

## 1. Aufgabe

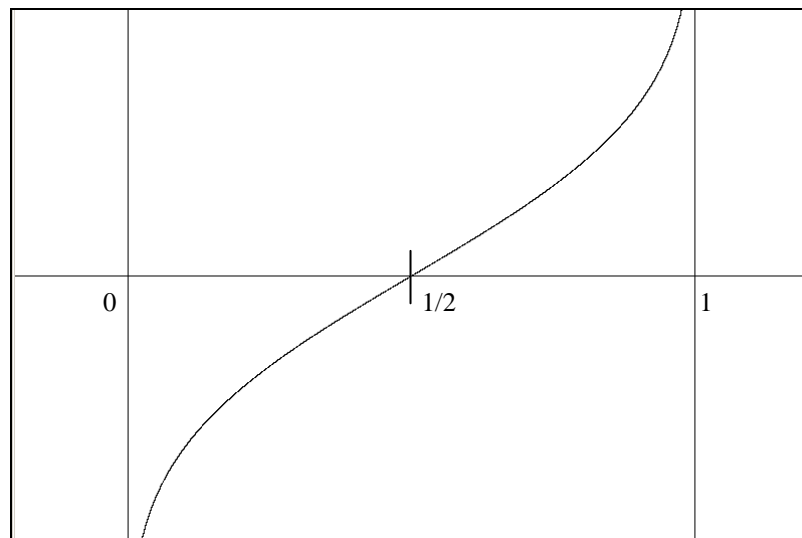
Unter welchen Umständen ist eine Normalverteilung zu erwarten?

Zufallsvariablen, die die Summe vieler einzelner, verschiedener Einflüsse sind, sind normalverteilt.

## 2. Aufgabe

Sie haben in diesem Kapitel Beispiele gesehen, wo man nicht zu einem gegebenen Wert  $x$  die Wahrscheinlichkeit  $\Phi(x)$  berechnet hat, sondern wo man sich gefragt hat: Zu welchem Wahrscheinlichkeitswert  $y$  gehört der Zufallsvariablenwert  $\Phi^{-1}(y)$ ? Weiter unten sind auch mehrere Übungsaufgaben (7 e, 8 e, 9 e, 11b, 12 b, 12 c, 12 d) zu diesem Thema.

a. Zeichnen Sie den Graph von  $\Phi^{-1}$



b. Sie wissen:  $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ . Folgern Sie daraus:

$$\text{Für alle } 0 < y < 0,5 \text{ gilt: } \Phi^{-1}(0,5 - y) = -\Phi^{-1}(0,5 + y)$$

$\Phi^{-1}$  ist nur für Werte definiert, die zwischen 0 und 1 liegen. Es ist aber:

$$0 < 0,5 - y < 1 \Leftrightarrow -0,5 < -y < 0,5 \Leftrightarrow -0,5 < y < 0,5 \text{ und}$$

$$0 < 0,5 + y < 1 \Leftrightarrow -0,5 < y < 0,5$$

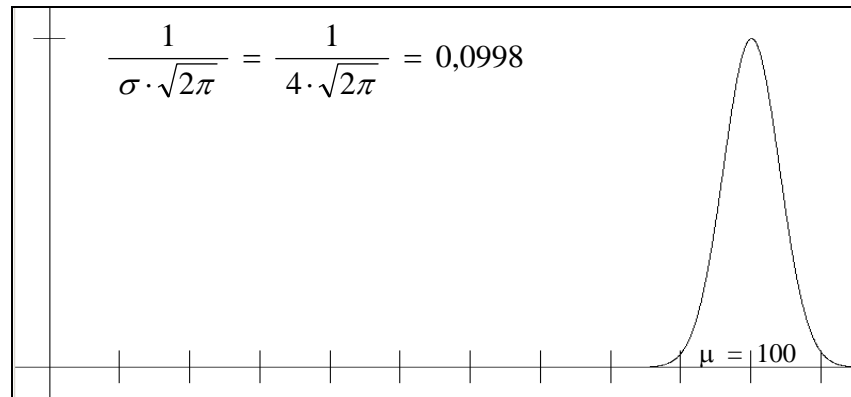
$$\text{Es gilt: } \Phi^{-1}(0,5 - y) = -\Phi^{-1}(0,5 + y) \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 0,5 - y &= \Phi(-\Phi^{-1}(0,5 + y)) = 1 - \Phi(\Phi^{-1}(0,5 + y)) = \\ &= 1 - (0,5 + y) = 0,5 - y. \end{aligned}$$

