

Mengenlehre gibt es seit den achtziger Jahren des 19. Jahrhunderts. Sie wurde von Georg Cantor begründet. Der Begriffsapparat der Mengenlehre hat sich als so nützlich für die Formulierung von Aussagen in den verschiedensten mathematischen Gebieten erwiesen, dass er sich überall durchgesetzt hat. Für den Informatiker sind Mengen und Teilmengen u.a. im Zusammenhang mit den richtigen Beschreibungen der Wertebereiche für Variable in Programmen und für Attribute in Datensätzen von großer Bedeutung.

2.1 Grundlegende Definitionen

Wir beginnen mit einer Definition des Begriffes Menge, die noch von Cantor stammt:

Definition:

Jede Zusammenfassung von bestimmten, wohl unterschiedenen Objekten zu einem Ganzen wird *Menge* genannt. Die so zusammengefassten Objekte heißen *Elemente* der Menge.

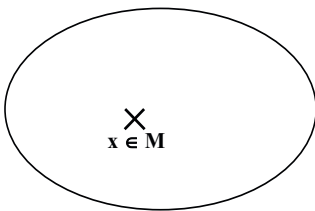


Bild 2-1: Element einer Menge

Beispiele:

- $\{0, 3, 6, 8\}$
- $\{-10, 0.5, \text{alle Staaten Lateinamerikas}\}$
- Die Menge aller natürlichen Zahlen, die keine Primzahlen sind.
- Die Menge aller Brüche, die > 45 sind.

Man schreibt, falls x aus der Menge M ist: $x \in M$ und sagt: x ist Element der Menge M . Man stellt die letzten Beispiele auch so dar:

- $\{x \mid x \text{ ist eine natürliche Zahl, die keine Primzahl ist}\}$. Dabei bedeutet der Strich »|« : »... für die gilt...«. Genauso liest man es auch vor.
- $\{\frac{p}{q} \mid p \text{ und } q \text{ sind ganze Zahlen, } q \neq 0 \text{ und } p/q > 45\}$

- Ein weiteres wichtiges Beispiel ist die leere Menge $\{\}$, die überhaupt kein Element enthält.

Ich brauche hier in diesem Kapitel für meine Beispiele einige Mengen, die ich erst in späteren Kapiteln genauer definieren werde. Es wird für das Verständnis der Beispiele reichen, wenn wir diese Mengen zunächst folgendermaßen intuitiv charakterisieren:

- \mathbf{N} , die Menge der natürlichen Zahlen: $0, 1, 2, 3, 4, \dots$
- \mathbf{Z} , die Menge der ganzen Zahlen: $\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots$
- \mathbf{Q} , die Menge der positiven und negativen Brüche $\frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbf{Z}$ und $q \neq 0$.

Folgende Begriffe, die wir bei Formulierungen mathematischer Tatsachen immer wieder brauchen werden, müssen Sie beherrschen:

2.2 Teilmenge, Durchschnitt, Vereinigung und Differenzmenge

Das erste ist der Begriff der Teilmenge:

Definition:

Die Menge A ist *Teilmenge* der Menge B genau dann, wenn jedes Element aus A auch Element von B ist.

Man schreibt formal: $A \subseteq B \leftrightarrow \forall_x x \in A \rightarrow x \in B$.

Falls es Elemente in B gibt, die nicht zu A gehören, heißt A *echte Teilmenge* von B .

Man schreibt formal: $A \subset B \leftrightarrow A \neq B \wedge \forall_x x \in A \rightarrow x \in B$.

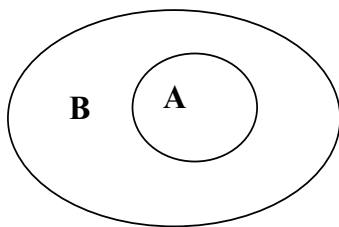


Bild 2-2: Die Teilmengebeziehung

Beispiele:

- Die Menge der geraden positiven Zahlen ist Teilmenge der Menge der natürlichen Zahlen.
- Sei M eine beliebige Menge, dann gilt: $\{\} \subseteq M$. Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge. Warum ist das so? Argumentieren Sie mit der Definition der Teilmengebeziehung und den Wahrheitswerten einer Implikation.

Als nächstes benötigen Sie den Begriff des Durchschnitts zweier Mengen:

Definition:

Der *Durchschnitt* der beiden Mengen A und B ist die Menge aller Elemente x, für die gilt: $x \in A$ und $x \in B$.

Man schreibt formal: $x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$.

