 304} = 10^{42560} \\ &= 10^{42557} \text{ Sekunden} > 16 \cdot 10^{42554} \text{ Minuten} > 256 \cdot 10^{42551} \text{ Stunden} \\ &> \\ &> 1,06 \cdot 10^{42552} \text{ Tage} > 29 \cdot 10^{42548} \text{ Jahre.} \end{aligned}$$

Wenn Sie bedenken, dass das Alter des Universums seit dem Urknall auf ungefähr $13,7 \cdot 10^9$ Jahre geschätzt wird, entspräche die obige Laufzeit des Algorithmus bei 100000 Einwohnern einer Bearbeitungsdauer, die größer als das

$$2 \cdot 10^{42539} \text{ – fache der bisherigen Lebensdauer des Universums}$$

ist. Ich denke, Sie verstehen jetzt noch besser, warum Probleme, für die es nur Algorithmen mit exponentiell abschätzbarer Laufzeit gibt, als unlösbar definiert werden. Es lebe der Quicksort!

$$n = 10000000 = 10^7:$$

Es ist $\log(10^{304}) = 304 \cdot \log(10) \approx 699,99$, also:

$$(i) \quad \exp(700) > 10^{304}$$

$$(ii) \quad \exp(1400) > 10^{608}$$

.....

$$\begin{aligned} (iii) \quad \exp(10000000) &> \exp(9800000) = \exp(14000 \cdot 700) > 10^{14000 \cdot 304} \\ &= 10^{4256000} = 10^{425997} \text{ Sekunden} > 16 \cdot 10^{425994} \text{ Minuten} > \\ &> 256 \cdot 10^{425991} \text{ Stunden} > 1,06 \cdot 10^{425992} \text{ Tage} > 29 \cdot 10^{425988} \text{ Jahre.} \end{aligned}$$

Bei 10 000 000 Einwohnern hat der Algorithmus eine Laufzeit, die größer als das

$$2 \cdot 10^{425988} \text{ -- fache der bisherigen Lebensdauer des Universums}$$

ist. Da heißt es, Geduld haben.

8. Aufgabe

Die Richtigkeit der folgenden Aussagen können Sie alle auf der Basis der in diesem Kapitel gegebenen Aussagen beurteilen. Begründen Sie jeweils Ihre Antworten.

- a. Das Problem der Sortierung einer Liste mit n Elementen ist aus der Klasse NP.
Wahr, denn die Überprüfung einer Liste daraufhin, ob sie sortiert ist, ist in polynomialer Laufzeit durchführbar, sie ist vom Typ $O(n)$
- b. Prims Algorithmus ist nicht aus der Klasse NP.
Die Aussage ist ulkig. Eigentlich sind nicht Algorithmen aus der Klasse NP sondern nur Probleme. Da das Problem der Ermittlung eines minimal aufspannenden Baums und damit auch das Problem der Ermittlung des Minimalgewichts, das minimal aufspannende Bäume eines gegebenen Graphen haben müssen, aus der Klasse P ist, können auch Ergebnisse eines Algorithmus, der solche Bäume erzeugt, in polynomialer Laufzeit überprüft werden. Das Minimalgewicht ist ja in polynomialer Laufzeit ermittelbar, diese Ermittlung ist vom Typ $O(n)$.

- c. Das Problem des Handlungsreisenden ist nicht aus der Klasse NP.
Falsch, vgl. Abschnitt 20.4
- d. Ein Problem, das in der Klasse NP ist, kann nicht auch in der Klasse P sein.
Falsch, vgl. Aufgabenteil 8a, Bild 18-6 und die dazugehörigen Erläuterungen.
- e. Jedes Problem aus der Klasse P gehört auch zur Klasse NP.
Richtig, vgl. Bild 18-6 und die dazugehörigen Erläuterungen.
- f. Jedes Problem aus der Klasse NP gehört auch zur Klasse P.
Ob das wahr oder falsch ist, ist bis heute (21. Mai 2009) unbekannt.
- g. Die Richtigkeit von Aussage f) kann durch die vollständige Analyse des Problems des Handlungsreisenden mathematisch exakt entschieden werden.
Das ist wahr, denn das Problem des Handlungsreisenden ist NP-vollständig.
- h. Die Richtigkeit von Aussage f) kann durch die vollständige Analyse jedes Problems aus der Klasse NP mathematisch exakt entschieden werden.
Das ist falsch, denn nicht für jedes Problem aus der Klasse NP konnte bisher gezeigt werden, dass es auch NP-vollständig ist.
- i. Die Richtigkeit von Aussage f) kann durch die vollständige Analyse jedes Problems aus der Klasse NP, von dem man bis heute nicht klären konnte, ob es auch aus der Klasse P ist, mathematisch exakt entschieden werden.
Das ist falsch, denn nicht für jedes dieser Probleme aus der Klasse NP konnte bisher gezeigt werden, dass es auch NP-vollständig ist.
- j. Es gibt mehrere Probleme aus der Klasse NP, für die gilt: die vollständige Analyse eines einzigen dieser Probleme entscheidet die Richtigkeit von Aussage f) mathematisch exakt.
Das ist richtig, man nennt diese Probleme NP-vollständig.

9. Aufgabe

Die Aussage aus Aufgabe 8 j sei richtig. Wie nennt man dann die dort beschriebenen Probleme?

Man nennt diese Probleme NP-vollständig.