

1. Aufgabe

Welche der folgenden Gleichungen haben eine Lösung in \mathbf{Q} ?

a. $x^3 - 64 = 0$

Diese Gleichung hat eine Lösung in \mathbf{Q} , nämlich 4

b. $x^2 - 4,9729 = 0$

$$x^2 - 4,9729 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2,23^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2,23 \vee x = -2,23$$

Diese Gleichung hat also zwei Lösungen in \mathbf{Q} .

c. $x^2 - 5 = 0$

$2 \cdot 2 = 4 < 5$, $3 \cdot 3 = 9 > 5$, also ist nach Satz 9.3 die Zahl $\sqrt{5}$ irrational und diese Gleichung hat keine Lösung in \mathbf{Q} .

d. $x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0$

Sei $p(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2$. Dann ist $p(1) = 1 - 1 - 2 + 2 = 0$, also hat diese Gleichung eine Lösung in \mathbf{Q} . Man kann jetzt $x - 1$ herausdividieren (Satz 9.12):

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 - 2x + 2 : x - 1 = x^2 - 2 \\ x^3 - x^2 \\ \hline - 2x + 2 \\ - 2x + 2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

Und erhält: $x^3 - x^2 - 2x + 2 = (x^2 - 2) \cdot (x - 1)$.

Da $\sqrt{2}$ irrational ist, ist 1 die einzige rationale Lösung dieser Gleichung.

2. Aufgabe

Für die folgenden Funktionen $f: \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}$ gilt alle: $f(-10) < 0$, $f(10) > 0$. Prüfen Sie, ob diese Funktionen eine Nullstelle in \mathbf{Q} zwischen -10 und 10 haben.

- a. $f(x) = x^3 - 125$
 $125 = 5 \cdot 5 \cdot 5$, also ist $x = 5$ eine Nullstelle in \mathbf{Q} .
- b. $f(x) = x^3 - 124$
 $124 = 2 \cdot 2 \cdot 31$, also hat 124 als Primzahlzerlegung kein Produkt von Dreierpotenzen von Primzahlen. Damit ist nach Satz 9.3 die Zahl $\sqrt[3]{124}$ irrational.
- c. $f(x) = x^5 - 32$
 $32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, also ist $x = 2$ eine Nullstelle in \mathbf{Q} .
- d. $f(x) = x^5 - 33$
 $33 = 3 \cdot 11$, also hat 33 als Primzahlzerlegung kein Produkt von Fünferpotenzen von Primzahlen. Damit ist nach Satz 9.3 die Zahl $\sqrt[5]{33}$ irrational.

3. Aufgabe

Die folgenden Polynome haben nur rationale Nullstellen. Finden Sie sie alle. Konsultieren Sie gegebenenfalls den Beginn des nächsten Kapitels zur Lösung von quadratischen Gleichungen.

- a. $f(x) = x^2 - 9$
 $x^2 - 9 = (x + 3) \cdot (x - 3)$, d.h. f hat die Nullstellen -3 und 3
- b. $f(x) = x^2 - 3x + 2$
 $x^2 - 3x + 2 = (x - 1,5)^2 - 0,25 = (x - 1,5)^2 - 0,5^2 =$
 $= (x - 1,5 + 0,5) \cdot (x - 1,5 - 0,5) = (x - 1) \cdot (x - 2)$
d.h. f hat die Nullstellen 1 und 2

c. $f(x) = x^3 + 27$

Mit Satz 9.11 folgt:

$$\begin{aligned} x^3 + 27 &= x^3 - (-3)^3 = (x - (-3)) \cdot (x^2 + x \cdot (-3) + (-3)^2) = \\ &= (x + 3) \cdot (x^2 - 3x + 9) = (x + 3) \cdot ((x - 1,5)^2 + 6,75) \\ &= 0 \Leftrightarrow x = -3 \end{aligned}$$

Denn: $(x - 1,5)^2 + 6,75 \geq 6,75 > 0$ für alle $x \in \mathbf{R}$.

d. $f(x) = x^3 + 4x^2 - 9x - 36$

Es ist $f(-3) = -27 + 36 + 27 - 36 = 0$. Also (Satz 9.12) kann man

$(x - (-3)) = (x + 3)$ herausdividieren:

$$\begin{array}{r} x^3 + 4x^2 - 9x - 36 : x + 3 = x^2 + x - 12 \\ x^3 + 3x^2 \\ \hline x^2 - 9x - 36 \\ x^2 + 3x \\ \hline -12x - 36 \\ -12x - 36 \\ \hline 0 \end{array}$$

