

1. Aufgabe

- (i) Zeigen Sie: Die Menge der Polynome vom Grad ≤ 3 mit Koeffizienten aus \mathbf{Q} ist ein Vektorraum über \mathbf{Q}

Die Menge der Polynome vom Grad ≤ 3 mit Koeffizienten aus \mathbf{Q} lässt sich beschreiben als:

$$\mathbf{Q}_3[x] :=$$

$$\left\{ p(x) = a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1 + a_0 \mid a_i \in \mathbf{Q} \text{ für } 0 \leq i \leq 3 \right\}$$

Seien

$$p(x) = a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1 + a_0 \text{ und}$$

$$q(x) = b_3 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x^1 + b_0 \quad \text{beliebige Elemente aus } \mathbf{Q}_3[x].$$

Dann ist mit:

$$p(x) + q(x) :=$$

$$(a_3 + b_3) \cdot x^3 + (a_2 + b_2) \cdot x^2 + (a_1 + b_1) \cdot x^1 + a_0 + b_0$$

eine Addition definiert, die $(\mathbf{Q}_3[x], +)$ zu einer kommutativen Gruppe macht.

Der Nullvektor ist $o(x) = 0$ (konstant = 0)

Das inverse Element $-p(x)$ zu

$$p(x) = a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1 + a_0 \text{ ist}$$

$$-p(x) = -a_3 \cdot x^3 + (-a_2) \cdot x^2 + (-a_1) \cdot x^1 + (-a_0)$$

$$= -a_3 \cdot x^3 - a_2 \cdot x^2 - a_1 \cdot x^1 - a_0$$

Sei nun $r \in \mathbf{Q}$ beliebig. Dann ist für beliebiges

$$p(x) = a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1 + a_0 \text{ aus } \mathbf{Q}_3[x] \text{ mit}$$

$$r \cdot p(x) := r \cdot a_3 \cdot x^3 + r \cdot a_2 \cdot x^2 + r \cdot a_1 \cdot x^1 + r \cdot a_0$$

eine Multiplikation zwischen Elementen aus \mathbf{Q} und Elementen aus $\mathbf{Q}_3[x]$ definiert, die den entsprechenden Axiomen aus der Definition des Vektorraums genügt.

- (ii) Zeigen Sie: Die Menge der Polynome vom Grad ≤ 3 mit Koeffizienten aus \mathbf{R} ist ein Vektorraum über \mathbf{R}

Völlig analog zu (i)

- (iii) Sei K ein Körper. Zeigen Sie: Die Menge der Polynome vom Grad ≤ 3 mit Koeffizienten aus K ist ein Vektorraum über K

Ebenfalls völlig analog zu (i).

2. Aufgabe

- (i) Sei K ein Körper und sei $n \in \mathbf{N}$. Zeigen Sie: Die Menge der Polynome vom Grad $\leq n$ mit Koeffizienten aus K ist ein Vektorraum über K

Ebenfalls völlig analog zu 1.(i).

- (ii) Sei K ein Körper. Zeigen Sie: Die Menge der Polynome mit Koeffizienten aus K ist ein Vektorraum über K

Entsprechend zu 1.(i)

3. Aufgabe

Sei $\vec{v} = (1, 2)$

- (i) Zeigen Sie: \vec{v} ist linear unabhängig in \mathbf{R}^2 .

$$r \cdot \vec{v} = \vec{0} \iff$$

$$r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{pmatrix} r \\ 2 \cdot r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$

$$r = 0$$

- (ii) Zeigen Sie: $\{ \alpha \cdot \vec{v} \mid \alpha \in \mathbf{R} \}$ ist ein Vektorraum.

Sei $V := \{ \alpha \cdot \vec{v} \mid \alpha \in \mathbf{R} \}$. Seien $\vec{a} = \alpha \cdot \vec{v}$ und $\vec{b} = \beta \cdot \vec{v}$ beliebige

Elemente aus V . Dann ist auch $\vec{a} + \vec{b} = (\alpha + \beta) \cdot \vec{v}$ aus V , d.h. die Addi-

tion ist abgeschlossen, der Nullvektor $\vec{0} = 0 \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist aus V und für

jedes Element $\vec{a} = \alpha \cdot \vec{v}$ ist auch $-\vec{a} = (-\alpha) \cdot \vec{v}$ aus V . Also ist $(V, +)$ eine kommutative Gruppe.

