

Übungsaufgaben

5

1. Aufgabe

Gegeben zwei Gruppen (G_1, \diamond_1) und (G_2, \diamond_2) . Auf dem Kreuzprodukt $G_1 \times G_2$ sei die folgende Verknüpfung \diamond definiert:

$$(g_1, g_2) \diamond (h_1, h_2) := (g_1 \diamond_1 h_1, g_2 \diamond_2 h_2)$$

Zeigen Sie: $(G_1 \times G_2, \diamond)$ ist eine Gruppe.

Das ist offensichtlich: Sei e_1 das neutrale Element von G_1 und e_2 das neutrale Element von G_2 , dann ist (e_1, e_2) das neutrale Element von $(G_1 \times G_2, \diamond)$.

Sei weiterhin g_1^{-1} das inverse Element zu g_1 und g_2^{-1} das inverse Element zu g_2 , dann ist (g_1^{-1}, g_2^{-1}) das inverse Element zu (g_1, g_2) .

Der Rest ist klar.

2. Aufgabe

Es sei $G = \{ 2 \cdot n \mid n \in \mathbb{Z} \}$. Zeigen Sie: $(G, +)$ ist eine Gruppe.

- (i) **Abgeschlossenheit:** Seien $m, n \in \mathbb{Z}$ beliebig. Dann ist $2 \cdot m + 2 \cdot n = 2 \cdot (m + n)$ wieder aus G
- (ii) **Assoziativgesetz:** Seien $k, m, n \in \mathbb{Z}$ beliebig. Dann ist $(2 \cdot k + 2 \cdot m) + 2 \cdot n = 2 \cdot k + (2 \cdot m + 2 \cdot n)$
- (iii) **Neutrales Element:** Das neutrale Element ist $2 \cdot 0 = 0$. Denn sei $n \in \mathbb{Z}$ beliebig. Dann ist $2 \cdot n + 2 \cdot 0 = 2 \cdot n$
- (iv) **Inverses Element:** Sei $n \in \mathbb{Z}$ beliebig. Dann ist das zu $2 \cdot n$ inverse Element die Zahl $2 \cdot (-n)$. Denn $2 \cdot n + 2 \cdot (-n) = 2 \cdot 0 = 0$

3. Aufgabe

Es sei $G = \{ 2^n \mid n \in \mathbf{Z} \}$. Zeigen Sie: (G, \cdot) ist eine Gruppe. Ist $(G, +)$ eine Gruppe? Warum ist das eine gdF (ganz dumme Frage)?

Wir behandeln zunächst die Frage zu (G, \cdot) :

- (i) **Abgeschlossenheit:** Seien $m, n \in \mathbf{Z}$ beliebig. Dann ist $2^m \cdot 2^n = 2^{m+n}$ wieder aus G
- (ii) **Assoziativgesetz:** Seien $k, m, n \in \mathbf{Z}$ beliebig. Dann ist $(2^k \cdot 2^m) \cdot 2^n = 2^k \cdot (2^m \cdot 2^n)$
- (iii) **Neutrales Element:** Das neutrale Element ist $2^0 = 1$. Denn sei $n \in \mathbf{Z}$ beliebig. Dann ist $2^n \cdot 2^0 = 2^n$
- (iv) **Inverses Element:** Sei $n \in \mathbf{Z}$ beliebig. Dann ist das zu 2^n inverse Element die Zahl 2^{-n} . Denn $2^n \cdot 2^{-n} = 2^0 = 1$

Nun also die Frage zu $(G, +)$: Die Addition ist noch nicht einmal abgeschlossen, beispielsweise ist $2^3 + 2^4 = 8 + 16 = 24$ gar keine Zweierpotenz mehr. Deshalb ist die Frage nach Gruppenstrukturen völlig unsinnig.

4. Aufgabe

Es sei $\mathbf{Q}[x]$ die Menge der Polynome mit Koeffizienten in \mathbf{Q} . Genauer:

$$\mathbf{Q}[x] = \{ p(x) \mid \exists_{n \in \mathbf{N}} p(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n \\ \text{mit } a_i \in \mathbf{Q} \text{ und } a_n \neq 0 \}$$

Zeigen Sie: $(\mathbf{Q}[x], +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring, der übrigens auch ein neutrales Element bezüglich der Multiplikation enthält.

