

1. Aufgabe

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen. Falls für eine Matrix die Determinante $= 0$ ist, bestimmen Sie geeignete Zahlen r_1, r_2 und (im Falle der 3×3 - Matrizen) $r_3 \in \mathbf{R}$ mit denen Sie die Zeilenvektoren der Matrizen als linear abhängig nachweisen können.

$$(i) \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\det(A_1) = 3 - 10 = -7$$

$$\det(A_2) = 3 + 8 = 11$$

$$\det(A_3) = -2 - 10 = -12$$

$$(ii) \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 8 & 1 \\ 7 & 22 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_1) = -8 - 3 + 10 - 1 - 24 - 10 = -36$$

$$\det(A_2) = 16 + 7 + 44 - 112 + 1 + 44 = 0$$

einfaches Gleichungslösen liefert:

$$(-2)(-2, 1, 2) + 3(1, 8, 1) = (7, 22, -1)$$

2. Aufgabe

Geben Sie für die folgenden Gleichungssysteme immer die vollständige Lösungsmenge an:

$$(i) \quad \begin{array}{rcl} x_1 & + & 5 \cdot x_2 = 14 \\ 2 \cdot x_1 & + & 3 \cdot x_2 = 7 \end{array} \quad \text{ist äquivalent zu}$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 & + & 5 \cdot x_2 = 14 \\ & & 7 \cdot x_2 = 21 \end{array} \quad \text{ist äquivalent zu}$$

$$x_2 = 3, \quad x_1 = 14 - 15 = -1$$

$$(ii) \quad \begin{array}{rcl} 2 \cdot x_1 & + & 6 \cdot x_2 = 14 \\ 3 \cdot x_1 & + & 9 \cdot x_2 = 7 \end{array} \quad \text{ist äquivalent zu}$$

$$\begin{array}{rcl} 2 \cdot x_1 & + & 6 \cdot x_2 = 14 \\ & & 0 = 28 \end{array}$$

Das bedeutet: Dieses Gleichungssystem hat keine Lösung

$$(iii) \quad \begin{array}{rcl} 7 \cdot x_1 & + & 21 \cdot x_2 = 56 \\ 3 \cdot x_1 & + & 9 \cdot x_2 = 24 \end{array} \quad \text{ist äquivalent zu}$$

$$\begin{array}{rcl} 7 \cdot x_1 & + & 21 \cdot x_2 = 56 \\ & & 0 = 0 \end{array}$$

Aus $7 \cdot x_1 + 21 \cdot x_2 = 56$ folgt: $x_1 = 8 - 3x_2$, also gilt:

Die Lösungsmenge ist $\{ (x_1, x_2) = (8 - 3t, t) \mid t \in \mathbb{R} \}$

$$\begin{array}{rclcl}
 \text{(iv)} & x_1 & + 3 \cdot x_2 & + 5 \cdot x_3 & = 9 \\
 & 2 \cdot x_1 & - 2 \cdot x_2 & + x_3 & = -8 \\
 & -x_1 & + x_2 & + 4 \cdot x_3 & = 13 & \text{ist äquivalent zu}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl}
 & x_1 & + 3 \cdot x_2 & + 5 \cdot x_3 & = 9 \\
 & & 8 \cdot x_2 & + 9 \cdot x_3 & = 26 \\
 & & 4 \cdot x_2 & + 9 \cdot x_3 & = 22 & \text{ist äquivalent zu}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl}
 & x_1 & + 3 \cdot x_2 & + 5 \cdot x_3 & = 9 \\
 & & 8 \cdot x_2 & + 9 \cdot x_3 & = 26 \\
 & & & 9 \cdot x_3 & = 18 & \text{ist äquivalent zu}
 \end{array}$$

$$x_3 = 2, \quad 8x_2 = 26 - 18 = 8, \text{ also } x_2 = 1, \quad x_1 = 9 - 3 - 10 = -4$$

$$\begin{array}{rclcl}
 \text{(v)} & -2 \cdot x_1 & + x_2 & + 2 \cdot x_3 & = 3 \\
 & x_1 & + 8 \cdot x_2 & + x_3 & = 2 \\
 & 7 \cdot x_1 & + 22 \cdot x_2 & - x_3 & = 1 & \text{ist äquivalent zu}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl}
 & x_1 & + 8 \cdot x_2 & + x_3 & = 2 \\
 & -2 \cdot x_1 & + x_2 & + 2 \cdot x_3 & = 3 \\
 & 7 \cdot x_1 & + 22 \cdot x_2 & - x_3 & = 1 & \text{ist äquivalent zu}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl}
 & x_1 & + 8 \cdot x_2 & + x_3 & = 2 \\
 & & + 17 \cdot x_2 & + 4 \cdot x_3 & = 7 \\
 & & 34 \cdot x_2 & + 8 \cdot x_3 & = 13 & \text{ist äquivalent zu}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl}
 & x_1 & + 8 \cdot x_2 & + x_3 & = 2 \\
 & & + 17 \cdot x_2 & + 4 \cdot x_3 & = 7 \\
 & & & & 0 = 1
 \end{array}$$

