

Übungsaufgaben

2

1. Aufgabe

- a. Macht die folgende Beschreibung einer Menge Sinn? $M = \{ 1, 2, 2, 3, 2 \}$
Nein, die Elemente einer Menge müssen „wohl unterschieden“ sein, es kann nicht zweimal (oder mehrmals) dasselbe Element drin vorkommen.
- b. Sind die beiden folgenden Mengen gleich?
 $A = \{ 1, 3, 2, 7 \}$, $B = \{ 7, 2, 1, 3 \}$
Ja, sie bestehen aus denselben Elementen

2. Aufgabe

Welche Elemente enthalten die folgenden Mengen? \mathbb{N} ist die Menge der natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3, ... Falls die Menge endlich ist, geben Sie sämtliche Elemente an, Falls sie unendlich viele Elemente hat, geben Sie mindestens 5 Elemente an.

- a. $\{ x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist gerade} \wedge x \text{ ist Primzahl} \} = \{ 2 \}$
- b. $\{ x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist gerade} \vee x \text{ ist Primzahl} \} = \{ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, \dots \}$
- c. $\{ x \in \mathbb{N} \mid 3 \cdot x - 12 = 123 \} = \{ 45 \}$
- d. $\{ x \in \mathbb{N} \mid 3 \cdot x - 12 = 124 \} = \{ \}$
- e. $\{ x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist ungerade} \wedge 2 \cdot x = 32 \} = \{ \}$
- f. $\{ x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist Primzahl} \wedge x - 2 \text{ ist Primzahl} \}^1 = \{ 7, 13, 19, 31, 43, \dots \}$

¹ Es ist unbekannt, ob diese Menge unendlich ist oder nicht. Geben Sie 5 Elemente an.

3. Aufgabe

Prüfen Sie, ob die Menge B in der Menge A enthalten ist. \mathbf{Q} ist die Menge aller Brüche (positive und negative)

a. $A = \mathbf{Q}, B = \{1\}$
 $B \subseteq A$

b. $A = \{x \in \mathbf{N} \mid \exists_{n \in \mathbf{N}} x = 4 \cdot n\}, B = \{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ ist eine gerade Zahl}\}$
 Es gilt nicht: $B \subseteq A$, denn beispielsweise ist $10 \in B$, aber $10 \notin A$.

c. $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ ist eine gerade Zahl}\}, B = \{x \in \mathbf{N} \mid \exists_{n \in \mathbf{N}} x = 4 \cdot n\}$
 $B \subseteq A$

d. $A = \mathbf{Z}, B = \{\}$
 $B \subseteq A$

e. $A = \{1, 2, 3\}, B = \{x \in \mathbf{N} \mid x < -1\}$
 $B \subseteq A$, denn B ist die leere Menge

4. Aufgabe

Geben Sie jeweils den Durchschnitt der Mengen A und B an:

a. $A = \{x \in \mathbf{Q} \mid x \leq 5\}, B = \{x \in \mathbf{Q} \mid x \geq 5\}$
 $A \cap B = \{5\}$

b. $A = \{x \in \mathbf{Q} \mid x > -1\}, B = \{x \in \mathbf{Q} \mid x < 1\}$
 $A \cap B = \{x \in \mathbf{Q} \mid -1 < x < 1\}$

c. $A = \mathbf{Q}, B = \mathbf{N}$
 $A \cap B = \mathbf{N}$

d. $A = \{x \in \mathbf{Q} \mid x < 1\}, B = \{x \in \mathbf{Q} \mid x > 5\}$
 $A \cap B = \{\}$

5. Aufgabe

Geben Sie die Vereinigungsmenge der Mengen A und B an.

$$A = \{ x \in \mathbf{Q} \mid x < 1 \}, B = \{ x \in \mathbf{Q} \mid x \geq 1 \}$$

$$A \cup B = \mathbf{Q}$$

6. Aufgabe

Sei $M = \{0, 1\}$. Geben Sie alle Elemente von $M^3 = M \times M \times M$ an.

$$(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)$$

(Das sollte Sie an etwas erinnern).

7. Aufgabe

- a. Es sei $M = \{0, 1, 2\}$. Weiter sei $R = \{ (a, b) \in M \times M \mid a < b \}$. Geben Sie alle Elemente von R an.

$$R = \{ (0, 1), (0, 2), (1, 2) \}$$

- b. Es sei $R = \{ (\text{Matthias}, \text{Carsten}), (\text{Matthias}, \text{Karim}), (\text{Martin}, \text{Matthias}) \}$ eine Relation auf $M \times M$ mit $M = \{ \text{Carsten}, \text{Karim}, \text{Martin}, \text{Matthias} \}$. Die Relation sei definiert durch $R = \{ (a, b) \in M \times M \mid a \text{ unterrichtet } b \}$. Wie viele Schüler hat Matthias? Welche Beziehung besteht zwischen Martin und Matthias?

Matthias hat 2 Schüler (Carsten und Karim), Martin unterrichtet Matthias

8. Aufgabe

- a. Es sei $R = \{ (a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid a < b \}$. Ist es möglich, eine Funktion $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ zu definieren, sodass gilt: $R = \{ (a, f(a)) \mid a \in \mathbb{Q} \}$

Nein, das ist nicht möglich. Es gibt zu jedem $a \in \mathbb{Q}$ unendlich viele $b \in \mathbb{Q}$, sodass gilt: $(a, b) \in R$. Da aber eine Funktion f jedem $a \in \mathbb{Q}$ höchstens einen Funktionswert zuordnen kann, kann unsere Relation R niemals mit Hilfe einer Funktion dargestellt werden.