Auch die Multiplikation mit reellen Zahlen führt nicht aus V heraus. Sei r eine beliebige reelle Zahl. Dann ist für ein beliebiges Element $\vec{a} = \alpha \cdot \vec{v}$ aus V auch $r \cdot \vec{a} = (r \cdot \alpha) \cdot \vec{v}$ aus V . Die Axiome für die Multiplikation folgen sofort.

- (iii) Geben Sie eine Basis für diesen Vektorraum an.

$$\text{Basis} = \{ \vec{v} \}$$

- (iv) Zeigen Sie: die Dimension dieses Vektorraums ist 1.

$$\text{Dimension} = \left| \{ \vec{v} \} \right| = 1$$

4. Aufgabe

Sei $\vec{v} = (1, 2)$ und $\vec{w} = (2, -3)$.

- (i) Zeigen Sie \vec{v} und \vec{w} sind linear unabhängig in \mathbf{R}^2 .

$$r_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad r_1 + 2 \cdot r_2 &= 0 \\ \text{(ii)} \quad 2 \cdot r_1 - 3 \cdot r_2 &= 0 \end{aligned} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad r_1 + 2 \cdot r_2 &= 0 \\ \text{(ii)} - 2 \cdot \text{(i)} \quad - 7 \cdot r_2 &= 0 \end{aligned} \Leftrightarrow$$

$r_2 = 0$ (folgt aus der 2. Gleichung) und $r_1 = 0$ (folgt nach Einsetzen von 0 in die 1. Gleichung)

- (ii) Zeigen Sie: $\{ \alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{w} \mid \alpha, \beta \in \mathbf{R} \} = \mathbf{R}^2$.

Sei (x, y) aus \mathbf{R}^2 beliebig. Wir müssen zeigen, dass es α, β aus \mathbf{R} gibt so, dass

$$\alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{w} = (x, y)$$

Es ist aber:

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \alpha + 2 \cdot \beta = x \\ \text{(ii)} \quad & 2 \cdot \alpha - 3 \cdot \beta = y \end{aligned} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \alpha + 2 \cdot \beta = x \\ \text{(ii)} - 2 \cdot \text{(i)} \quad & - 7 \cdot \beta = y - 2 \cdot x \end{aligned} \Leftrightarrow$$

$$\text{Also: } \beta = \frac{2 \cdot x - y}{7} \text{ (folgt aus der 2. Gleichung)}$$

$$\text{und } \alpha = \frac{7 \cdot x - 4 \cdot x + 2 \cdot y}{7} = \frac{3 \cdot x + 2 \cdot y}{7} \text{ (folgt nach Einsetzen von } \beta \text{ in die 1. Gleichung)}$$

Machen Sie die Probe:

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{3 \cdot x + 2 \cdot y}{7} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2 \cdot x - y}{7} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3 \cdot x + 2 \cdot y}{7} + \frac{4 \cdot x - 2 \cdot y}{7} \\ \frac{6 \cdot x + 4 \cdot y}{7} + \frac{-6 \cdot x + 3 \cdot y}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(iii) Ist $\{ \vec{v}, \vec{w} \}$ eine Basis für \mathbf{R}^2 ?

Natürlich, denn \vec{v} und \vec{w} sind linear unabhängig und ich kann den gesamten \mathbf{R}^2 damit erzeugen.

5. Aufgabe

Sei $\vec{v} = (1, 3)$ und $\vec{w} = (-7, -21)$.

- (i) Zeigen Sie: \vec{v} und \vec{w} sind linear abhängig in \mathbf{R}^2 .

$$r_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r_2 \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

impliziert NICHT, dass r_1 und $r_2 = 0$ sind. Diese Gleichung ist beispielsweise auch für $r_1 = 7$ und $r_2 = 1$ erfüllt.

