

1. Aufgabe

Überprüfen Sie die folgenden Gleichungen. Wenn sie korrekt sind, beweisen Sie sie (ohne Wahrheitstafel). Wenn sie nicht korrekt sind, finden sie eine Wahrheitswertbelegung für die Variablen, bei denen das Gleichheitszeichen falsch ist.

- a. Für alle $a \in \{0,1\}$ gilt: $a \cdot 0 = 1$
Falsch, denn $1 \cdot 0 = 0$
- b. Für alle $a \in \{0,1\}$ gilt: $a + \bar{a} = 1$
Wahr, denn $0 + 1 = 1$
- c. Für alle $a \in \{0,1\}$ gilt: $a \cdot \bar{a} = 0$
Wahr, denn $1 \cdot 0 = 0$
- d. Für alle $a, b \in \{0,1\}$ gilt: $\overline{a \cdot b} = a \cdot \bar{b}$
Falsch, denn $\overline{1 \cdot 1} = \overline{0 \cdot 1} = \bar{0} = 1$, aber $1 \cdot \bar{1} = 1 \cdot 0 = 0$
- e. Für alle $a, b \in \{0,1\}$ gilt: $\overline{a \cdot b} = a + \bar{b}$
Wahr, folgt sofort mit DeMorgan und dem Gesetz der doppelten Verneinung

2. Aufgabe

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

- a. $a + (a + \bar{a})$
 $a + (a + \bar{a}) = a + 1 = 1$
- b. $a \cdot \bar{a} \cdot a$
 $a \cdot \bar{a} \cdot a = 0 \cdot a = 0$
- c. $a \cdot (b + \bar{a})$
 $a \cdot (b + \bar{a}) = a \cdot b + a \cdot \bar{a} = a \cdot b + 0 = a \cdot b$
- d. $a \cdot \bar{b} + b$
 $a \cdot \bar{b} + b = a + b$ (Redundanz)

- e. $a \cdot \bar{b} + a \cdot b$
 $a \cdot \bar{b} + a \cdot b = a \cdot (\bar{b} + b) = a \cdot 1 = a$
- f. $(a + b) \cdot (b + \bar{a})$
 $(a + b) \cdot (b + \bar{a}) = a \cdot b + a \cdot \bar{a} + b \cdot b + b \cdot \bar{a} =$
 $= a \cdot b + 0 + b + b \cdot \bar{a} = (a + \bar{a}) \cdot b + b = 1 \cdot b + b = b + b = b$
- g. $a + \overline{a \cdot b} + b \cdot c$
 $a + \overline{a \cdot b} + b \cdot c = a + \bar{a} + \bar{b} + b \cdot c = 1$
- h. $\overline{a + b} + a \cdot \bar{b}$
 $\overline{a + b} + a \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot \bar{b} + a \cdot \bar{b} = (\bar{a} + a) \cdot \bar{b} = 1 \cdot \bar{b} = \bar{b}$

3. Aufgabe

Das Konsensgesetz lautet in der Primärform:

$$\text{Für alle } x, y, z \text{ gilt: } x \cdot y + \bar{x} \cdot z + y \cdot z = x \cdot y + \bar{x} \cdot z$$

- a. Warum kann man daraus nicht folgern:

$$\text{Für alle } x, y, z \text{ gilt: } \bar{x} \cdot z + y \cdot z = \bar{x} \cdot z$$

Ich möchte, dass Sie „gruppentheoretisch“ bzw. algebraisch erklären können, warum man hier nicht einfach auf beiden Seiten $x \cdot y$ abziehen kann.

Es gibt bezüglich der Addition kein inverses Element, es gibt kein Minus, denn $1 + 0 = 1$, $1 + 1 = 1$ bedeutet, dass ich durch keine Addition zu 1 das neutrale Element 0 der Addition erhalte. Es gibt also kein -1 .