Zunächst zeigen wir: $(\mathbf{Q}[x], +)$ ist eine kommutative Gruppe.

(i) **Abgeschlossenheit:** Seien

$$p(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n \text{ und}$$

$$q(x) = b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2 + \dots + b_m \cdot x^m$$

zwei beliebige Elemente aus $\mathbf{Q}[x]$. Es sei $n \leq m$.

Für alle $n \leq i \leq m$ setze man: $a_i = 0$. Dann macht es Sinn, für alle $0 \leq i \leq m$ zu definieren: $c_i = a_i + b_i$. Es gilt: $c_i \in \mathbf{Q}$.

Damit ist $(p + q)(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + \dots + c_m \cdot x^m \in \mathbf{Q}[x]$.

(ii) **Assoziativgesetz:** Folgt sofort aus der Assoziativität in $(\mathbf{Q}, +)$

(iii) **Neutrales Element:** Das neutrale Element ist $e(x) = 0$. (Ein Polynom vom Grad 0). Dann gilt für jedes Polynom $p(x)$: $p(x) + e(x) = p(x)$.

(iv) **Inverses Element:** Sei $p \in \mathbf{Q}[x]$ beliebig.

$$p(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n. \text{ Dann ist auch } -p \text{ mit}$$

$$-p(x) = (-a_0) + (-a_1) \cdot x + (-a_2) \cdot x^2 + \dots + (-a_n) \cdot x^n \in \mathbf{Q}[x]$$

$$\text{Und es ist } (p + (-p)) = e.$$

(v) **Kommutativgesetz:** Folgt sofort aus der Kommutativität in $(\mathbf{Q}, +)$

Nun befassen wir uns mit der Multiplikation:

(i) **Abgeschlossenheit:**

$$\text{Seien } p(x) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i, q(x) = \sum_{j=0}^m b_j \cdot x^j \text{ beide } \in \mathbf{Q}[x].$$

$$\text{Dann ist auch } (p \cdot q)(x) = \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{j=0}^k a_j \cdot b_{k-j} \right) \cdot x^k \in \mathbf{Q}[x]$$

Hier werden wieder a_i für $i > n$ bzw b_j für $j > m$ gleich 0 gesetzt.

(ii) **Assoziativgesetz:**

$$\text{Sei } p(x) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i, \quad q(x) = \sum_{j=0}^m b_j \cdot x^j, \quad r(x) = \sum_{k=0}^g c_k \cdot x^k$$

Dann ist:

$$\begin{aligned} ((p \cdot q) \cdot r)(x) &= \left(\sum_{i=0}^{m+n} \left(\sum_{j=0}^i a_j \cdot b_{i-j} \right) \cdot x^i \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^g c_k \cdot x^k \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{m+n+g} \left(\sum_{j=0}^k \left(\sum_{i=0}^j a_i \cdot b_{j-i} \right) \cdot c_{k-j} \right) \cdot x^k = \\ &= \sum_{h=0}^{m+n+g} \left(\sum_{\substack{i,j,k=0 \\ i+j+k=h}}^h a_i \cdot b_j \cdot c_k \right) \cdot x^h \end{aligned}$$

Dieser letzte Ausdruck ist völlig symmetrisch in den a_i , b_j und c_k . Man kann ihn genauso erreichen, wenn man das Produkt $(p \cdot (q \cdot r))(x)$ bildet. Damit ist die Assoziativität gezeigt.

(iii) **Kommutativität:**

$$\text{Sei } p(x) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i, \quad q(x) = \sum_{j=0}^m b_j \cdot x^j$$

$$\text{Wir schreiben } (p \cdot q)(x) = \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j=k}}^k a_i \cdot b_j \right) \cdot x^k$$

Und sehen an der Symmetrie dieses Ausdrucks bezüglich der a_i und b_j die Kommutativität der Multiplikation von Polynomen.