- (ii) Zeigen Sie: $\{ \alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{w} \mid \alpha, \beta \in \mathbf{R} \}$ ist trotzdem ein Vektorraum in \mathbf{R}^2 .

Wieder analog zu Aufgabe 1 (i). Erst muss man sehen, dass die Addition abgeschlossen ist, dann sieht man, dass man eine Gruppe hat und dann sieht man, dass auch die Multiplikation mit einer reellen Zahl für die Elemente dieser Menge definiert ist, nicht als ihr herausführt und den entsprechenden Axiomen genügt.

- (iii) Geben Sie eine Basis für diesen Vektorraum an.

$$\text{Basis} = \{ \vec{v} \} \text{ oder auch } \text{Basis} = \{ \vec{w} \}$$

- (iv) Was ist die Dimension dieses Vektorraums?

$$\text{Dimension} = |\{ \vec{v} \}| = |\{ \vec{w} \}| = 1$$

6. Aufgabe

Sei $\vec{u} = (-3, 2)$, $\vec{v} = (1, 1)$ und $\vec{w} = (0, -3)$.

- (i) Zeigen Sie: \vec{u} , \vec{v} und \vec{w} sind linear abhängig in \mathbf{R}^2 .

$$r_1 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + r_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$(i) \quad -3 \cdot r_1 + r_2 = 0$$

$$(ii) \quad 2 \cdot r_1 + r_2 - 3 \cdot r_3 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(i) \quad -3 \cdot r_1 + r_2 = 0$$

$$-3 \cdot (ii) - 2 \cdot (i) \quad -5 \cdot r_2 + 9 \cdot r_3 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

Diese beiden Gleichungen sind natürlich für $r_1 = r_2 = r_3 = 0$ richtig. Aber auch für jede Menge andere Werte von r_1 , r_2 und r_3 .

Setze z.B. $r_3 = 5$. (Jeder andere Wert ginge auch, ich will aber möglichst glatte Werte erhalten). Dann folgt aus der 2. Gleichung: $r_2 = 9$. Einsetzen in die erste Gleichung gibt: $r_1 = 3$.

Und die Probe zeigt: die Werte funktionieren.

- (ii) Zeigen Sie: $\{ \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} + \gamma \cdot \vec{w} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R} \}$ ist trotzdem ein Vektorraum in \mathbf{R}^2 .

Wie zuletzt in Aufgabe 5 (ii) beschrieben.

- (iii) Geben Sie eine Basis für diesen Vektorraum an.

$$\text{Basis} = \{ \vec{u}, \vec{v} \} \text{ oder auch } = \{ \vec{u}, \vec{w} \} \text{ oder auch } = \{ \vec{v}, \vec{w} \}$$

- (iv) Was ist die Dimension dieses Vektorraums?

$$\text{Dimension} = |\{ \vec{u}, \vec{v} \}| = |\{ \vec{u}, \vec{w} \}| = |\{ \vec{v}, \vec{w} \}| = 2$$

7. Aufgabe

Sei $\vec{v} = (1, 2, 3)$

- (i) Zeigen Sie: \vec{v} ist linear unabhängig in \mathbf{R}^3 .

$$r \vec{v} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow$$

$$r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 2r \\ 3r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad r = 0$$

- (ii) Zeigen Sie: $\{ \alpha \cdot \vec{v} \mid \alpha \in \mathbf{R} \}$ ist ein Vektorraum.

Völlig analog Aufgabe 3(ii)

- (iii) Geben Sie eine Basis für diesen Vektorraum an.

$$\text{Basis} = \{ \vec{v} \}$$

- (iv) Zeigen Sie: die Dimension dieses Vektorraums ist 1.

$$\text{Dimension} = \left| \{ \vec{v} \} \right| = 1$$

8. Aufgabe

Sei $\vec{v} = (1, 2, 3)$ und $\vec{w} = (-3, 2, -3)$.