Das bedeutet, es gibt keine Lösung für diese Gleichungen, die Lösungsmenge ist leer.

$$\begin{array}{rclcl}
 \text{(vi)} & -2 \cdot x_1 & + x_2 & + 2 \cdot x_3 & = -2 \\
 & x_1 & + 8 \cdot x_2 & + x_3 & = 20 \\
 & 7 \cdot x_1 & + 22 \cdot x_2 & - x_3 & = 64 \quad \text{ist äquivalent zu}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl}
 & x_1 & + 8 \cdot x_2 & + x_3 & = 20 \\
 & -2 \cdot x_1 & + x_2 & + 2 \cdot x_3 & = -2 \\
 & 7 \cdot x_1 & + 22 \cdot x_2 & - x_3 & = 64 \quad \text{ist äquivalent zu}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl}
 & x_1 & + 8 \cdot x_2 & + x_3 & = 20 \\
 & & + 17 \cdot x_2 & + 4 \cdot x_3 & = 38 \\
 & & 34 \cdot x_2 & + 8 \cdot x_3 & = 76 \quad \text{ist äquivalent zu}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl}
 & x_1 & + 8 \cdot x_2 & + x_3 & = 20 \\
 & & + 17 \cdot x_2 & + 4 \cdot x_3 & = 38 \\
 & & & & 0 = 0
 \end{array}$$

Damit kann x_3 beliebig sein, es folgt $x_2 = \frac{1}{17}(38 - 4x_3)$ und

$$x_1 = 20 - \frac{8}{17}(38 - 4x_3) - x_3 = \frac{340 - 304 + 32x_3 - 17x_3}{17} =$$

$$= \frac{36 + 15x_3}{17} \quad \text{Wir erhalten für die Lösungsmenge L:}$$

$$L = \left\{ (x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{17}(36 + 15t, 38 - 4t, 17t) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

3. Aufgabe

Sei $n \in \mathbb{N}$, und sei D eine $(n \times n)$ -Diagonalmatrix, $D =$

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ 0 & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= (d_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \text{ mit } d_{ij} = 0 \text{ für } i > j.$$

Zeigen Sie: $\det(D) = \prod_{i=1}^n d_{ii} = d_{11} \cdot d_{22} \cdot \dots \cdot d_{nn}.$

Beweis: folgt mit einem Induktionsargument sofort aus der rekursiven Definition der Determinante für $n \times n$ -Matrizen.

4. Aufgabe

Sei $n = 2$ und A eine (2×2) -Matrix, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Weiter sei $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ die Einheitsmatrix, das neutrale Element der Multiplikation.

Zeigen Sie: Es gibt eine Matrix A^{-1} , für die gilt: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ genau dann, wenn $\det A \neq 0$. Dann gilt: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$.

Beweis :

Es sei $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ und es gelte $A \cdot B = E$. Wir werden jetzt jeweils 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten lösen, dabei sind die b_{ij} unsere Unbekannten.

Wir erhalten:

$$a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 1$$

$$a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = 0 \quad \text{ist äquivalent mit:}$$

$$a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 1$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})b_{21} = -a_{21} \quad \text{ist äquivalent mit:}$$

$$b_{21} = \frac{-a_{21}}{\det A} \quad \text{und}$$

$$b_{11} = \frac{1}{a_{11}} + \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}\det A} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + a_{12}a_{21}}{a_{11}\det A} = \frac{a_{22}}{\det A}$$

Genauso erhält man

$$b_{22} = \frac{a_{11}}{\det A} \quad \text{und} \quad b_{12} = \frac{-a_{12}}{\det A}$$

5. Aufgabe

Sei A eine (2×2) -Matrix in der Gestalt :

$$A = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) & r \cdot \sin(\varphi) \\ -r \cdot \sin(\varphi) & r \cdot \cos(\varphi) \end{pmatrix}, r \in \mathbf{R}, r > 0, \varphi \in \mathbf{R} \text{ beliebig.}$$