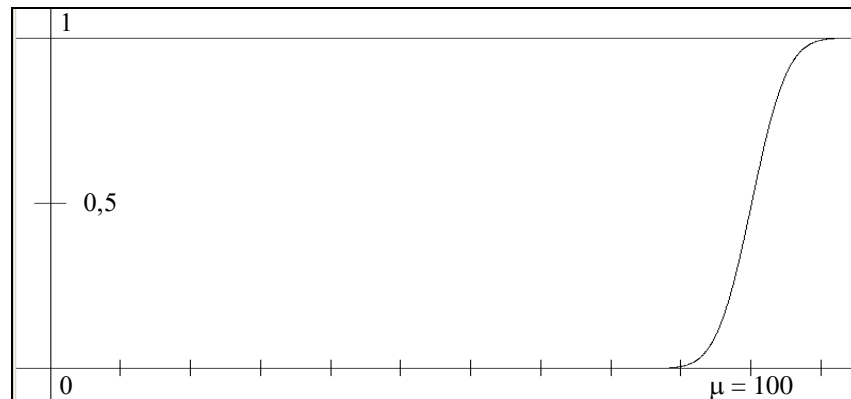
q.e.d.

**3. Aufgabe**

- a. X sei eine normal verteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert 100 und Varianz 16. Skizzieren Sie die Graphen der Dichtefunktion und der Verteilungsfunktion und geben Sie die Formeln für beide Funktionen an.



$$f(x) = \frac{1}{4 \cdot \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x - 100}{4}\right)^2\right)$$



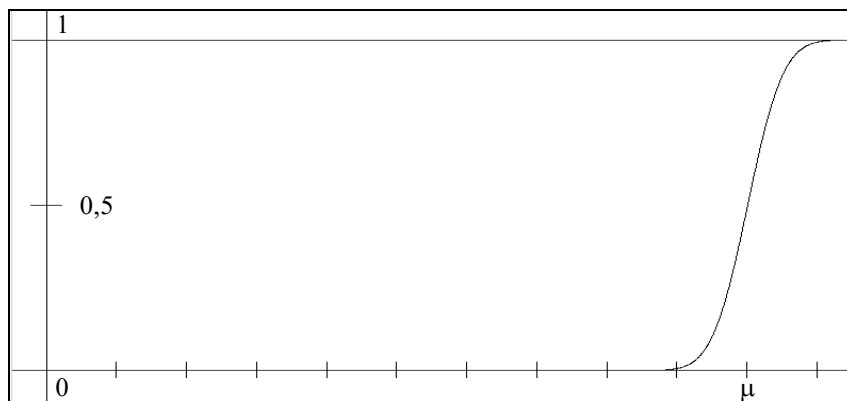
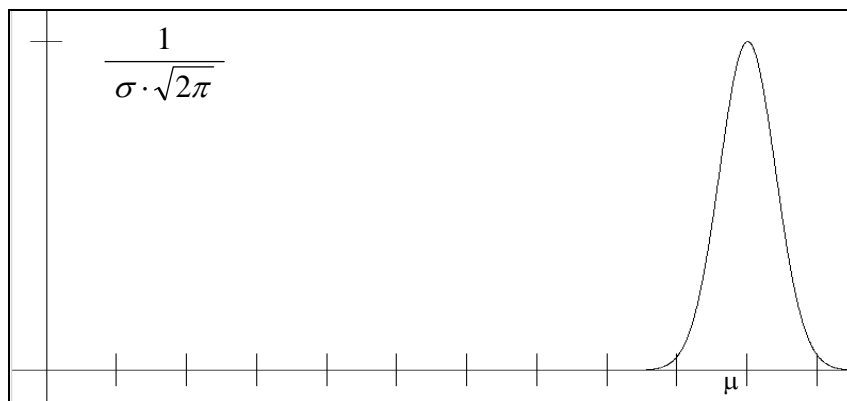
$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

- b. X sei eine normal verteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2$ . Skizzieren Sie die Graphen der Dichtefunktion und der Verteilungsfunktion und geben Sie die Formeln für beide Funktionen an.