- (i) Zeigen Sie \vec{v} und \vec{w} sind linear unabhängig in \mathbf{R}^3 .

$$x \vec{v} + y \vec{w} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow$$

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$(a) \quad x - 3y = 0$$

$$(b) \quad 2x + 2y = 0$$

$$(c) \quad 3x - 3y = 0$$

Aus (c) folgt: $x = y$. Damit folgt aus (b) $4y = 0$.

Damit folgt $y = x = 0$ und diese Lösung erfüllt auch die Gleichung a.

- (ii) Zeigen Sie: $\{ \alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{w} \mid \alpha, \beta \in \mathbf{R} \}$ ist ein Vektorraum

Leichte Rechnung.

- (iii) Geben Sie eine Basis für diesen Vektorraum an.

$$\text{Basis} = \{ \vec{v}, \vec{w} \}$$

- (iv) Zeigen Sie: die Dimension dieses Vektorraums ist 2.

$$\text{Dimension} = |\{ \vec{v}, \vec{w} \}| = 2$$

9. Aufgabe

Sei $\vec{u} = (2, 1, -3)$, $\vec{v} = (1, 2, 3)$ und $\vec{w} = (-3, 2, -3)$.

- (i) Zeigen Sie \vec{u}, \vec{v} und \vec{w} sind linear unabhängig in \mathbf{R}^3 .

$$x \vec{u} + y \vec{v} + z \vec{w} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow$$

$$x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$(a) \quad 2x + y - 3z = 0$$

$$(b) \quad x + 2y + 2z = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(c) \quad -3x + 3y - 3z = 0$$

$$(b) \quad x + 2y + 2z = 0 \quad (a)$$

$$2(b) - (a) \quad 3y + 7z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (b)$$

$$3(b) + (c) \quad 9y + 3z = 0 \quad (c)$$

$$(a) \quad x + 2y + 2z = 0 \quad (a)$$

$$(b) \quad 3y + 7z = 0 \quad (b)$$

$$(c) - 3(b) \quad -18z = 0 \quad (c)$$

Aus (c) folgt : $z = 0$, damit folgt aus (b) $y = 0$ und schließlich folgt aus (a) $x = 0$.

(ii) Zeigen Sie: $\{ \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} + \gamma \cdot \vec{w} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R} \} = \mathbf{R}^3$.

Ich nehme statt α, β und γ die Buchstaben x, y, z . Sei $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$ beliebiges Element aus \mathbf{R}^3 . Dann ist

$$x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$(a) \quad 2x + y - 3z = s_1$$

$$(b) \quad x + 2y + 2z = s_2 \quad \Leftrightarrow$$

$$(c) \quad -3x + 3y - 3z = s_3$$

$$(b) \quad x + 2y + 2z = s_2 \quad (a)$$

$$2(b) - (a) \quad 3y + 7z = 2s_2 - s_1 \quad \Leftrightarrow \quad (b)$$

$$3(b) + (c) \quad 9y + 3z = 3s_2 + s_3 \quad (c)$$

$$(a) \quad x + 2y + 2z = s_2 \quad (a)$$

$$(b) \quad 3y + 7z = 2s_2 - s_1 \quad (b)$$

$$(c) - 3(b) \quad -18z = 3s_2 + s_3 - 6s_2 + 3s_1 \quad (c)$$

$$\text{Aus (c) folgt: } z = \frac{-3s_1 + 3s_2 - s_3}{18}$$

$$\begin{aligned} \text{Aus (b) folgt: } y &= \frac{2s_2 - s_1}{3} - \frac{-21s_1 + 21s_2 - 7s_3}{54} = \\ &= \frac{3s_1 + 15s_2 + 7s_3}{54} \end{aligned}$$

Aus (a) folgt:

$$x = s_2 - \frac{6s_1 + 30s_2 + 14s_3}{54} - \frac{-18s_1 + 18s_2 - 6s_3}{54} =$$

$$\frac{12s_1 + 6s_2 - 8s_3}{54}$$

- (iii) Ist $\{ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \}$ eine Basis für \mathbf{R}^3 ?
Offensichtlich

10. Aufgabe

Sei $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (-3, -6, -9)$ und $\vec{w} = (7, 14, 21)$.