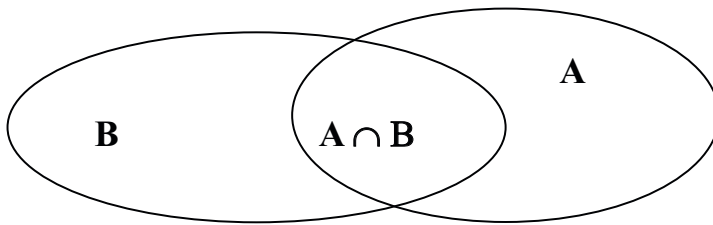


Bild 2-3: Der Durchschnitt

Beispiele:

- Der Durchschnitt der Menge der geraden Zahlen und der Menge der ungeraden Zahlen ist die leere Menge.
- Sei $A = \{ n \mid n \text{ ist natürliche Zahl und } n > 10 \}$ und sei $B = \{ n \mid n \text{ ist natürliche Zahl und } n < 15 \}$. Dann ist $A \cap B = \{ 11, 12, 13, 14 \}$.
- Der Durchschnitt der Menge der geraden Zahlen und der Menge der ganzen Zahlen ist die Menge der geraden Zahlen.

Das letzte Beispiel verdeutlicht einen allgemeinen Sachverhalt:

Satz 2.1

Seien A und B beliebige Mengen. Dann gilt: $A \subseteq B \leftrightarrow A \cap B = A$.



Beweis:

Der Beweis ist sehr, sehr einfach, wir führen ihn trotzdem, weil ich Ihnen bei dieser Gelegenheit wieder etwas über Beweistechniken erzählen kann.

1. Wir müssen eine Äquivalenz \leftrightarrow zeigen. Das macht man im Allgemeinen so, dass man erst die eine Richtung \rightarrow und dann die andere Richtung \leftarrow zeigt.
2. Wir werden die Gleichheit zweier Mengen M_1 und M_2 zeigen müssen. Auch das zeigt man in zwei Schritten:
 1. Man zeigt: $M_1 \subseteq M_2$
 2. Man zeigt: $M_2 \subseteq M_1$
 Aus diesen beiden Teilschritten folgert man dann: $M_1 = M_2$.

Erster Schritt: $A \subseteq B \rightarrow A \cap B = A$

Erster Schritt, erster Teil: $A \subseteq B \rightarrow A \cap B \subseteq A$

Da für beliebige Mengen A und B stets gilt: $A \cap B \subseteq A$, ist dieser Teil trivialerweise wahr.

Erster Schritt, zweiter Teil: $A \subseteq B \rightarrow A \subseteq A \cap B$

Dieser Teil ist nicht ganz so selbstverständlich. Aber wir können folgern:

$x \in A \rightarrow x \in B$ (da ja $A \subseteq B$ vorausgesetzt war) $\rightarrow x \in A \cap B$

und der zweite Teil des ersten Schritts ist bewiesen.

Damit ist der erste Schritt vollständig erledigt und wir wissen: $A \subseteq B \rightarrow A \cap B = A$

Zweiter Schritt: $A \cap B = A \rightarrow A \subseteq B$

Sei x beliebig, $x \in A$. Aus $A \cap B = A$ folgt $x \in A \cap B$, also $x \in B$.

q. e. d.

Des Weiteren brauchen Sie den Begriff der Vereinigung zweier Mengen:

Definition:

Die *Vereinigung* der beiden Mengen A und B ist die Menge aller Elemente x, für die gilt: $x \in A$ oder $x \in B$.

Man schreibt formal: $x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B$.

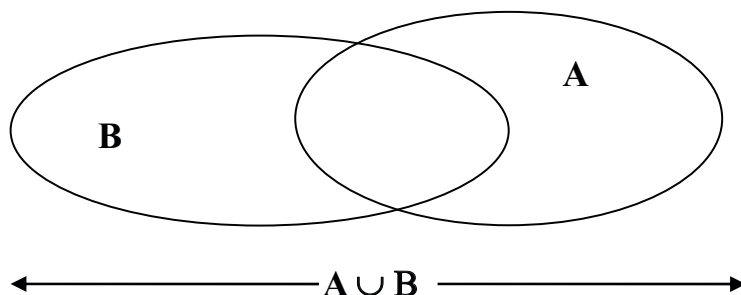


Bild 2-4: Die Vereinigung

Sie sehen bei diesen Definitionen, wie die Schreibweise für das logische »und« mit dem Symbol für den Durchschnitt zweier Mengen und die Schreibweise für das logische »oder« mit dem Symbol für die Vereinigung zweier Mengen korrespondiert. Diese Korrespondenz hat auch eine wichtige inhaltliche Bedeutung, wie Sie insbesondere im Abschnitt 2.3 sehr gut sehen können.

Beispiele:

- Die Vereinigung der Menge der nicht negativen, geraden Zahlen und der Menge der ungeraden Zahlen ist die Menge der natürlichen Zahlen.
- Sei $A = \{ n \mid n \text{ ist natürliche Zahl und } n > 10 \}$ und sei $B = \{ n \mid n \text{ ist natürliche Zahl und } n < 15 \}$. Dann ist $A \cup B =$ die Menge der natürlichen Zahlen.
- Sei $A = \{ 1, 3, 5, 6, 7 \}$ und sei $B = \{ 3, 4, 6, 9, 12 \}$. Dann ist $A \cup B = \{ 1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 12 \}$.