(iv) **Distributivgesetze:**

Sei $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i$, $q(x) = \sum_{j=0}^m b_j \cdot x^j$, $r(x) = \sum_{k=0}^g c_k \cdot x^k$, $n \leq m$

$$\begin{aligned} \text{Dann ist } ((p+q) \cdot r)(x) &= \sum_{k=0}^{m+g} \left(\sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j=k}}^k (a_i + b_i) \cdot c_j \right) \cdot x^k = \\ &= \sum_{k=0}^{m+g} \left(\left(\sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j=k}}^k a_i \cdot c_j \right) + \left(\sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j=k}}^k b_i \cdot c_j \right) \right) \cdot x^k = \\ &= \sum_{k=0}^{n+g} \left(\sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j=k}}^k a_i \cdot c_j \right) \cdot x^k + \sum_{k=0}^{m+g} \left(\sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j=k}}^k b_i \cdot c_j \right) \cdot x^k = (p \cdot r)(x) + (q \cdot r)(x) \end{aligned}$$

(v) **Neutrales Element:**

Das Neutrale Element der Multiplikation ist das konstante Polynom $n(x) = 1$.
Es hat den Grad 0.

5. Aufgabe

Sie werden (wenn Sie es nicht schon wissen) im nächsten Kapitel lernen, dass $\sqrt{5}$ eine irrationale Zahl ist, d.h. nicht durch einen Bruch p/q dargestellt werden kann. Ich betrachte nun $\mathbf{Q}(\sqrt{5}) := \{ a + b \cdot \sqrt{5} \mid a \in \mathbf{Q} \text{ und } b \in \mathbf{Q} \}$. Es sei ganz „normal“:

- $(a + b \cdot \sqrt{5}) + (c + d \cdot \sqrt{5}) = (a + c) + (b + d) \cdot \sqrt{5}$
- $(a + b \cdot \sqrt{5}) \cdot (c + d \cdot \sqrt{5}) = (a \cdot c + 5 \cdot b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c) \cdot \sqrt{5}$

Zeigen Sie: $(\mathbf{Q}(\sqrt{5}), +, \cdot)$ ist ein Körper.

Bemerkung: Es ist übrigens der kleinste Körper, der alle rationalen Zahlen und $\sqrt{5}$ enthält.

Hinweis: Bezüglich der Addition ist alles schnell gezeigt. Das schwierigste wird sein, das Inverse zu $(a + b \cdot \sqrt{5})$ bezüglich der Multiplikation zu berechnen. Das können Sie durch das Lösen zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten erreichen.

Das Neutrale Element der Addition ist $0 = 0 + 0 \cdot \sqrt{5}$

Das zu $a + b \cdot \sqrt{5}$ inverse Element der Addition ist

$$-(a + b \cdot \sqrt{5}) = (-a) + (-b) \cdot \sqrt{5}$$

Das Neutrale Element der Multiplikation ist $1 = 1 + 0 \cdot \sqrt{5}$

Nun suchen wir für den Fall, dass a und b nicht beide gleichzeitig 0 sind, das zu $a + b \cdot \sqrt{5}$ inverse Element der Multiplikation. Es habe die Darstellung $c + d \cdot \sqrt{5}$. Es muss gelten:

$$(a + b \cdot \sqrt{5}) \cdot (c + d \cdot \sqrt{5}) = 1 + 0 \cdot \sqrt{5}$$

Das heißt:

$$a \cdot c + 5 \cdot b \cdot d + (a \cdot d + b \cdot c) \cdot \sqrt{5} = 1 + 0 \cdot \sqrt{5}$$

bzw.

$$(i) \quad a \cdot c + 5 \cdot b \cdot d = 1$$

$$(ii) \quad b \cdot c + a \cdot d = 0$$

Falls $a = 0$ ist, muss $b \neq 0$ sein und es folgt:

$$c = 0 \quad \text{wegen (ii)}$$

$$d = \frac{1}{5 \cdot b} \quad \text{wegen (i)}$$

Sei nun $a \neq 0$. Dann liefert $(i) \cdot b - (ii) \cdot a$: $(5 \cdot b^2 - a^2) \cdot d = b$, also

$$d = \frac{b}{5 \cdot b^2 - a^2} \quad \text{Preisfrage: Warum bin ich so sicher, dass } 5 \cdot b^2 - a^2 \neq 0 \text{ ist?}$$

$$\text{Aus (i) folgt: } c = \frac{1}{a} \left(1 - \frac{5 \cdot b^2}{5 \cdot b^2 - a^2} \right) = \frac{1}{a} \left(- \frac{a^2}{5 \cdot b^2 - a^2} \right) = \frac{-a}{5 \cdot b^2 - a^2}$$