- (i) Zeigen Sie \vec{u}, \vec{v} und \vec{w} sind linear abhängig in \mathbf{R}^3 .
Es ist $\vec{v} = -3\vec{u}$ und $\vec{w} = 7\vec{u}$, also z.B.
 $-4\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$
- (ii) Zeigen Sie: $\{ \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} + \gamma \cdot \vec{w} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R} \}$ ist trotzdem ein Vektorraum in \mathbf{R}^3 .
 $\{ \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} + \gamma \cdot \vec{w} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R} \} = \{ \alpha \cdot \vec{u} \mid \alpha \in \mathbf{R} \}$
- (iii) Geben Sie eine Basis für diesen Vektorraum an.
Basis = $\{ \vec{u} \}$
- (iv) Was ist die Dimension dieses Vektorraums?
Dimension = $|\{ \vec{u} \}| = 1$

11. Aufgabe

Sei $\vec{u} = (2, 1, -3)$, $\vec{v} = (1, 2, 3)$ und $\vec{w} = (4, 5, 3)$.

- (i) Zeigen Sie \vec{u}, \vec{v} und \vec{w} sind linear abhängig in \mathbf{R}^3 .
Durch Gleichungslösen erkennt man:
 $\vec{u} + 2\vec{v} = \vec{w}$
Außerdem sind $\vec{u} = (2, 1, -3)$ und \vec{v} offensichtlich linear unabhängig.
- (ii) Zeigen Sie: $\{ \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} + \gamma \cdot \vec{w} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R} \}$ ist trotzdem ein Vektorraum in \mathbf{R}^3 .
Das zeigt man wie in allen anderen Beispielen

- (iii) Geben Sie eine Basis für diesen Vektorraum an.

$$\text{Basis} = \{ \vec{u}, \vec{v} \}$$

- (iv) Was ist die Dimension dieses Vektorraums?

$$\text{Dimension} = |\{ \vec{u}, \vec{v} \}| = 2$$

12. Aufgabe

Sei $\vec{u} = (2, 1, -3)$, $\vec{v} = (1, 2, 3)$, $\vec{w} = (-3, 2, -3)$ und $\vec{x} = (3, 2, 1)$

- (i) Zeigen Sie: \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} und \vec{x} sind linear abhängig in \mathbf{R}^3 .

Aus Aufgabe 9 (ii) wissen wir:

$$\frac{20}{27} \vec{u} + \frac{23}{27} \vec{v} - \frac{6}{27} \vec{w} = \vec{x}$$

- (ii) Zeigen Sie: $\{ \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} + \gamma \cdot \vec{w} + \delta \cdot \vec{x} \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R} \}$ ist trotzdem ein Vektorraum in \mathbf{R}^3 .

Das zeigt man wie in allen anderen Beispielen

- (iii) Geben Sie eine Basis für diesen Vektorraum an.

Wir wissen aus Aufgabe 9: \vec{u} , \vec{v} und \vec{w} sind linear unabhängig.

Also ist $\{ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \}$ eine Basis.

- (iv) Was ist die Dimension dieses Vektorraums?

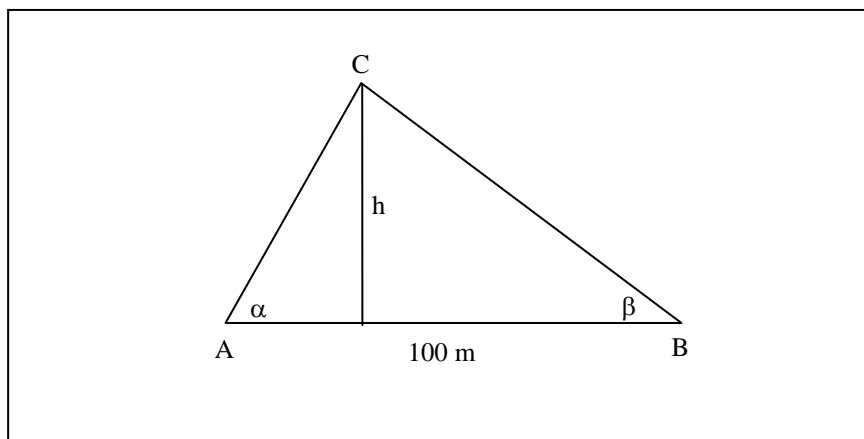
Die Mächtigkeit dieser Basis, also 3

13. Aufgabe

Man will die Breite eines Flusses messen. Dazu wird ein Punkt C auf der einen Seite des Flusses von 2 verschiedenen Punkten A und B auf der anderen Seite des Flusses angepeilt. Es ergeben sich die folgenden Winkel (im Bogenmaß) :