Es gilt allgemein:

Satz 2.2

Seien A und B beliebige Mengen. Dann gilt: $A \subseteq B \leftrightarrow A \cup B = B$

**Beweis:**

Erster Schritt: $A \subseteq B \rightarrow A \cup B = B$

Erster Schritt, erster Teil: $A \subseteq B \rightarrow A \cup B \subseteq B$

Sei $x \in A \cup B$ beliebig $\rightarrow x \in A \vee x \in B$. Falls aber $x \in A$ gilt, folgt aus $A \subseteq B$ auch, dass dieses $x \in B$ ist. Also gilt: $x \in A \cup B \rightarrow x \in B$, also $A \cup B \subseteq B$.

Erster Schritt, zweiter Teil: $A \subseteq B \rightarrow B \subseteq A \cup B$

Da für beliebige Mengen A und B stets gilt: $B \subseteq A \cup B$, ist dieser Teil trivialerweise wahr.

Zweiter Schritt: $A \cup B = B \rightarrow A \subseteq B$

Sei x beliebig, $x \in A$. Da offensichtlich $A \subseteq A \cup B$ ist, folgt: $x \in A \cup B$. Und mit $A \cup B = B$ gilt $x \in B$. Also: $x \in A \rightarrow x \in B$, also $A \subseteq B$.

q. e. d.

Der letzte Begriff dieses Abschnitts ist der Begriff der Differenzmenge:

Definition:

Die *Differenzmenge* $A \setminus B$ der beiden Mengen A und B ist die Menge aller Elemente x , für die gilt: $x \in A$ und $x \notin B$.
Man schreibt formal: $x \in A \setminus B \leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$.

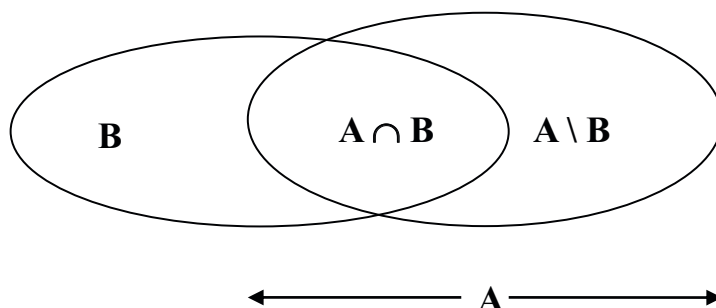


Bild 2-5: Die Differenzmenge

Beispiele:

- Sei A die Menge der natürlichen Zahlen und B die Menge der geraden Zahlen, dann ist $A \setminus B$ die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen.
- Sei $A = \{ n \mid n \text{ ist natürliche Zahl und } n > 10 \}$ und sei $B = \{ n \mid n \text{ ist natürliche Zahl und } n < 15 \}$. Dann ist $A \setminus B = \{ n \mid n \text{ ist natürliche Zahl und } n \geq 15 \}$.
- Sei $A = \{ 1, 3, 5, 6, 7 \}$ und sei $B = \{ 3, 4, 6, 9, 12 \}$. Dann ist $A \setminus B = \{ 1, 5, 7 \}$.

2.3 Einige Eigenschaften der Operatoren \cup und \cap

Völlig analog zu den im ersten Kapitel besprochenen Eigenschaften der Operatoren \vee und \wedge gilt für die Operatoren \cup und \cap :

**Satz 2.3**

Seien M_1, M_2 und M_3 drei beliebige Mengen. Dann gilt:

- a. $M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1$ (Kommutativgesetz für die Vereinigung)
- b. $(M_1 \cup M_2) \cup M_3 = M_1 \cup (M_2 \cup M_3)$ (Assoziativgesetz für die Vereinigung)
- c. $M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$ (Kommutativgesetz für den Durchschnitt)
- d. $(M_1 \cap M_2) \cap M_3 = M_1 \cap (M_2 \cap M_3)$ (Assoziativgesetz für den Durchschnitt)
- e. $M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$ (Erstes Distributivgesetz)
- f. $M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$ (Zweites Distributivgesetz)

Beweis:

Alle diese Eigenschaften folgen unmittelbar aus den entsprechenden Eigenschaften für die logischen Operatoren \vee und \wedge . Ich zeige Ihnen nur für die Behauptung f), also für das Zweite Distributivgesetz, wie man hier argumentiert. Alle anderen Behauptungen zeigt man völlig analog. Also zu f.):

$$\begin{aligned}
x &\in M_1 \cup (M_2 \cap M_3) && \leftrightarrow \\
x &\in M_1 \vee x \in (M_2 \cap M_3) && \leftrightarrow \\
x &\in M_1 \vee (x \in M_2 \wedge x \in M_3) && \leftrightarrow \text{ (wegen Satz 1.12) } \\
(x \in M_1 \vee x \in M_2) \wedge (x \in M_1 \vee x \in M_3) &&& \leftrightarrow \\
x &\in (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3) && \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

Wieder gilt die allgemeine *Regel*:

Der Operator \cap bindet enger als der Operator \cup . Das bedeutet beispielsweise:
 $A \cap B \cup C = (A \cap B) \cup C$.

2.4 Kreuzprodukte und Relationen

Ein weiterer wichtiger Begriff ist das kartesische Produkt von Mengen, auch Kreuzprodukt genannt. Dieser Begriff ist beispielsweise in der Theorie (und Praxis) von Datenbanken von großer Bedeutung und ich zitiere dazu aus meinem Buch »Datenbanken« [Schub].