- b. Überprüfen Sie, ob der Satz

$$\text{Für alle } x, y, z \text{ gilt: } \bar{x} \cdot z + y \cdot z = \bar{x} \cdot z$$

trotzdem gilt. Falls das nicht der Fall sein sollte, finden Sie heraus, für welche Wahrheitswerte von x , y , und z dieser Satz nicht gilt.¹

x	y	z	$\bar{x} \cdot z$	$y \cdot z$	$\bar{x} \cdot z + y \cdot z$	\neq
0	0	0	0	0	0	
0	0	1	1	0	1	
0	1	0	0	0	0	
0	1	1	1	1	1	
1	0	0	0	0	0	
1	0	1	0	0	0	
1	1	0	0	0	0	
1	1	1	0	1	1	Nur hier

- c. Machen Sie das entsprechende für die Dualform. Erklären Sie auch hier zunächst, warum man in der Beziehung:

$$\text{Für alle } x, y, z \text{ gilt: } (x + y) \cdot (\bar{x} + z) \cdot (y + z) = (x + y) \cdot (\bar{x} + z)$$

nicht einfach auf beiden Seiten $(x + y)$ „kürzen“ kann.

Man kann $(x + y)$ nicht kürzen, weil dieser Ausdruck auch den Wert 0 haben kann und man auch in der Booleschen Algebra die 0 nicht kürzen kann. Sonst könnte man „zeigen“:

$$0 = 0 \rightarrow 1 \cdot 0 = 0 \cdot 0 \rightarrow 1 = 0.$$

Genauso könnte man beispielsweise in der Welt der natürlichen Zahlen zeigen:

$$0 = 0 \rightarrow 7 \cdot 0 = 3 \cdot 0 \rightarrow 7 = 3.^2$$

¹ In diesem Falle muss für x , y und z ein „Konsens“ vorliegen, der wahrscheinlich diesem Gesetz seinen Namen gegeben hat.

² Vgl. unser „Rätsel“ in Abschnitt 5.3 im 5. Kapitel

- d. Überprüfen Sie, ob der Satz

$$\text{Für alle } x, y, z \text{ gilt: } (\bar{x} + z) \cdot (y + z) = (\bar{x} + z)$$

trotzdem gilt. Falls das nicht der Fall sein sollte, finden Sie heraus, für welche Wahrheitswerte von x , y , und z dieser Satz nicht gilt. Wenn Sie Aufgabenteil c richtig gemacht haben, ist Ihnen hier die Antwort sehr schnell klar.¹

Dieser Satz ist nicht richtig. Er gilt nur dann nicht, falls $(x + y) = 0$ ist (sonst könnte ich „kürzen“, falls also $x = 0$ und $y = 0$ sind und auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens verschiedene Wahrheitswerte stehen. Das ist nur für $z = 0$ der Fall, hier erhalten wir: $0 = 1$. Bei $z = 1$ ist die Gleichung wahr: $1 = 1$.

Insgesamt: Es muss $x = y = z = 0$ sein.

Für Ungläubige:

x	y	z	$\bar{x} + z$	$y + z$	$(\bar{x} + z) \cdot (y + z)$	\neq
0	0	0	1	0	0	Nur hier
0	0	1	1	1	1	
0	1	0	1	1	1	
0	1	1	1	1	1	
1	0	0	0	0	0	
1	0	1	1	1	1	
1	1	0	0	1	0	
1	1	1	1	1	1	

¹ Es gilt dieselbe Bemerkung wie bei Aufgabenteil b.

4. Aufgabe

f , g und h seien Boolesche Funktionen $\{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen ohne die Benutzung von Wahrheitstafeln:

- a. $g(f + \bar{f} \cdot h) + \bar{f} \cdot h = f \cdot g + \bar{f} \cdot h$
- $$\begin{aligned} g(f + \bar{f} \cdot h) + \bar{f} \cdot h &= g((f + \bar{f}) \cdot (f + h)) + \bar{f} \cdot h = \\ &= g(1 \cdot (f + h)) + \bar{f} \cdot h = g \cdot (f + h) + \bar{f} \cdot h = \\ &= g \cdot f + g \cdot h + \bar{f} \cdot h = g \cdot f + \bar{f} \cdot h \text{ (Konsensgesetz)} \end{aligned}$$
- b. $(f + \bar{g})(f + \bar{h})(g + h) = f(g + h)$
- $$\begin{aligned} (f + \bar{g})(f + \bar{h})(g + h) &= (f \cdot f + f \cdot \bar{h} + \bar{g} \cdot f + \bar{g} \cdot \bar{h}) \cdot (g + h) = \\ &= (f + f \cdot \bar{h} + \bar{g} \cdot f + \bar{g} \cdot \bar{h}) \cdot (g + h) = (f \cdot (1 + \bar{h} + \bar{g}) + \bar{g} \cdot \bar{h}) \cdot (g + h) = \\ &= (f \cdot 1 + \bar{g} \cdot \bar{h}) \cdot (g + h) = (f + \bar{g} \cdot \bar{h}) \cdot (g + h) = \\ &= f \cdot (g + h) + \bar{g} \cdot \bar{h} \cdot (g + h) = f \cdot (g + h) + \bar{g} \cdot \bar{h} \cdot g + \bar{g} \cdot \bar{h} \cdot h = \\ &= f \cdot (g + h) + 0 + 0 = f \cdot (g + h) \end{aligned}$$
- c. $(f + g + h)(f + g + \bar{h})(f + \bar{g} + h) = f + g \cdot h$
- $$\begin{aligned} (f + g + h)(f + g + \bar{h})(f + \bar{g} + h) &= (\text{da } f \cdot f = f \text{ ist}) = \\ &= f(1 + \text{Rest}) + (g + h)(g + \bar{h})(\bar{g} + h) = \\ &= (\text{da } x \cdot \bar{x} = 0 \text{ und } y + 0 = y \text{ ist}) = f + g \cdot h + h \cdot g = f + g \cdot h \end{aligned}$$
- d. $h(\overline{f + g}) + \bar{f} \cdot g \cdot h = \bar{f} \cdot h$
- $$\begin{aligned} h(\overline{f + g}) + \bar{f} \cdot g \cdot h &= h \cdot \bar{f} \cdot \bar{g} + \bar{f} \cdot g \cdot h = h \cdot \bar{f} \cdot (\bar{g} + g) = \bar{f} \cdot h \end{aligned}$$
- e. $f \cdot g + \overline{f \cdot \bar{g} + h} + \bar{f} \cdot h = \bar{f} + g$
- $$\begin{aligned} f \cdot g + \overline{f \cdot \bar{g} + h} + \bar{f} \cdot h &= f \cdot g + \overline{f \cdot \bar{g} \cdot \bar{h} + f \cdot h} = \\ &= f \cdot g + (\bar{f} + g) \cdot \bar{h} + \bar{f} \cdot h = \bar{f} \cdot (\bar{h} + h) + g \cdot f + g \cdot \bar{h} = \\ &= \bar{f} + g \cdot f + g \cdot \bar{h} = \bar{f} + g + g \cdot \bar{h} = \bar{f} + g \cdot (1 + \bar{h}) = \\ &= \bar{f} + g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{f.} \quad & (f + g + h) \cdot \overline{(f \cdot g \cdot h)} = f \cdot \bar{g} + g \cdot \bar{h} + h \cdot \bar{f} \\
 & (f + g + h) \cdot \overline{(f \cdot g \cdot h)} = (f + g + h) \cdot (\bar{f} + \bar{g} + \bar{h}) = \\
 & = 0 + f \cdot \bar{g} + f \cdot \bar{h} + g \cdot \bar{f} + 0 + g \cdot \bar{h} + h \cdot \bar{f} + h \cdot \bar{g} + 0 = \\
 & = f \cdot \bar{g} + g \cdot \bar{h} + h \cdot \bar{f} + f \cdot \bar{h} + g \cdot \bar{f} + h \cdot \bar{g} = \\
 & \quad \text{Konsensgesetz mit } x=g, y=\bar{h}, z=f \\
 & = f \cdot \bar{g} + g \cdot \bar{h} + h \cdot \bar{f} + g \cdot \bar{f} + h \cdot \bar{g} = \\
 & \quad \text{Konsensgesetz mit } x=\bar{h}, y=g, z=\bar{f} \\
 & = f \cdot \bar{g} + g \cdot \bar{h} + h \cdot \bar{f} + h \cdot \bar{g} = \\
 & \quad \text{Konsensgesetz mit } x=\bar{f}, y=h, z=\bar{g} \\
 & = f \cdot \bar{g} + g \cdot \bar{h} + h \cdot \bar{f}
 \end{aligned}$$

5. Aufgabe

Benutzen Sie die Methode der Karnaugh-Veitch-Diagramme, um die folgenden Funktionen zu vereinfachen:

a.