$$\alpha = \frac{\pi}{3}, \quad \beta = \frac{\pi}{4}$$

Die Strecke c , die von A nach B geht, hat die Länge 100 m. Wie groß ist die Entfernung zum Punkt C, also wie groß ist die Höhe h des Dreiecks ABC?



Wir nennen den Abschnitt von A bis zum Fußpunkt der Höhe p und den Abschnitt vom Fußpunkt der Höhe bis zu B nennen wir q . Es ist $q = 100 - p$.

Dann gilt: $h = p \tan(\alpha)$ und $h = (100 - p) \tan(\beta)$, also

$$p \tan(\alpha) = (100 - p) \tan(\beta), \text{ also } p = 100 \frac{\tan(\beta)}{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}$$

Es folgt:

$$h = p \tan(\alpha) = 100 \frac{\tan(\alpha) \tan(\beta)}{\tan(\alpha) + \tan(\beta)} = 100 \frac{1}{\cot(\alpha) + \cot(\beta)}$$

Und mit $\cot(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ und $\cot(\beta) = 1$ erhalten wir:

$$h = \frac{100 \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \approx 63,40 \text{ m}$$

14. Aufgabe

Finden Sie eine Parametrisierung $g(t) = \vec{p} + t \cdot \vec{v}$ für die folgenden Geraden:

- (i) die Gerade im \mathbf{R}^2 , die durch die Punkte $\vec{q} = (1, 4)$ und $\vec{r} = (-3, -8)$ geht.

$$g(t) = (1, 4) + t \cdot (1, 3)$$

- (ii) die Gerade im \mathbf{R}^3 , die durch die Punkte $\vec{q} = (1, 4, 2)$ und $\vec{r} = (7, 4, 1)$ geht.

$$g(t) = (1, 4, 2) + t \cdot (6, 0, -1)$$

15. Aufgabe

Sei $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definiert durch $f(x) = 2 \cdot x + 7$. Der Graph dieser Funktion ist eine Gerade. Parametrisieren Sie diese Gerade jeweils so durch eine Kurve $c: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ mit $c(t) = \vec{p} + t \cdot \vec{v}$, dass

- (i) man zum Zeitpunkt $t = 0$ auf dieser Gerade im Punkte $(1, 9)$ startet und sich auf dieser Geraden mit gleichförmiger Geschwindigkeit in die Richtung der positiven x -Werte bewegt.

$$g(t) = (1, 9) + t \cdot (1, 2)$$

- (ii) man zum Zeitpunkt $t = 0$ auf dieser Gerade im Punkte $(0, 7)$ startet und sich auf dieser Geraden mit gleichförmiger Geschwindigkeit in die Richtung der positiven x -Werte bewegt. Zum Zeitpunkt $t = 300$ soll man im Punkte $(4, 15)$ sein.

$$g(t) = (0, 7) + t \cdot (4/300, 8/300)$$

- (iii) man zum Zeitpunkt $t = 0$ auf dieser Gerade im Punkte $(-1, 5)$ startet und zum Zeitpunkt $t = 10$ im Punkte $(4, 15)$ ist. Jetzt soll aber der Abstand vom Punkte $(-1, 5)$ quadratisch wachsen.