Definition:

Seien M_1 und M_2 zwei Mengen. Dann ist das *kartesische Produkt* $M_1 \times M_2$ die Menge aller Elementepaare (x_1, x_2) , für die gilt: $x_1 \in M_1$ und $x_2 \in M_2$, also $M_1 \times M_2 := \{ (x_1, x_2) \mid x_1 \in M_1 \text{ und } x_2 \in M_2 \}$.

Die Elemente von $M_1 \times M_2$ nennt man *Tupel*, genauer *Zweitupel*.

Seien M_1 , M_2 und M_3 drei Mengen.

Dann ist das *kartesische Produkt* $M_1 \times M_2 \times M_3$ die Menge aller Elementetripel (x_1, x_2, x_3) , für die gilt: $x_1 \in M_1$, $x_2 \in M_2$ und $x_3 \in M_3$, also

$M_1 \times M_2 \times M_3 := \{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 \in M_1, x_2 \in M_2 \text{ und } x_3 \in M_3 \}$.

Die Elemente von $M_1 \times M_2 \times M_3$ nennt man *Tupel*, genauer *Dreitupel*.

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n > 3$. Seien M_1, M_2, \dots, M_n n Mengen.

Dann ist das *kartesische Produkt* $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ die Menge aller Elementetupel (x_1, x_2, \dots, x_n) , für die gilt:

$x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \dots, x_n \in M_n$, also

$M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n := \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \dots, x_n \in M_n \}$.

Die Elemente von $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ nennt man *Tupel*, genauer *n-Tupel*.

Beispiele:

- $M_1 = \{1, 3, 5\}$ und
 $M_2 = \{2, 3\}$. Dann ist
 $M_1 \times M_2 = \{(1,2), (1,3), (3,2), (3,3), (5,2), (5,3)\}$.
- $M_1 = \{-3, -1, 2\}$ und
 $M_2 = \{2, 4\}$ und
 $M_3 = \{-0.75, -0.25, 2\}$. Dann ist
 $M_1 \times M_2 \times M_3 = \begin{array}{lll} (-3, 2, -0.75), & (-3, 2, -0.25), & (-3, 2, 2), \\ (-3, 4, -0.75), & (-3, 4, -0.25), & (-3, 4, 2), \\ (-1, 2, -0.75), & (-1, 2, -0.25), & (-1, 2, 2), \\ (-1, 4, -0.75), & (-1, 4, -0.25), & (-1, 4, 2), \\ (2, 2, -0.75), & (2, 2, -0.25), & (2, 2, 2), \\ (2, 4, -0.75), & (2, 4, -0.25), & (2, 4, 2) \end{array}$.
- Angenommen, wir hätten die Personen
 - Albert Einstein
 - Albert Schweitzer
 - Groucho Marx
 Es sei MengeDerVornamen = $\{\text{Albert, Groucho}\}$ und
 MengeDerNamen = $\{\text{Einstein, Schweitzer, Marx}\}$. Dann ist
 $\text{MengeDerVornamen} \times \text{MengeDerNamen} =$
 $\{(\text{Albert, Einstein}), (\text{Albert, Schweitzer}), (\text{Albert, Marx}),$
 $(\text{Groucho, Einstein}), (\text{Groucho, Schweitzer}), (\text{Groucho, Marx})\}.$

Es gibt eine interessante Formel für die Anzahl der Elemente von Kreuzprodukten endlicher Mengen. Ich gebe Ihnen dazu erst einmal die mathematische Bezeichnung für die Anzahl der Elemente einer Menge:

Definition der Mächtigkeit von Mengen (erster Teil):

Sei M eine Menge. Dann nennt man die Anzahl der Elemente von M die *Mächtigkeit* von M und schreibt dafür $|M|$.

Bemerkung: Falls M eine Menge mit unendlich vielen Elementen ist, schreiben wir zunächst dafür: $|M| = \infty$. Wir werden aber später sehen, dass es auch unter solchen Mengen verschiedene Größen gibt und wir werden uns deshalb für diese verschiedenen Arten der Unendlichkeit eigene Symbole definieren müssen.

Nun gilt der Satz:

**Satz 2.4**

Seien M_1, M_2 zwei Mengen, die jeweils endlich viele Elemente haben. Dann gilt: Die Mächtigkeit des Kreuzprodukts $M_1 \times M_2$ ist gleich dem Produkt der Mächtigkeiten von M_1 und M_2 .

Also: $|M_1 \times M_2| = |M_1| \cdot |M_2|$.

Wie Sie auch bei Betrachtung der Beispiele sehen können, erhalte ich für jedes Element aus M_1 gerade $|M_2|$ Partner für die zweite Komponente meines Zweitupels und darum gilt dieser Satz offensichtlich.

Eng mit dem Begriff des Kreuzprodukts hängt die Relation zusammen, die in der Theorie der relationalen Datenbanken die entscheidende Rolle spielt. Unser oben begonnenes Beispiel mit unseren beiden Personen soll Ihnen davon einen kleinen Eindruck geben.