Sei weiter $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ ein beliebiger Vektor $\neq \vec{0} \in \mathbf{R}^2$. Sei schließlich

$$\vec{w} = A \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) & r \cdot \sin(\varphi) \\ -r \cdot \sin(\varphi) & r \cdot \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie:

$$(i) \quad |\vec{w}| = r \cdot |\vec{v}|$$

Es ist $\vec{w} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) v_1 + r \sin(\varphi) v_2 \\ -r \sin(\varphi) v_1 + r \cos(\varphi) v_2 \end{pmatrix}$. Es folgt:

$$\begin{aligned} |\vec{w}|^2 &= (r^2 \cos^2(\varphi) + r^2 \sin^2(\varphi)) v_1^2 + (r^2 \cos^2(\varphi) + r^2 \sin^2(\varphi)) v_2^2 + \\ &\quad + (2r^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) - 2r^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi)) v_1 v_2 = \\ &= r^2 \cdot |\vec{v}|^2 \end{aligned}$$

$$(ii) \quad \cos(\text{Winkel zwischen } \vec{v} \text{ und } \vec{w}) = \cos(\varphi)$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle &= r \cos(\varphi) v_1^2 + r \sin(\varphi) v_1 v_2 - r \sin(\varphi) v_1 v_2 + r \cos(\varphi) v_2^2 = \\ &= |\vec{v}| |\vec{w}| \cos(\varphi) \end{aligned}$$

Wegen dieser beiden Eigenschaften heißt A eine **Drehstreckung**.

6. Aufgabe

Sei A eine (2×2) -Matrix in der Gestalt :

$$A = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) & r \cdot \sin(\varphi) \\ -r \cdot \sin(\varphi) & r \cdot \cos(\varphi) \end{pmatrix}, r \in \mathbf{R}, r > 0, \varphi \in \mathbf{R} \text{ beliebig.}$$

Zeigen Sie: $\det A = r^2$

trivial

7. Aufgabe

Seien A_1 und A_2 zwei (2×2) -Matrizen in der Gestalt :

$$A_1 = \begin{pmatrix} r_1 \cdot \cos(\varphi_1) & r_1 \cdot \sin(\varphi_1) \\ -r_1 \cdot \sin(\varphi_1) & r_1 \cdot \cos(\varphi_1) \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} r_2 \cdot \cos(\varphi_2) & r_2 \cdot \sin(\varphi_2) \\ -r_2 \cdot \sin(\varphi_2) & r_2 \cdot \cos(\varphi_2) \end{pmatrix}$$

$$\text{Zeigen Sie: } A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} (r_1 \cdot r_2) \cdot \cos(\varphi_1 + \varphi_2) & (r_1 \cdot r_2) \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \\ -(r_1 \cdot r_2) \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2) & (r_1 \cdot r_2) \cdot \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \end{pmatrix}$$

Hinweis: Benutzen Sie die Additionstheoreme für \sin und \cos :

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

Der Beweis wird nur für $c_{11} :=$ das oberste Element in der Hauptdiagonale der Produktmatrix geführt:

$$\text{Es ist } c_{11} = r_1 r_2 \cos(\varphi_1) \cos(\varphi_2) - r_1 r_2 \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2) = r_1 r_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2)$$

8. Aufgabe

$$\text{Sei } M = \left\{ \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) & r \cdot \sin(\varphi) \\ -r \cdot \sin(\varphi) & r \cdot \cos(\varphi) \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R}, r > 0 \quad \varphi \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \right\}$$

Zeigen Sie:

M ist mit der Matrizenmultiplikation eine kommutative Gruppe.

Mit Aufgabe 7 haben Sie schon alle Arbeit getan:

Die Multiplikation zweier Elemente aus M ergibt wieder ein Element aus M, das haben wir gerade bewiesen.

Das Assoziativgesetz ist erfüllt, weil es in der Menge der Matrizen stets gilt.

Das neutrale Element $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot \cos(0) & 1 \cdot \sin(0) \\ -1 \cdot \sin(0) & 1 \cdot \cos(0) \end{pmatrix}$ gehört zu M.

Sei $A = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) & r \cdot \sin(\varphi) \\ -r \cdot \sin(\varphi) & r \cdot \cos(\varphi) \end{pmatrix}$ aus M beliebig. Dann ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \cdot \cos(-\varphi) & \frac{1}{r} \cdot \sin(-\varphi) \\ -\frac{1}{r} \cdot \sin(-\varphi) & \frac{1}{r} \cdot \cos(-\varphi) \end{pmatrix} \text{ das inverse Element.}$$

Das Kommutativgesetz schließlich gilt, weil der Multiplikation der Radien r_1 und r_2 und die Addition der Winkel kommutativ sind.