$$g(t) = (-1, 5) + t^2 \cdot (5/100, 10/100)$$

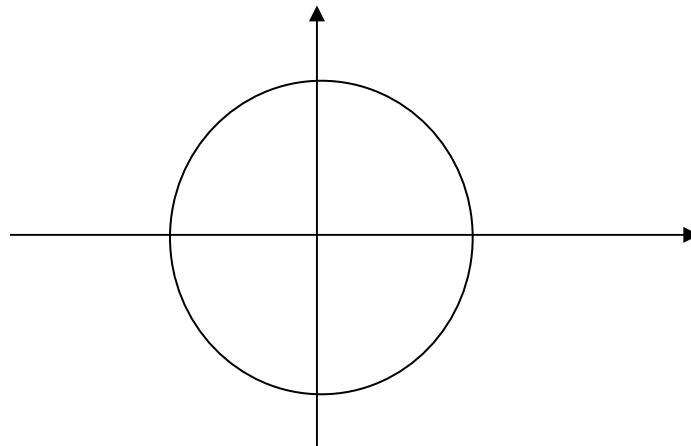
- (iv) man zum Zeitpunkt $t = 0$ auf dieser Gerade im Punkte $(1, 9)$ startet und immer zwischen den Punkten $(-1, 5)$ und $(3, 13)$ hin- und hergeht.

$$g(t) = (1, 9) + \sin(t) \cdot (2, 4)$$

16. Aufgabe

Sei $c : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ definiert durch $c(t) = (\sin(t), \cos(t))$

- (i) Zeichnen Sie ein Bild der Kurve, die durch c parametrisiert wird.



- (ii) Warum gibt es keine Möglichkeit, so eine Kurve als Graphen einer Funktion darzustellen?

Weil hier für (fast) alle x -Werte 2 y -Werte zugeordnet sind.

17. Aufgabe

Berechnen Sie den Kosinus des Winkels zwischen den folgenden Vektoren \vec{v} und \vec{w}

(i) $\vec{v} = (1, 0), \vec{w} = (0, 1)$

$$\cos = \frac{0 + 0}{1} = 0 \quad (\text{Wir haben natürlich einen rechten Winkel})$$

(ii) $\vec{v} = (2, 1), \vec{w} = (-1, 4)$

$$\cos = \frac{-2 + 4}{\sqrt{5} \sqrt{17}} = \frac{2}{\sqrt{85}}$$

(iii) $\vec{v} = (1, 1, 2), \vec{w} = (-2, 3, -1)$

$$\cos = \frac{-2 + 3 - 2}{\sqrt{6} \sqrt{14}} = \frac{-1}{2\sqrt{21}}$$

18. Aufgabe

- (i) Sei $g(t) = (2, 1) + t \cdot (4, 3)$. Berechnen Sie den Abstand des Punktes $\vec{q} = (5, 2)$ von g . Machen Sie eine Zeichnung.

Es war der Abstand $d = \sqrt{|\vec{q} - \vec{p}|^2 - \langle \vec{v}, \vec{q} - \vec{p} \rangle^2}$. \vec{v} musste die Länge 1 haben.

Wir setzen $\vec{v} = \frac{1}{5}(4, 3)$. Dann ist $|\vec{q} - \vec{p}|^2 = |(3, 1)|^2 = 9 + 1 = 10$

$$\text{und } \langle \vec{v}, \vec{q} - \vec{p} \rangle = \left\langle \frac{1}{5}(4, 3), (3, 1) \right\rangle = \frac{12 + 3}{5} = 3$$

Wir erhalten den Abstand $d^2 = 10 - 9 = 1$ und damit auch $d = 1$.

- (ii) Sei $g(t) = (2, 1, -1) + t \cdot (-2, 1, 2)$. Berechnen Sie den Abstand des Punktes $\vec{q} = (-3, 2, 7)$ von g .

Wir setzen $\vec{v} = \frac{1}{3}(-2, 1, 2)$. Dann ist $|q - p|^2 = |(-5, 1, 8)|^2 = 25 + 1 + 64 = 90$ und

$$\langle v, q - p \rangle = \left\langle \frac{1}{3}(-2, 1, 2), (-5, 1, 8) \right\rangle = \frac{10 + 1 + 16}{3} = 9$$

Wir erhalten den Abstand $d^2 = 90 - 81 = 9$ und damit $d = 3$.