Definition:

Eine *Relation* R auf den Mengen M_1, M_2, \dots, M_n ist eine Teilmenge des kartesischen Produktes $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$, also $R \subseteq M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$.

Beispiel:

- Sei \mathbb{N} die Menge der natürlichen Zahlen und \mathbb{Z} die Menge der ganzen Zahlen. Es sei $R_7 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ folgendermaßen definiert:

$$R_7 = \{ (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists_{d \in \mathbb{Z}} a - b = d \cdot 7 \}$$
 Dann ist R_7 eine Relation.

Beispiele dieser Art brauchen wir später bei zahlentheoretischen Untersuchungen, insbesondere bei unseren Betrachtungen zu Verschlüsselungen, darum ist es nützlich, hier noch eine Vereinfachung der Notation zu verabreden.

Definition:

Falls für $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gilt: $(a, b) \in R_7$, schreibt man auch:
 $a \equiv b \pmod{7}$.

Beispielsweise gilt für 17:

$17 \equiv 3 \pmod{7}$, $17 \equiv 10 \pmod{7}$, $17 \equiv 17 \pmod{7}$, $17 \equiv 24 \pmod{7}$ usw.

Sei $[17]_7 = \{ b \in \mathbb{N} \mid b \equiv 17 \pmod{7} \}$, dann gilt:

$[17]_7 = \{ 17 + d \cdot 7 \mid d \in \mathbb{Z} \}$.

Was wir für die 7 gemacht haben, können wir natürlich auch für andere Zahlen machen:

- Sei $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ beliebig. Es sei $R_q \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ folgendermaßen definiert:

$$R_q = \{ (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists_{d \in \mathbb{Z}} a - b = d \cdot q \}$$
 Dann ist R_q eine Relation.

Definition:

Falls für $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gilt: $(a, b) \in R_q$, schreibt man auch: $a \equiv b \pmod{q}$
 Man nennt *mod* die *Modulo-Funktion*.

Sei $0 \leq x < q$ und sei $[x]_q = \{ b \in \mathbb{N} \mid b \equiv x \pmod{q} \}$, dann gilt:
 $[x]_q = \{ x + d \cdot q \mid d \geq 0 \}$.

Unser vorläufig letztes Beispiel für eine Relation ist näher am Konzept der Datenbanken:

- Es sei die Relation $P \subseteq \text{MengeDerVornamen} \times \text{MengeDerNamen}$
 $= \{ \text{Albert, Groucho} \} \times \{ \text{Einstein, Schweitzer, Marx} \}$

folgendermaßen definiert:

$P = \{ (v, n) \in \text{MengeDerVornamen} \times \text{MengeDerNamen} \mid$

Es gibt eine Person mit Vornamen v und Nachnamen n $\}$.

Dann ist $P = \{ (\text{Albert, Einstein}), (\text{Albert, Schweitzer}), (\text{Groucho, Marx}) \}$.

Eine genauere Untersuchung von Relationen erfolgt im sechsten Kapitel.

2.5 Abbildungen

In gewisser Weise sind Abbildungen eine spezielle Sorte von Relationen und sie spielen auch eine enorm wichtige Rolle bei allen Arten von Datenbanken, nicht etwa »nur« bei relationalen Datenbanken. Wie immer beginnen wir mit einer Definition:

Definition:

Es seien A und B zwei nicht-leere Mengen. Eine Zuordnungsvorschrift f :

$A \rightarrow B$ mit $x \mapsto f(x)$ (sprich: f von A nach B mit x wird abgebildet auf $f(x)$),

die jedem $x \in A$ genau ein Element aus B zuordnet, heißt *Abbildung* oder

Funktion. $f(x)$ heißt der *Funktionswert* oder das *Bild* von x , x heißt ein

Urbild von $f(x)$.

Die Menge A heißt der *Definitionsbereich* von f , B heißt der *Bildbereich* von f .

Beispiele:

- $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ mit $f(x) = 2x + 3$
- $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ mit $f(x) = 2x + 3$
- $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $f(x) = x^2$
- $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ mit $f(x) = x^3$

Ehe wir weitermachen, möchte ich erst meine einleitenden Bemerkungen erläutern.

1. Eine Funktion $f: A \rightarrow B$ ist eine (spezielle) Relation.

Erklärung: Betrachten Sie die Menge $F = \{ (x, f(x)) \mid x \in A \}$. Es ist $F \subseteq A \times B$ eine Relation, die die zusätzliche Eigenschaft hat, dass die erste Komponente die zweite Komponente eindeutig kennzeichnet.