Und man erhält:

$$\begin{aligned} x^3 + 4x^2 - 9x - 36 &= (x + 3) \cdot (x^2 + x - 12) = \\ &= (x + 3) \cdot ((x + 0,5)^2 - 12,25) = \\ &= (x + 3) \cdot ((x + 0,5)^2 - 3,5^2) = \\ &= (x + 3) \cdot (x + 0,5 + 3,5) \cdot (x + 0,5 - 3,5) = \\ &= (x + 3) \cdot (x + 4) \cdot (x - 3) \end{aligned}$$

Das bedeutet: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = -3 \vee x = 3$

e. $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

Es ist $f(-1) = -1 + 6 - 11 + 6 = 0$. Also (Satz 9.12) kann man

$(x - (-1)) = (x + 1)$ herausdividieren:

$$\begin{array}{r}
 x^3 + 6x^2 + 11x + 6 : x + 1 = x^2 + 5x + 6 \\
 \underline{x^3 + x^2} \\
 - - \\
 5x^2 + 11x \\
 \underline{ 5x^2 + 5x} \\
 - - \\
 6x + 6 \\
 \underline{ 6x + 6} \\
 0
 \end{array}$$

Und man erhält:

$$\begin{aligned}
 x^3 + 6x^2 + 11x + 6 &= (x+1) \cdot (x^2 + 5x + 6) = \\
 &= (x+1) \cdot ((x+2,5)^2 - 0,25) = \\
 &= (x+1) \cdot ((x+2,5)^2 - 0,5^2) = \\
 &= (x+1) \cdot (x+2,5+0,5) \cdot (x+2,5-0,5) = \\
 &= (x+1) \cdot (x+3) \cdot (x+2)
 \end{aligned}$$

Das bedeutet: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = -2 \vee x = -1$

4. Aufgabe

Finden Sie Polynome in der Form $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$, die jeweils genau die folgenden Nullstellen haben:

a. 0

$$p(x) = x$$

b. 7

$$p(x) = x - 7$$

c. 0 und 1

$$p(x) = x \cdot (x - 1) = x^2 - x$$

d. -2 und 2

$$p(x) = (x + 2) \cdot (x - 2) = x^2 - 4$$

e. -5 und 3

$$p(x) = (x + 5) \cdot (x - 3) = x^2 + 2x - 15$$

f. 0, 1 und 2

$$p(x) = x \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) = x^3 - 3x^2 + 2x$$

g. 0, -2 und 2

$$p(x) = x \cdot (x + 2) \cdot (x - 2) = x^3 - 4x$$

h. -5, 1 und 7

$$p(x) = (x + 5) \cdot (x - 1) \cdot (x - 7) = x^3 - 3x^2 - 33x + 35$$

5. Aufgabe

Man kann folgendermaßen vorgehen, um die Multiplikation reeller Zahlen vollständig zu definieren:

(i) Man definiert: $0 = \{ x \in \mathbf{Q} \mid x < 0 \}$

(ii) Man definiert dann:

Sei $\alpha \in \mathcal{R}$. Dann ist $-\alpha := \{ x \in \mathbf{Q} \mid -x \notin \alpha, -x \neq \min \mathbf{Q} \setminus \alpha \}$

Das will ich ein wenig erläutern:

Sei $\alpha = \{ x \in \mathbf{Q} \mid x < 4 \}$ die Zahl 4. Dann wäre:

$\{ x \in \mathbf{Q} \mid -x \notin \alpha \} = \{ x \in \mathbf{Q} \mid -x \geq 4 \} = \{ x \in \mathbf{Q} \mid x \leq -4 \}$ zwar unserer Vorstellung von -4 ziemlich ähnlich, aber **keine** reelle Zahl, denn diese Teilmenge von \mathcal{R} enthielte ein größtes Element, nämlich -4 .

Es ist aber $\mathbf{Q} \setminus \alpha = \{ x \in \mathbf{Q} \mid x \geq 4 \}$, also $\min \mathbf{Q} \setminus \alpha = 4$, also wird

$\{ x \in \mathbf{Q} \mid -x \notin \alpha, -x \neq \min \mathbf{Q} \setminus \alpha \} = \{ x \in \mathbf{Q} \mid -x \notin \alpha, -x \neq 4 \} =$
 $\{ x \in \mathbf{Q} \mid -x \geq 4 \wedge -x \neq 4 \} = \{ x \in \mathbf{Q} \mid x \leq -4 \wedge x \neq -4 \} =$
 $\{ x \in \mathbf{Q} \mid x < -4 \}$ genau das, was wir wollen.