Die Formeln lauten:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2\right), \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

Die Bilder sind die entsprechende Verallgemeinerung von Teil 3 a):



#### 4. Aufgabe

- a. Zeigen Sie: Für alle  $a \in \mathbf{R}$ ,  $a \neq 0$  und für alle  $b \in \mathbf{R}$  gilt:  
 Falls  $X$  eine normal verteilte Zufallsvariable ist, ist auch  $a \cdot X + b$  eine normal verteilte Zufallsvariable.

Hinweis: Beim exakten Beweis hilft die Substitutionsregel, vgl. Satz A1.49

$X$  ist normal verteilt, falls es  $\mu$  und  $\sigma$  gibt, sodass gilt:

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right)^2\right) dt$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned} P(a \cdot X + b \leq x) &= P(a \cdot X \leq x - b) = P\left(X \leq \frac{x - b}{a}\right) = \\ &= \int_{-\infty}^{(x-b)/a} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right)^2\right) dt = \\ &\quad \text{(Substitutionsregel)} \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{t-b}{a} - \mu}{\sigma}\right)^2\right) dt = \\ &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{a \cdot \sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t - (a \cdot \mu + b)}{a \cdot \sigma}\right)^2\right) dt \end{aligned}$$

Also ist auch  $aX + b$  normalverteilt. Die Standardabweichung ist jetzt  $a\sigma$ , der Erwartungswert ist  $a\mu + b$ .

- b.  $X$  sei normal verteilt mit Erwartungswert  $\mu$  und Standardabweichung  $\sigma$ . Es sei  $a \in \mathbf{R}$ ,  $a \neq 0$  und  $b \in \mathbf{R}$  beliebig. Was ist der Erwartungswert und die Standardabweichung von  $a \cdot X + b$ ? Gilt das immer oder nur im Falle einer Normalverteilung?

(Siehe Aufgabenteil a) Die Standardabweichung von  $aX + b$  ist  $a\sigma$ , der Erwartungswert ist  $a\mu + b$ . Diese Beziehung gilt für jede Zufallsvariable  $X$ , für die eine Dichtefunktion  $f$ , der Erwartungswert und die Standardabweichung existiert. Der Beweis ist nicht ganz einfach, wir führen ihn nur für  $a > 0$ :

Es sei  $X$  Zufallsvariable mit Dichtefunktion  $f(x)$ , also:

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) \, dt \quad \text{Dann gilt für } Y = aX + b:$$

$$P(Y \leq x) = P(X \leq (x-b)/a) = \int_{-\infty}^{(x-b)/a} f(t) \, dt = \int_{-\infty}^x \frac{1}{a} \cdot f\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$$

(wieder wegen der Substitutionsregel)

Also gilt:  $Y = aX + b$  hat  $(1/a) \cdot f((x-b)/a)$  als Dichtefunktion.

Wir erhalten als Erwartungswert für  $Y$ :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{a} \cdot f\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{t-b}{a} \cdot f\left(\frac{t-b}{a}\right) + \frac{b}{a} \cdot f\left(\frac{t-b}{a}\right) \right) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t-b}{a} \cdot f\left(\frac{t-b}{a}\right) dt + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b}{a} \cdot f\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = \\ &= a \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t-b}{a} \cdot f\left(\frac{t-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{a} dt + a \cdot \frac{b}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{t-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{a} dt = \\ &\quad \text{Substitutionsregel} \\ &= a \cdot \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t) dt + b \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = a \cdot \mu + b \cdot 1 = a \cdot \mu + b \end{aligned}$$

Nach Definition der Varianz erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} (t - (a\mu + b))^2 \cdot f\left(\frac{t-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{a} dt = \\
 &= a^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{t}{a} - \left(\mu + \frac{b}{a}\right)\right)^2 \cdot f\left(\frac{t-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{a} dt = \\
 &= a^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{t-b}{a} - \mu\right)^2 \cdot f\left(\frac{t-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{a} dt = \\
 &= a^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (t - \mu)^2 \cdot f(t) dt = a^2 \cdot \sigma^2
 \end{aligned}$$

Und es folgt: Die Standardabweichung von Y ist  $a \cdot \sigma$ .