19. Aufgabe

Untersuchen Sie die folgenden Geradenpaare. Entscheiden Sie jeweils, ob die beiden Geraden g und h windschief oder parallel sind oder sich schneiden. Falls die Geraden parallel sind, berechnen Sie den Abstand, falls sich die Geraden schneiden, berechnen Sie den Schnittpunkt.

- (i) $g(t) = (-7, 3, -1) + t \cdot (3, -1, -2)$, $h(t) = (-1, 0, 2) + t \cdot (-12, 4, 8)$

Da $(-12, 4, 8) = (-4) \cdot (3, -1, -2)$ ist, sind die Geraden parallel. Ich berechne den Abstand von $(-1, 0, 2)$ von der Geraden g .

Ich setze $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{14}}(3, -1, -2)$ Dann ist $|(-1, 0, 2) - (-7, 3, -1)|^2 =$

$$|(6, -3, 3)|^2 = 36 + 9 + 9 = 54 \text{ und}$$

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{14}}(3, -1, -2), (6, -3, 3) \right\rangle = \frac{18 + 3 - 6}{\sqrt{14}} = \frac{15}{\sqrt{14}}$$

Wir erhalten den Abstand $d^2 =$

$$54 - \frac{225}{14} = \frac{756 - 225}{14} = \frac{531}{14} \text{ und damit } d \text{ ungefähr } 6,16$$

$$(ii) \quad g(t) = (-1, 0, 1) + t \cdot (1, 3, -2), \quad h(t) = (11, -4, -13) + t \cdot (2, 1, 1)$$

$$\text{Es gilt } g(t_1) = h(t_2) \quad \leftrightarrow$$

$$(i) \quad -1 + t_1 = 11 + 2t_2$$

$$(ii) \quad 3t_1 = -4 + t_2$$

$$(iii) \quad 1 - 2 \cdot t_1 = -13 + t_2$$

$$\leftrightarrow$$

$$(i) \quad t_1 - 2t_2 = 12$$

$$(ii) \quad 3t_1 - t_2 = -4$$

$$(iii) \quad 2t_1 + t_2 = 14$$

$$\leftrightarrow$$

$$(i) \quad t_1 - 2t_2 = 12$$

$$(ii) \quad 5t_2 = -40$$

$$(iii) \quad 5t_2 = -10$$

Diese Gleichungen haben offensichtlich keine gemeinsame Lösung, die Richtungsvektoren der Geraden sind linear unabhängig, d.h. die beiden Geraden sind windschief.

$$(iii) \quad g(t) = (10, -3, -7) + t \cdot (3, -1, -2), \quad h(t) = (-9, -5, -6) + t \cdot (2, 1, 1)$$

$$\text{Es gilt } g(t_1) = h(t_2) \quad \leftrightarrow$$

$$(i) \quad 10 + 3t_1 = -9 + 2t_2$$

$$(ii) \quad -3 - t_1 = -5 + t_2$$

$$(iii) \quad -7 - 2 \cdot t_1 = -6 + t_2$$

$$\leftrightarrow$$

$$(i) \quad 3t_1 - 2t_2 = -19$$

$$(ii) \quad t_1 + t_2 = 2$$

$$(iii) \quad 2t_1 + t_2 = -1$$

$$\leftrightarrow$$

$$(i) \quad t_1 + t_2 = 2$$

$$(ii) \quad 3t_1 - 2t_2 = -19$$

$$(iii) \quad 2t_1 + t_2 = -1$$

\Leftrightarrow

$$(i) \quad t_1 + t_2 = 2$$

$$(ii) \quad -5 t_2 = -25$$

$$(iii) \quad - t_2 = -5$$

Alle diese drei Gleichungen werden gelöst durch $t_2 = 5$ und $t_1 = -3$

Die Geraden schneiden sich, der gemeinsame Schnittpunkt ist:

$$g(-3) = (10, -3, -7) - 3 \cdot (3, -1, -2) = (1, 0, -1) =$$

$$h(5) = (-9, -5, -6) + 5 \cdot (2, 1, 1)$$