2. Funktionen spielen eine wichtige Rolle bei Datenbanken aller Art.

Erklärung 1: Jede Datenbank, jede Tabelle, jede Relation in einer Datenbank hat mindestens ein Attribut oder eine Attributkombination, die jeden Datensatz eindeutig kennzeichnet. Ein derartiges Attribut bzw. eine derartige Attributkombination nennt man Schlüssel einer Datenbank. Wir haben dann eine Abbildung

K : Menge der Schlüssel \rightarrow Menge der Kombinationen aller anderen Attributwerte

Solche Abbildungen (aber natürlich nicht nur diese) stellt man gerne in Tabellen dar. Unser obiges kleines Beispiel würde – mit einem Schlüssel ausgestattet – etwa lauten:

Schlüssel	Name	Vorname
32	Schweitzer	Albert
6	Marx	Karl
17	Einstein	Albert

Erklärung 2: Allgemein spielt die Untersuchung von Datenstrukturen auf das Vorhandensein von Funktionen, man spricht von *Funktionalen Abhängigkeiten*, eine große Rolle in der Theorie der Datenbanken.

Die folgenden Eigenschaften von Abbildungen werden uns immer wieder beschäftigen – sowohl bei unseren rein mathematischen Untersuchungen als auch bei der Charakterisierung von Schlüsseln oder Indizes in Datenbanken:

Definition:

Es sei $f: A \rightarrow B$ eine Abbildung.

1. Falls nie zwei (oder mehr) verschiedene x -Werte auf einen gemeinsamen y -Wert abgebildet werden, falls also gilt:

$$\forall_{x_1, x_2 \in A} \quad x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

bzw. falls gilt:

$$\forall_{x_1, x_2 \in A} \quad f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$$

heißt die Abbildung *injektiv*.

2. Falls jedes Element y aus der Menge B ein Bild $f(x)$ eines Elementes x aus A ist, falls also gilt:

$$\forall_{y \in B} \quad \exists_{x \in A} \quad y = f(x)$$

heißt die Abbildung *surjektiv*.

3. Falls f injektiv und surjektiv ist, heißt f *bijektiv*.

Lassen Sie uns dazu noch einmal unsere *Beispiele* von eben ansehen:

- $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ mit $f(x) = 2x + 3$

Behauptung: f ist injektiv.

Beweis: $f(x_1) = f(x_2) \rightarrow 2x_1 + 3 = 2x_2 + 3 \rightarrow 2x_1 = 2x_2 \rightarrow x_1 = x_2$

Behauptung: f ist nicht surjektiv.

Beweis: Zu zeigen ist:

$$\exists_{y \in \mathbf{Z}} \forall_{x \in \mathbf{Z}} y \neq 2x + 3$$

Das zeigen wir mit Hilfe eines Beweises durch Widerspruch:

Sei $y \in \mathbf{Z}$, $y = 8$ und sei $x \in \mathbf{Z}$ so, dass $2x + 3 = 8$, es folgt

$$2x = 5 \text{ bzw. } = \frac{5}{2} \text{ im Widerspruch zu } x \in \mathbf{Z}.$$

- $f: \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}$ mit $f(x) = 2x + 3$

Behauptung: f ist injektiv.

Beweis: exakt wie eben.

Behauptung: f ist surjektiv.

Beweis: Diesmal ist zu zeigen:

$$\forall_{y \in \mathbf{Q}} \exists_{x \in \mathbf{Q}} y = 2x + 3$$

Sei also $y \in \mathbf{Q}$. Dann setze $x = \frac{y-3}{2}$.

Dann gilt: $x \in \mathbf{Q}$ und

$$f(x) = 2 \cdot \frac{y-3}{2} + 3 = y.$$

Also gilt: $f: \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}$ mit $f(x) = 2x + 3$ ist bijektiv.

- $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{N}$ mit $f(x) = x^2$

Behauptung: f ist nicht injektiv.

Beweis: Zu zeigen ist:

Es gibt in \mathbf{Z} zwei verschiedene x -Werte, die auf denselben y -Wert abgebildet werden, also:

$$\exists_{x_1, x_2 \in \mathbf{Z}} f(x_1) = f(x_2) \wedge x_1 \neq x_2$$

Setze beispielsweise $x_1 = 3$ und $x_2 = -3$. Dann ist

$$f(x_1) = 3^2 = 9 = (-3)^2 = f(x_2).$$

Behauptung: f ist nicht surjektiv.

Beweis: Sei $y \in \mathbf{N}$, $y = 2$. Dann gilt für alle $x \in \mathbf{Z}$: $x^2 \neq 2$.

- Genauso können Sie zeigen:

$f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ mit $f(x) = x^3$ ist injektiv, aber nicht surjektiv.

Offensichtlich gilt:



Satz 2.5

Seien A und B zwei Mengen mit endlich vielen Elementen. Dann haben A und B die gleiche Mächtigkeit genau dann, wenn es eine bijektive Abbildung $f: A \rightarrow B$ gibt.

Diese für endliche Mengen offensichtliche Tatsache benutzt man, um die Definition der Mächtigkeit von Mengen mit unendlichen vielen Mengen genauer beschreiben zu können:

Definition der Mächtigkeit von Mengen (vollständige Version):

Sei M eine Menge.

- Falls M endlich viele Elemente hat, nennt man die Anzahl der Elemente von M die *Mächtigkeit* von M und schreibt dafür $|M|$.
- Zwei Mengen M und N mit *unendlich vielen Elementen* heißen *gleich mächtig* genau dann, wenn es eine Bijektion $\varphi: M \rightarrow N$ gibt.