## 5. Aufgabe

Gegeben sei eine Indexmenge I. Es seien weiter für jedes  $i \in I$  identisch verteilte Zufallsvariablen  $X_i$  gegeben. Wir definieren als neue Zufallsvariable die Summe  $S = \sum_{i \in I} X_i$ . Welche Bedingung müssen die  $X_i$  zusätzlich erfüllen, damit S bei größer werdender Indexmenge I durch eine Normalverteilung angenähert werden kann?

Die  $X_i$  müssen stochastisch unabhängig sein und alle den gleichen Erwartungswert und die gleiche Varianz besitzen.

## 6. Aufgabe

Es seien  $X$  und  $Y$  zwei normal verteilte und voneinander unabhängige Zufallsvariable.

- a. Ist  $X + Y$  wieder normal verteilt?

Ja

- b.  $X$  habe den Erwartungswert  $\mu_X = 3$  und die Standardabweichung  $\sigma_X = 3$ ,  $Y$  habe den Erwartungswert  $\mu_Y = -4$  und die Standardabweichung  $\sigma_Y = 4$ . Was ist die Dichtefunktion, die Verteilung, der Erwartungswert und die Standardabweichung von  $X + Y$ ?

Es ist  $\mu_{X+Y} = \mu_X + \mu_Y = 3 - 4 = -1$ .

Es ist  $(\sigma_{X+Y})^2 = (\sigma_X)^2 + (\sigma_Y)^2 = 9 + 16$ , also  $\sigma_{X+Y} = 5$

Also hat  $X + Y$  die Dichtefunktion:

$$f(t) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t+1}{5}\right)^2\right) \quad \text{und die Verteilung}$$

$$\begin{aligned} P(X + Y \leq x) &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t+1}{5}\right)^2\right) dt = \\ &= \Phi\left(\frac{t+1}{5}\right) \end{aligned}$$

- c. Bearbeiten Sie nun den allgemeinen Fall:  $X$  habe den Erwartungswert  $\mu_X$  und die Standardabweichung  $\sigma_X$ ,  $Y$  habe den Erwartungswert  $\mu_Y$  und die Standardabweichung  $\sigma_Y$ . Was ist die Dichtefunktion, die Verteilung, der Erwartungswert und die Standardabweichung von  $X + Y$ ?

Es ist  $\mu_{X+Y} = \mu_X + \mu_Y$

Es ist  $(\sigma_{X+Y})^2 = (\sigma_X)^2 + (\sigma_Y)^2$ , also  $\sigma_{X+Y} = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$



Also hat  $X + Y$  die Dichtefunktion:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{t - (\mu_X + \mu_Y)}{\sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}}\right)^2\right) \quad \text{und}$$

die Verteilung

$$P(X + Y \leq x) =$$

$$= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{t - (\mu_X + \mu_Y)}{\sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}}\right)^2\right) dt =$$

$$= \Phi\left(\frac{t - (\mu_X + \mu_Y)}{\sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}}\right)$$

## 7. Aufgabe

In Deutschland beträgt der Anteil der Personen mit Blutgruppe B und negativem Rhesusfaktor 2 %. Sie wählen nun eine zufällige Stichprobe von 1000 Personen aus, die Sie auf die Anzahl der Personen mit Blutgruppe B und negativem Rhesusfaktor hin untersuchen.

- a. Welche Verteilung gehört zu der (diskreten) Zufallsvariable  $X$  = Anzahl der Personen mit Blutgruppe B und negativem Rhesusfaktor?