(iii) Jetzt können wir den Absolutbetrag für reelle Zahlen definieren:

$$\text{Sei } \alpha \in \mathcal{R}. \text{ Dann ist } |\alpha| = \begin{cases} \alpha & , \alpha \geq 0 \\ -\alpha & , \alpha \leq 0 \end{cases}$$

- (iv) Und wir sind bereit für die vollständige Definition der Multiplikation in \mathcal{R} :

Wir hatten definiert:

Seien $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ beliebig. Dann ist:

$$\alpha \cdot \beta := \{ x \cdot y \mid x \in \alpha, x > 0 \text{ und } y \in \beta, y > 0 \} \cup \{ z \in \mathcal{Q} \mid z \leq 0 \}$$

Und wir können hinzufügen:

$$\alpha \cdot \beta = \begin{cases} 0, & \text{falls } \alpha = 0 \vee \beta = 0 \\ |\alpha| \cdot |\beta|, & \text{falls } \alpha < 0 \wedge \beta < 0 \\ -(|\alpha| \cdot |\beta|), & \text{falls } (\alpha > 0 \wedge \beta < 0) \vee (\alpha < 0 \wedge \beta > 0) \end{cases}$$

Zeigen Sie: Die Addition und Multiplikation in \mathcal{R} sind wohl definiert, d.h. ihr Ergebnis ist wieder ein Element aus \mathcal{R}

Die Addition:

Seien a und b Teilmengen von \mathcal{Q} , a und $b \in \mathcal{R}$.

Dann war: $a + b = \{ x + y \mid x \in a \text{ und } y \in b \}$. Damit $a + b \in \mathcal{R}$ gilt, müssen wir zeigen:

- (i) Die Menge $a + b$ ist Teilmenge von \mathcal{Q}
- (ii) $(x \in a + b \wedge y \in \mathcal{Q} \text{ mit } y < x) \rightarrow y \in a + b$
- (iii) $a + b \neq \{ \}$
- (iv) $a + b \neq \mathcal{Q}$
- (v) $\forall_{x \in a + b} \exists_{y \in a + b} y > x$ (d.h. es gibt kein größtes Element in $a + b$)

Zu (i): Diese Eigenschaft ist klar.

Zu (ii): Sei $x = x_1 + x_2 \in a + b$ mit $x_1 \in a$ und $x_2 \in b$. Sei weiterhin $y \in \mathcal{Q}$ mit $y < x$. Dann ist auch $x_1 - (x - y) \in a$, denn $x_1 - (x - y) < x_1$. Damit ist $y = (x_1 - (x - y)) + x_2 \in a + b$ wie behauptet.

- Zu (iii): Nach Voraussetzung ist $a \neq \{\}$ und $b \neq \{\}$. Sei $x_1 \in a$ und $x_2 \in b$. Dann ist $x = x_1 + x_2 \in a + b$ und also $a + b \neq \{\}$.
- Zu (iv): Nach Voraussetzung ist $a \neq \mathbf{Q}$ und $b \neq \mathbf{Q}$. Sei $x_1 \notin a$. Dann gilt für alle $y \in \mathbf{Q}$ mit $y \geq x_1$: $y \notin a$. Sei weiterhin $x_2 \notin b$. Dann gilt genau so für alle $y \in \mathbf{Q}$ mit $y \geq x_2$: $y \notin b$. Sei nun $z = x_1 + x_2$. Für jede Darstellung $z = z_1 + z_2$ muss gelten: $z_1 \geq x_1$ oder $z_2 \geq x_2$. Das bedeutet aber: $z_1 \notin a$ oder $z_2 \notin b$. In jedem Falle gilt $z \notin a + b$. Also ist auch $a + b \neq \mathbf{Q}$.
- Zu (v): Sei $x = x_1 + x_2 \in a + b$ beliebig mit $x_1 \in a$ und $x_2 \in b$. Dann gibt es $y_1 \in a$ so, dass $y_1 > x_1$. Genauso gibt es $y_2 \in b$ so, dass $y_2 > x_2$. Dann ist $y_1 + y_2 \in a + b$ ein Element mit der Eigenschaft $y_1 + y_2 > x_1 + x_2$.

Die Multiplikation:

Damit $a \cdot b \in \mathcal{R}$ gilt, müssen wir zeigen:

- (i) Die Menge $a \cdot b$ ist Teilmenge von \mathbf{Q}
- (ii) $(x \in a \cdot b \wedge y \in \mathbf{Q} \text{ mit } y < x) \rightarrow y \in a \cdot b$
- (iii) $a \cdot b \neq \{\}$
- (iv) $a \cdot b \neq \mathbf{Q}$
- (v) $\forall_{x \in a \cdot b} \exists_{y \in a \cdot b} y > x$ (d.h. es gibt kein größtes Element in $a + b$)

Ich zeige alle 4 Eigenschaften nur für den Fall, dass $a > 0$ und $b > 0$ ist. Alle anderen Fälle folgen dann leicht aus der Tatsache, dass $0 \in \mathcal{R}$ ist und dass für $\alpha \in \mathcal{R}$ auch $-\alpha \in \mathcal{R}$ ist

Zu (i): Diese Eigenschaft ist klar.