Diese Formeln machen auch Sinn, falls $a = 0$ ist. Wir behaupten also:

Das inverse Element bezüglich der Multiplikation zu $a + b \cdot \sqrt{5}$ lautet:

$$(a + b \cdot \sqrt{5})^{-1} = \frac{1}{5 \cdot b^2 - a^2} (-a + b \cdot \sqrt{5}) = \frac{1}{a^2 - 5 \cdot b^2} (a - b \cdot \sqrt{5})$$

Die Probe bestätigt Ihnen sofort diese Behauptung.

Alle anderen Körperaxiome rechnet man einfach nach.

6. Aufgabe

Obwohl wir darüber schon im dritten Kapitel hätten sprechen können, ist es im Anschluss an Aufgabe 5 interessant, das folgende zu zeigen:

Es sind 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, die so genannten Fibonacci-Zahlen $F(n)$. Sie sind folgendermaßen rekursiv definiert:

- $F(1) = 1, F(2) = 1$
- Für alle $n > 2$ gilt: $F(n) = F(n-2) + F(n-1)$

Zeigen Sie durch vollständige Induktion: Für alle $n > 0$ gilt:

$$F(n) = \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Die interessanteste Frage ist hier natürlich: Wie kommt man auf solch eine Formel? Lesen Sie dazu den Abschnitt „Lineare Differenzengleichungen“ in [Brill]

Zunächst sieht man:

$$(i) \quad F(1) = \frac{\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$$

$$(ii) \quad F(2) = \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$$

Weiterhin gilt:

$$(iii) \quad \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 1$$

Beweis:

$$\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{1 + 2 \cdot \sqrt{5} + 5}{4} = \frac{2 \cdot (1 + \sqrt{5}) + 4}{4} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 1$$

Es folgt sofort:

$$(iv) \quad \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} + \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Genauso zeigt man:

$$(v) \quad \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

(vi) Aus (iv) und (v) folgt: $F(n+2) = F(n+1) + F(n)$ und alles ist gezeigt.

7. Aufgabe

Wandeln Sie die folgenden Dezimalzahlen in Brüche mit nur einem Bruchstrich um:

$$a) 0,\bar{8} = \frac{8}{9} \quad b) 17,\bar{8} = 17 + \frac{8}{9} = \frac{161}{9} \quad c) 3,\overline{41} = 3 + \frac{41}{99} = \frac{338}{99}$$

$$d) 1,4\overline{142} = \frac{141}{100} + \frac{42}{9900} = \frac{14001}{9900} = \frac{4667}{3300}$$

$$e) 4,008\overline{2376} = \frac{40082}{10000} + \frac{376}{9990000} = \frac{40042294}{9990000} = \frac{20021147}{4995000}$$

$$f) 0,8\bar{9} = \frac{8}{10} + \frac{9}{90} = \frac{72}{90} + \frac{9}{90} = \frac{81}{90} = \frac{9}{10} = 0,9 \quad g) 0,\bar{9} = \frac{9}{9} = 1$$

8. Aufgabe

Zur Problematik der Abzählbarkeit ist die Geschichte von Hilberts Hotel sehr eindrucksvoll:

Ein Hotel hat abzählbar unendlich viele Betten, die alle belegt sind. Da kommt ein neuer Gast. Wie kann man den unterbringen?

Ganz einfach: der Gast aus Zimmer 1 geht in Zimmer 2, der aus Zimmer 2 geht in Zimmer 3, der aus Zimmer 3 wechselt nach Zimmer 4 usw.

Nun kommen aber abzählbar unendlich viele neue Gäste. Können Sie einen ähnlichen Belegungswechsel (auch wieder ein einziger „Schleifendurchlauf“) konstruieren, durch den man alle diese neuen Gäste unterbringen kann?

Der Gast aus Zimmer 1 geht in Zimmer 2, der aus Zimmer 2 geht in Zimmer 4, der aus Zimmer 3 wechselt nach Zimmer 6, allgemein: der Gast aus Zimmer n wechselt nach Zimmer $2 \cdot n$. Dann werden $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n + \dots$ Zimmer, also abzählbar unendlich viele Zimmer frei.