Diese Definition klingt hoffentlich einleuchtend, aber sie hat trotzdem einige Konsequenzen, die Ihren intuitiven Vorstellungen von »gleich mächtig« im Sinne von »gleich groß« widersprechen.

Beispiel:

- Sei wie immer \mathbb{N} die Menge der natürlichen Zahlen: $0, 1, 2, 3, 4, \dots$ und sei \mathbb{G} die Menge der geraden natürlichen Zahlen. Das sind die Zahlen, die ohne Rest durch 2 teilbar sind. Dann gilt einerseits: $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{N}$, aber es gibt Zahlen n , für die gilt: $n \in \mathbb{N}$, aber $n \notin \mathbb{G}$. Die Zahl 3 ist so ein Wert. \mathbb{G} ist also echte Teilmenge von \mathbb{N} . Aber es gilt andererseits: \mathbb{N} und \mathbb{G} sind gleich mächtig, denn $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{G}$ mit $\varphi(x) = 2 \cdot x$ ist eine Bijektion.

Es bleibt die interessante *Frage*, die wir erst im Kapitel über die reellen Zahlen werden klären können:

- Gibt es überhaupt unendlich große Mengen von unterschiedlicher Mächtigkeit?

Zuletzt will ich noch den Begriff der Potenzmenge erläutern:

2.6 Die Potenzmenge

Definition:

Sei A eine Menge. Dann ist die *Potenzmenge* $P(A)$ die Menge aller Teilmengen von A . Also :

$$B \in P(A) \leftrightarrow B \subseteq A$$

Beispiele:

- Sei $A = \{1, 5, 7\}$, dann ist
 $P(A) = \{ \{ \}, \{1\}, \{5\}, \{7\}, \{1, 5\}, \{1, 7\}, \{5, 7\}, \{1, 5, 7\} \}.$

Mit dem Übergang von einer Menge mit endlich vielen Elementen zu ihrer Potenzmenge erhält man offensichtlich stets eine Menge mit größerer Mächtigkeit. Das ist klar bei endlichen Mengen, stimmt aber auch bei unendlich großen Mengen. Hier ist es bloß nicht so

offensichtlich. Betrachten Sie zum Schluss noch einmal die Definition der Menge – Sie scheint harmlos, aber sie führt zu Antinomien, auf Deutsch: zu Widersprüchen. Betrachten Sie das folgende Beispiel:

- Sei M_R die Menge aller in diesem Buch vorkommenden Beispiele für mathematisch definierte Begriffe.

M_R hat eine merkwürdige Eigenschaft: M_R enthält sich selber als Element, nicht etwa nur als Teilmenge. Es gilt: $M_R \in M_R$.

Das war bei allen anderen Mengen, die wir bisher betrachtet haben, nicht der Fall.

Für sie galt: Sie enthalten sich nicht selber als Element.

- Sei nun S die Menge aller der Mengen, die sich nicht selber als Element enthalten, also $S = \{ M \mid M \text{ ist Menge und } M \notin M \}$.

Wie verhält es sich nun mit S selber? Ist S etwa auch ein Element von sich selber?

Gilt also: $S \in S$? Lassen Sie uns die Konsequenzen überdenken:

$S \in S \rightarrow S$ ist eine Menge, die sich nicht selber als Element enthält $\rightarrow S \notin S$.

Andererseits gilt:

$S \notin S \rightarrow S$ ist eine Menge, die sich nicht selber enthält $\rightarrow S$ muss also zu der Menge aller der Mengen gehören, die sich nicht selber enthalten $\rightarrow S \in S$.

Wir haben also gerade bewiesen:

$S \in S \leftrightarrow S \notin S$.

Das ist eine der Antinomien, die von Bertrand Russell, einem großartigen englischen Mathematiker, Philosophen, Sozialwissenschaftler und Politiker, 1901 entdeckt wurden. Sie haben die scheinbare Sicherheit, in der man sich beim Gebrauch der mengentheoretischen Begriffe wähnte, vollständig zerstört und sie haben die Mathematiker gezwungen, die axiomatische Grundlegung der Mengenlehre, insbesondere den Gebrauch von Mengen, deren Elemente wieder Mengen sind, auf eine genauere Weise zu formulieren und zu reglementieren.

Übungsaufgaben

1. Aufgabe

- Macht die folgende Beschreibung einer Menge Sinn? $M = \{ 1, 2, 2, 3, 2 \}$
- Sind die beiden folgenden Mengen gleich? $A = \{ 1, 3, 2, 7 \}$, $B = \{ 7, 2, 1, 3 \}$

2. Aufgabe

Welche Elemente enthalten die folgenden Mengen? \mathbb{N} ist die Menge der natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3, ... Falls die Menge endlich ist, geben Sie sämtliche Elemente an, Falls sie unendlich viele Elemente hat, geben Sie mindestens 5 Elemente an.