- b. Es sei $R = \{ (a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid b = a^2 \}$. Ist es möglich, eine Funktion $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ zu definieren, sodass gilt: $R = \{ (a, f(a)) \mid a \in \mathbb{Q} \}$

Ja, man nehme die Funktion $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ mit $f(x) = x^2$.

- c. Es sei $R = \{ (a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid b^2 = a \}$. Ist es möglich, eine Funktion $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ zu definieren, sodass gilt: $R = \{ (a, f(a)) \mid a \in \mathbb{Q} \}$

Nein, das ist aus mehreren Gründen nicht möglich. Zunächst gibt es für negative a kein $b \in \mathbb{Q}$ so, dass $b^2 = a$. Die Quadrate von rationalen Zahlen sind alle größer oder gleich 0. Zum anderen gibt es auch beispielsweise für 2 keine rationale Zahl x , für die gilt: $x^2 = 2$. Wir werden in einem späteren Kapitel (Kapitel 9, Abschnitt 9.1) sehen: Es gibt unendlich viele $a \in \mathbb{Q}$, die zwar alle > 0 sind, für die es aber trotzdem keine rationale Wurzel gibt. Für alle diese a kann f nicht definiert werden.

- d. Es sei $R = \{ (a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid 7 \cdot b + 5 = a \}$. Ist es möglich, eine Funktion $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ zu definieren, sodass gilt: $R = \{ (a, f(a)) \mid a \in \mathbb{Q} \}$

Ja, man nehme die Funktion $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ mit $f(x) = (x - 5)/7$.

9. Aufgabe

- a. Ist $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ mit $f(x) = x^2$ injektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

Nein, denn $f(-1) = f(1) = 1$.

- b. Zeigen Sie: $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $f(x) = x^2$ ist injektiv.

Es sei $m \neq n$, wobei $n = m + d$ mit $d > 0$. Dann ist

$$n^2 = m^2 + 2md + d^2 \neq m^2.$$

- c. Ist $f: \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}$ mit $f(x) = x^3$ injektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.
Ja, denn aus $x \neq y$ folgt: $x^3 \neq y^3$
- d. Ist $f: \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}$ mit $f(x) = 7 \cdot x + 5$ bijektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.
Ja, denn aus $x \neq y$ folgt: $7 \cdot x + 5 \neq 7 \cdot y + 5$. Und weiter ist für beliebiges $y \in \mathbf{Q}$ die Zahl $x = (y - 5)/7$ der Wert mit der Eigenschaft: $f(x) = y$
- e. Geben Sie ein $a \in \mathbf{Q}$ an, für das die Abbildung $f: \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}$ mit $f(x) = a \cdot x + b$ bei beliebigem b weder injektiv noch surjektiv ist.
Wähle $a = 0$.

10. Aufgabe

Sei \mathbf{N} die Menge der natürlichen Zahlen und $M := \{ n^{10} \mid n \in \mathbf{N} \}$ die Menge aller zehnfachen Potenzen von natürlichen Zahlen: $\{0, 1, 1024, 59049, 1048576, \dots\}$. Zeigen Sie: \mathbf{N} und M sind gleich groß, sie haben die gleiche Mächtigkeit.

$f: \mathbf{N} \rightarrow M$ mit $f(x) = x^{10}$ ist bijektiv

11. Aufgabe

- a. Seien A und B beliebige Mengen. Dann gilt:
 $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
Bei der Addition $|A| + |B|$ wird der Durchschnitt $|A \cap B|$ zweimal gezählt, darum muss er einmal wieder abgezogen werden.

b. Seien A, B und C beliebige Mengen. Dann gilt:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Mit Hilfe von 11a) und dem ersten Distributivgesetz sieht man:

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |(A \cup B) \cup C| = \\ &= |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| = \\ &= |A \cup B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| = \\ &= |A \cup B| + |C| - (|A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap C \cap B \cap C|) = \\ &= |A| + |B| + |C| - \\ &\quad - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + \\ &\quad + |A \cap C \cap B \cap C| \end{aligned}$$

12. Aufgabe

Angenommen, 60 % Professorinnen und Professoren eines Informatik-Fachbereichs geben als Lieblingsprogrammiersprache C# an, 65% Java und 20% C++. 45 % programmieren in jeweils zwei der Sprachen. Wie viel Prozent programmieren in allen drei Sprachen?

Wir nehmen an, dass alle eine dieser drei Sprachen als Lieblingssprache angegeben haben. Dann folgt aus Aufgabe 11 b):

$$|C\# \cap JAVA \cap C++| = |C\# \cup JAVA \cup C++| - |C\#| - |JAVA| - |C++| + |C\# \cap JAVA| + |C\# \cap C++| + |JAVA \cap C++|, \text{ also}$$

$$|C\# \cap JAVA \cap C++| = 100 - 60 - 65 - 20 + 45 = 0, \text{ also programmiert niemand in allen drei Sprachen.}$$

(Meine vorher fehlerhaft angegebene Lösung wurde kritisiert und korrigiert vom Kurs „Mathematik für Informatiker“ an der Universität Jena in einer Korrespondenz mit Andreas Cavazzini)