Es sei  $F(x) = P(X \leq x)$  die Verteilung. Dann ist:

$$F(x) = \sum_{k=0}^x \binom{1000}{k} \cdot \left(\frac{1}{50}\right)^k \cdot \left(\frac{49}{50}\right)^{1000-k} \quad \text{mit } E(X) = 1000/50 = 20 \text{ und}$$

$\text{Var}(X) = (1000/50) \cdot (49/50)$ , also

$$\sigma = \frac{10 \cdot \sqrt{10} \cdot 7}{50} = 4,43$$

- b. Finden Sie die Normalverteilung, die die diskrete Verteilung aus Aufgabe a annähert. Überprüfen Sie anhand der in diesem Kapitel formulierten Regel, dass Sie diese Annäherung wirklich verwenden können. Bearbeiten Sie die Teile von c. bis e. mit dieser Annäherung.

Die Normalverteilung, die diskrete Verteilung aus Aufgabe a annähert, lautet:

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - 20 + 0,5}{4,43}\right) = \Phi\left(\frac{x - 19,5}{4,43}\right)$$

Die Regel verlangt, dass sowohl  $n \cdot p > 5$  als auch  $n \cdot (1 - p) > 5$  sind. Diese Regel ist aber mit  $n \cdot p = 1000/50 = 20$  und  $n \cdot (1 - p) = 1000 \cdot 49/50 = 980$  deutlich erfüllt.

- c. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass in dieser Stichprobe höchstens 25 Personen Blutgruppe B mit negativem Rhesusfaktor haben?

Es ist

$$F(25) = \Phi\left(\frac{25 - 19,5}{4,43}\right) = \Phi(1,24) = 0,8925$$

- d. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass in dieser Stichprobe mindestens 17 Personen Blutgruppe B mit negativem Rhesusfaktor haben?

Diese Wahrscheinlichkeit ist

$$1 - F(16) = 1 - \Phi\left(\frac{16 - 19,5}{4,43}\right) = 1 - \Phi(-0,79) = \Phi(0,79) = 0,7852$$

- e. Welche Mindestanzahl von Personen mit Blutgruppe B und negativem Rhesusfaktor erhält man mit 95 %-iger Wahrscheinlichkeit?

Zunächst sucht man ein  $y$ , sodass gilt:

$$1 - \Phi(y) = \Phi(-y) = 0,95$$

Es folgt:  $y = -1,645$ . Dann muss also gelten:

$$\frac{x - 19,5}{4,43} = -1,645, \text{ also } x - 19,5 = -7,28735, \text{ also } x = 12,21$$

Wir erhalten: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 12 Personen Blutgruppe B und negativem Rhesusfaktor haben, beträgt 95 %.

## 8. Aufgabe

In einem bestimmten industriellen Fertigungsprozess sei die Quote fehlerhafter Bauteile konstant 3 %. Sie wählen nun eine Stichprobe von 1000 zufälligen Bauteilen aus, die Sie auf die Anzahl der fehlerhaften Bauteile hin untersuchen..

- a. Welche Verteilung gehört zu der (diskreten) Zufallsvariable  $X = \text{Anzahl der fehlerhaften Bauteile}$ ?

Es sei  $F(x) = P(X \leq x)$  die Verteilung. Dann ist:

$$F(x) = \sum_{k=0}^x \binom{1000}{k} \cdot \left(\frac{3}{100}\right)^k \cdot \left(\frac{97}{100}\right)^{1000-k} \quad \text{mit } E(X) = 3000/100 = 30$$

und  $\text{Var}(X) = (3000/100) \cdot (97/100)$ , also

$$\sigma = \frac{\sqrt{291000}}{100} = 5,39$$

- b. Finden Sie die Normalverteilung, die die diskrete Verteilung aus Aufgabe a annähert. Überprüfen Sie anhand der in diesem Kapitel formulierten Regel, dass Sie diese Annäherung wirklich verwenden können. Bearbeiten Sie die Teile von c. bis e. mit dieser Annäherung.

Die Normalverteilung, die diskrete Verteilung aus Aufgabe a annähert, lautet:

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - 30 + 0,5}{5,39}\right) = \Phi\left(\frac{x - 29,5}{5,39}\right)$$

Die Regel verlangt, dass sowohl  $n \cdot p > 5$  als auch  $n \cdot (1 - p) > 5$  sind. Diese Regel ist aber mit  $n \cdot p = 3000/100 = 30$  und  $n \cdot (1 - p) = 1000 \cdot 97/100 = 970$  deutlich erfüllt.