Zu (ii): Falls $y \leq 0$ ist, ist die Eigenschaft (ii) unmittelbar erfüllt. Sei also $x > y > 0$, $x \in a \cdot b$. Dann muss gelten:

Es gibt $x_1 \in a$, $x_1 > 0$ und $x_2 \in b$, $x_2 > 0$ so dass $x = x_1 \cdot x_2$.

$$\text{Weiter ist } 0 < \frac{y}{x} < 1 \text{ und } y = \frac{y}{x} \cdot x = \left(\frac{y}{x} \cdot x_1 \right) \cdot x_2$$

Es folgt:

$$\text{Es folgt: } \left(\frac{y}{x} \cdot x_1 \right) < x_1 \text{ und daher } \left(\frac{y}{x} \cdot x_1 \right) \in a \text{ und also } y \in a \cdot b$$

Zu (iii): Folgt sofort aus der Definition der Multiplikation

Zu (iv): Folgt aus $a \neq \mathbf{Q}$ und $b \neq \mathbf{Q}$

Zu (v): Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x = x_1 \cdot x_2 \in a \cdot b$ mit $x_1 \in a$, $x_1 > 0$ und $x_2 \in b$, $x_2 > 0$. Dann gibt es $y_1 \in a$ so, dass $y_1 > x_1$. Genauso gibt es $y_2 \in b$ so, dass $y_2 > x_2$. Dann ist $y_1 \cdot y_2 \in a \cdot b$ ein Element mit der Eigenschaft $y_1 \cdot y_2 > x_1 \cdot x_2$.

6. Aufgabe

Finden Sie bezüglich der Addition und Multiplikation in \mathcal{R} :

a. Das additive neutrale Element

Das additive neutrale Element ist $0 = \{ x \in \mathbf{Q} \mid x < 0 \}$

b. Das additive Inverse zu einem beliebigem x aus \mathcal{R}

Das additive Inverse zu einem beliebigem x aus \mathcal{R} ist

$-x = \{ y \in \mathbf{Q} \mid -y \notin x, -y \neq \min \mathbf{Q} \setminus x \}$ (vergleiche Aufgabe 5)

c. Das multiplikative neutrale Element

Das multiplikative neutrale Element ist $1 = \{ x \in \mathbf{Q} \mid x < 1 \}$

d. Das multiplikative Inverse zu einem beliebigem x aus \mathcal{R} , wobei aber x nicht das additive neutrale Element ist

Sei $x > 0$. Dann ist:

$$\frac{1}{x} = \left\{ y \in \mathbf{Q} \mid \left(y \neq 0 \wedge \frac{1}{y} \notin x \wedge \frac{1}{y} \neq \min \mathbf{Q} \setminus x \right) \vee y = 0 \right\}$$

Sei $x < 0$. Dann ist: $\frac{1}{x} = -\frac{1}{|x|}$

Betrachten Sie dazu zwei Beispiele:

Es sei $x = 4 = \{ y \in \mathbf{Q} \mid y < 4 \}$. Dann ist:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4} &= \left\{ y \in \mathbf{Q} \mid \left(y \neq 0 \wedge \frac{1}{y} \notin 4 \wedge \frac{1}{y} \neq \min \mathbf{Q} \setminus 4 \right) \vee y = 0 \right\} = \\
 &= \left\{ y \in \mathbf{Q} \mid \left(y \neq 0 \wedge \frac{1}{y} \geq 4 \wedge \frac{1}{y} \neq 4 \right) \vee y = 0 \right\} = \\
 &= \left\{ y \in \mathbf{Q} \mid \left(y \neq 0 \wedge y \leq \frac{1}{4} \wedge y \neq \frac{1}{4} \right) \vee y = 0 \right\} = \\
 &= \left\{ y \in \mathbf{Q} \mid y < \frac{1}{4} \right\}
 \end{aligned}$$

Nun sei $x = -4 = \{ y \in \mathbf{Q} \mid y < -4 \}$.

Dann ist: $|x| = \{ y \in \mathbf{Q} \mid y < 4 \}$ und daher

$$\frac{1}{-4} = -\frac{1}{4} = -\left\{ y \in \mathbf{Q} \mid y < \frac{1}{4} \right\} = \left\{ y \in \mathbf{Q} \mid y < \frac{1}{-4} \right\}$$

Also ist alles so, wie erwartet und gewünscht.