- $\{ x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist gerade} \wedge x \text{ ist Primzahl} \}$
- $\{ x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist gerade} \vee x \text{ ist Primzahl} \}$
- $\{ x \in \mathbb{N} \mid 3 \cdot x - 12 = 123 \}$

- d. $\{x \in \mathbb{N} \mid 3 \cdot x - 12 = 124\}$
- e. $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist ungerade} \wedge 2 \cdot x = 32\}$
- f. $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist Primzahl} \wedge x - 2 \text{ ist Primzahl}\}^1$

3. Aufgabe

Prüfen Sie, ob die Menge B in der Menge A enthalten ist. \mathbb{Q} ist die Menge aller Brüche (positive und negative).

- a. $A = \mathbb{Q}, B = \{1\}$
- b. $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists_{n \in \mathbb{N}} x = 4 \cdot n\}, B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist eine gerade Zahl}\}$
- c. $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist eine gerade Zahl}\}, B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists_{n \in \mathbb{N}} x = 4 \cdot n\}$
- d. $A = \mathbb{Z}, B = \{\}$
- e. $A = \{1, 2, 3\}, B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < -1\}$

4. Aufgabe

Geben Sie jeweils den Durchschnitt der Mengen A und B an:

- a. $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 5\}, B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 5\}$
- b. $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > -1\}, B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 1\}$
- c. $A = \mathbb{Q}, B = \mathbb{N}$
- d. $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 1\}, B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 5\}$

5. Aufgabe

Geben Sie die Vereinigungsmenge der Mengen A und B an.

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 1\}, B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 1\}$$

6. Aufgabe

Sei $M = \{0, 1\}$. Geben Sie alle Elemente von $M^3 = M \times M \times M$ an.

7. Aufgabe

- a. Es sei $M = \{0, 1, 2\}$. Weiter sei $R = \{(a, b) \in M \times M \mid a < b\}$. Geben Sie alle Elemente von R an.
- b. Es sei $R = \{(\text{Matthias}, \text{Carsten}), (\text{Matthias}, \text{Karim}), (\text{Martin}, \text{Matthias})\}$ eine Relation auf $M \times M$ mit $M = \{\text{Carsten}, \text{Karim}, \text{Martin}, \text{Matthias}\}$. Die Relation sei definiert durch $R = \{(a, b) \in M \times M \mid a \text{ unterrichtet } b\}$. Wie viele Schüler hat Matthias? Welche Beziehung besteht zwischen Martin und Matthias?

¹ Es ist unbekannt, ob diese Menge unendlich ist oder nicht. Geben Sie 5 Elemente an.

8. Aufgabe

- Es sei $R = \{ (a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid a < b \}$. Ist es möglich, eine Funktion $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ zu definieren, sodass gilt: $R = \{ (a, f(a)) \mid a \in \mathbb{Q} \}$.
- Es sei $R = \{ (a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid b = a^2 \}$. Ist es möglich, eine Funktion $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ zu definieren, sodass gilt: $R = \{ (a, f(a)) \mid a \in \mathbb{Q} \}$.
- Es sei $R = \{ (a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid b^2 = a \}$. Ist es möglich, eine Funktion $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ zu definieren, sodass gilt: $R = \{ (a, f(a)) \mid a \in \mathbb{Q} \}$.
- Es sei $R = \{ (a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid 7 \cdot b + 5 = a \}$.
Ist es möglich, eine Funktion $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ zu definieren, sodass gilt:
 $R = \{ (a, f(a)) \mid a \in \mathbb{Q} \}$.

9. Aufgabe

- Ist $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ mit $f(x) = x^2$ injektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Zeigen Sie: $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $f(x) = x^2$ ist injektiv.
- Ist $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ mit $f(x) = x^3$ injektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Ist $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ mit $f(x) = 7 \cdot x + 5$ bijektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Geben Sie ein $a \in \mathbb{Q}$ an, für das die Abbildung $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ mit $f(x) = a \cdot x + b$ bei beliebigem b weder injektiv noch surjektiv ist.

10. Aufgabe

Sei \mathbb{N} die Menge der natürlichen Zahlen und $M := \{ n^{10} \mid n \in \mathbb{N} \}$ die Menge aller zehnfachen Potenzen von natürlichen Zahlen: $\{0, 1, 1\,024, 59\,049, 1\,048\,576, \dots\}$. Zeigen Sie: \mathbb{N} und M sind gleich groß, sie haben die gleiche Mächtigkeit.

11. Aufgabe

- Seien A und B beliebige Mengen. Dann gilt:
 $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
- Seien A , B und C beliebige Mengen. Dann gilt:
 $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

12. Aufgabe

Angenommen, 60 % Professorinnen und Professoren eines Informatik-Fachbereichs geben als Lieblingsprogrammiersprache C# an, 65 % Java und 20 % C++. 45 % programmieren in jeweils zwei der Sprachen. Wie viel Prozent programmieren in allen drei Sprachen?

<http://www.springer.com/978-3-8348-1848-5>

Mathematik für Informatiker

Ausführlich erklärt mit vielen Programmbeispielen und
Aufgaben

Schubert, M.

2012, 844 S. 118 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-8348-1848-5