- c. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass in dieser Stichprobe höchstens 40 Bauteile fehlerhaft sind?

Es ist

$$F(40) = \Phi\left(\frac{40 - 29,5}{5,39}\right) = \Phi(1,95) = 0,9744$$

- d. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass in dieser Stichprobe mindestens 25 Bauteile fehlerhaft sind?

$$1 - F(24) = 1 - \Phi\left(\frac{24 - 29,5}{5,39}\right) = 1 - \Phi(-1,02) = \Phi(1,02) = 0,8461$$

- e. Unter welcher Höchstanzahl von fehlerhaften Bauteilen bleibt man mit 99 %iger Wahrscheinlichkeit?

Zunächst sucht man ein  $y$ , sodass gilt:

$$\Phi(y) = 0,99$$

Es folgt:  $y = 2,327$ . Dann muss also gelten:

$$\frac{x - 29,5}{5,39} = 2,327, \text{ also } x - 29,5 = 12,54253, \text{ also } x = 42,04$$

Wir erhalten: Ab einer Höchstzahl von 43 fehlerhaften Bauteilen beschreibt man Ereignisse, deren Wahrscheinlichkeit bei mindestens 99 % liegt.

**9. Aufgabe**

In einer physikalischen Messreihe werden Werte  $X$  gemessen, die normal verteilt sind. Dabei weiß man, dass der Erwartungswert  $\mu = 100$  Grad und die Standardabweichung  $\sigma = 10$  Grad beträgt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Messwert

- a. Höchstens 120 Grad ist?

Sei wieder  $F(x) = P(X \leq x)$  die Verteilungsfunktion. Dann ist

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - 100}{10}\right) \text{ und}$$

$$F(120) = \Phi\left(\frac{20}{10}\right) = \Phi(2) = 0,9772$$

- b. Mindestens 95 Grad ist?

$$1 - F(95) = 1 - \Phi\left(\frac{-5}{10}\right) = \Phi(0,5) = 0,6915$$

- c. Genau 103 Grad ist?

Diese Wahrscheinlichkeit ist 0.

- d. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Messwert um weniger als 15 Grad vom Erwartungswert abweicht?

$$F(115) - F(85) = \Phi(1,5) - \Phi(-1,5) = \Phi(1,5) + \Phi(1,5) - 1 = 2 \cdot 0,9332 - 1 = 0,8664$$

- e. Wieviel Grad erreicht man mindestens mit 75 %-iger Wahrscheinlichkeit?

Zunächst sucht man ein  $y$ , sodass gilt:

$$\Phi(y) = 0,75$$

Es folgt:  $y = 0,675$ . Dann muss also gelten:

$$\frac{x - 100}{10} = 0,675, \text{ also } x - 100 = 6,75, \text{ also } x = 106,75$$

Also erhält man mit 75% iger Wahrscheinlichkeit eine Temperatur, die kleiner oder gleich 106,75 Grad ist.

### 10. Aufgabe

Meine Lieblings-Teesorte wird in einem kleinen Teeladen von einer netten Verkäuferin von Hand abgefüllt. Ich kaufe immer ein Pfund, das Abfüllgewicht bei solchen Bestellungen ist normalverteilt mit dem (freundlichen) Erwartungswert  $\mu = 510$  g und der Standardabweichung  $\sigma = 10$  g. Es sei nun vom Ladeninhaber ein Toleranzbereich mit  $500 \pm 10$ g vorgegeben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt eine abgefüllte Packung außerhalb dieses Toleranzbereichs?

Es sei  $F(x)$  die Verteilungsfunktion für das Abfüllgewicht. Es ist:

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - 510}{10}\right) \text{ Die gefragte Wahrscheinlichkeit ist gerade:}$$

$$1 - F(510) + F(490) = 1 - \Phi(0) + \Phi(-2) = 0,5 + 1 - \Phi(2) = 1,5 - 0,9772 = 0,5228$$

### 11. Aufgabe

Die Lebensdauer  $X$  von Glühbirnen einer bestimmten Bauserie sei normal verteilt. Der Mittelwert  $\mu$  liege bei 1000 Stunden, die Standardabweichung  $\sigma$  sei 50 Stunden.

- a. Wie viel Prozent der Glühbirnen dieser Serie halten mindestens 900 Stunden?

Es sei  $F(x)$  die Verteilungsfunktion für die Lebensdauer. Es ist:

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - 1000}{50}\right) \text{ Die gefragte Wahrscheinlichkeit ist gerade:}$$

$$1 - F(900) = 1 - \Phi(-2) = \Phi(2) = 0,9772, \text{ d.h. } 97,72 \% \text{ halten mindestens 900 Stunden.}$$

- b. Welche Lebensdauer wird nur von 1 % aller Glühbirnen dieser Serie überschritten?

Zunächst sucht man ein  $y$ , sodass gilt:

$$1 - \Phi(y) = 0,01 \quad \text{bzw.} \quad \Phi(y) = 0,99$$

Es folgt:  $y = 2,327$ . Dann muss also gelten:

$$\frac{x - 1000}{50} = 2,327, \text{ also } x - 1000 = 116,35, \text{ also } x = 1116,35$$

Das bedeutet: Nur 1% aller Glühbirnen lebt länger als 1116,35 Stunden.

## 12. Aufgabe

Man ermittelt die Körpergrößen  $X$  von männlichen Personen eines bestimmten Jahrgangs.  $X$  ist normal verteilt. Der Erwartungswert betrage 185 cm, die Standardabweichung betrage 12 cm.

- a. Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt eine Körpergröße auf, die größer als 179 cm ist?

Es sei  $F(x)$  die Verteilungsfunktion für die Körpergröße. Es ist:

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - 185}{12}\right) \quad \text{Die gefragte Wahrscheinlichkeit ist gerade:}$$

$$1 - F(179) = 1 - \Phi(-0,5) = \Phi(0,5) = 0,6915$$

- b. Wie groß müssen Personen aus der ausgewerteten Gruppe, deren Größe mit 99 %-iger Wahrscheinlichkeit auftritt, mindestens sein?

Zunächst sucht man ein  $y$ , sodass gilt:

$$\Phi(y) = 0,99$$

Es folgt:  $y = 2,327$ . Dann muss also gelten:

$$\frac{x - 185}{12} = 2,327, \text{ also } x - 185 = 27,924, \text{ also } x = 212,924$$

Das bedeutet: Laut Normalverteilung umfassen erst Personengruppen mit einer Größe von bis zu 2 Metern und 13 cm mindestens 99 % aller Personen.

- c. Wie groß dürfen Personen aus der ausgewerteten Gruppe, deren Größe mit 10 %-iger Wahrscheinlichkeit auftritt, höchstens sein?

Zunächst sucht man ein  $y$ , sodass gilt:

$$\Phi(y) = 0,1 \text{ bzw. } \Phi(-y) = 0,9$$

Es folgt:  $y = -1,281$ . Dann muss also gelten:

$$\frac{x - 185}{12} = -1,281, \text{ also } x - 185 = -15,372, \text{ also } x = 169,628$$

Das bedeutet: Laut Normalverteilung umfassen Personengruppen mit einer Größe von höchstens 1 Metern und 69 cm 10 % aller Personen.

- d. Geben Sie einen symmetrischen Bereich  $185 \pm x$  cm um den Erwartungswert herum an, den man mit 80 %-iger Wahrscheinlichkeit erhält.

Sei  $F$  unsere Verteilungsfunktion. Dann suchen wir ein  $x$ , sodass gilt:

$$F(185 + x) - F(185 - x) = 0,8. \text{ Wir erhalten für } x:$$

$$\Phi\left(\frac{x}{12}\right) - \Phi\left(-\frac{x}{12}\right) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{x}{12}\right) - 1 = 0,8 \quad \text{bzw.}$$

$$\Phi\left(\frac{x}{12}\right) = 0,9 \text{ bzw. } \frac{x}{12} = 1,281 \text{ bzw. } x = 15,372$$

Das bedeutet: 80% aller Personen liegen in einem Bereich zwischen 169 cm und 201 cm.