	x_1	\bar{x}_1
x_2	1	
\bar{x}_2	1	1

$$\begin{array}{ccc}
 & x_1 & \bar{x}_1 \\
 x_2 & 1 & \\
 \bar{x}_2 & 1 & 1
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 & x_1 & \bar{x}_1 \\
 x_2 & 1 & \\
 \bar{x}_2 & 1 &
 \end{array}
 +
 \begin{array}{ccc}
 & x_1 & \bar{x}_1 \\
 x_2 & & \\
 \bar{x}_2 & 1 & 1
 \end{array}$$

$$= x_1 + \bar{x}_2$$

b.

	x_1	x_1	$\overline{x_1}$	$\overline{x_1}$	
x_2		1	1		$\overline{x_4}$
x_2	1	1			x_4
$\overline{x_2}$	1	1			x_4
$\overline{x_2}$					$\overline{x_4}$
	x_3	$\overline{x_3}$	$\overline{x_3}$	x_3	

=

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & x_1 & x_1 & \overline{x_1} & \overline{x_1} & & x_1 & x_1 & \overline{x_1} & \overline{x_1} & \\
 x_2 & & 1 & 1 & & \overline{x_4} & x_2 & & & & \overline{x_4} \\
 x_2 & & & & & x_4 & x_2 & 1 & 1 & & x_4 \\
 \overline{x_2} & & & & & x_4 & \overline{x_2} & 1 & 1 & & x_4 \\
 \overline{x_2} & & & & & \overline{x_4} & \overline{x_2} & & & & \overline{x_4} \\
 & x_3 & \overline{x_3} & \overline{x_3} & x_3 & & x_3 & \overline{x_3} & \overline{x_3} & x_3 &
 \end{array}
 +
 \begin{array}{ccccccccc}
 & x_1 & x_1 & \overline{x_1} & \overline{x_1} & & x_1 & x_1 & \overline{x_1} & \overline{x_1} & \\
 x_2 & & 1 & 1 & & \overline{x_4} & x_2 & & & & \overline{x_4} \\
 x_2 & & & & & x_4 & x_2 & 1 & 1 & & x_4 \\
 \overline{x_2} & & & & & x_4 & \overline{x_2} & 1 & 1 & & x_4 \\
 \overline{x_2} & & & & & \overline{x_4} & \overline{x_2} & & & & \overline{x_4} \\
 & x_3 & \overline{x_3} & \overline{x_3} & x_3 & & x_3 & \overline{x_3} & \overline{x_3} & x_3 &
 \end{array}
 =$$

$$= x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4} + x_1 \cdot x_4$$

c.

	x_1	x_1	$\overline{x_1}$	$\overline{x_1}$	
x_2	1	1		1	$\overline{x_4}$
x_2	1	1	1		x_4
$\overline{x_2}$	1				x_4
$\overline{x_2}$		1			$\overline{x_4}$
	x_3	$\overline{x_3}$	$\overline{x_3}$	x_3	

(Hinweis: Bei Aufgabe c reichen 4 Primimplikanten!)

=

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & x_1 & x_1 & \overline{x_1} & \overline{x_1} & & & x_1 & x_1 & \overline{x_1} & \overline{x_1} & & & & & \\
 x_2 & 1 & & & 1 & \overline{x_4} & & x_2 & & 1 & & \overline{x_4} & & & & \\
 x_2 & & & & & x_4 & + & x_2 & & & & x_4 & + & & & \\
 \overline{x_2} & & & & & x_4 & & \overline{x_2} & & & & \overline{x_4} & & & & \\
 \overline{x_2} & & & & & \overline{x_4} & & \overline{x_2} & & 1 & & \overline{x_4} & & & & \\
 & x_3 & \overline{x_3} & \overline{x_3} & x_3 & & & x_3 & \overline{x_3} & \overline{x_3} & x_3 & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & x_1 & x_1 & \overline{x_1} & \overline{x_1} & & & x_1 & x_1 & \overline{x_1} & \overline{x_1} & & & & & \\
 x_2 & & & & & \overline{x_4} & & x_2 & & & & \overline{x_4} & & & & \\
 x_2 & 1 & & & & x_4 & + & x_2 & & 1 & 1 & & x_4 & = & & \\
 \overline{x_2} & 1 & & & & x_4 & & \overline{x_2} & & & & \overline{x_4} & & & & \\
 \overline{x_2} & & & & & \overline{x_4} & & \overline{x_2} & & & & \overline{x_4} & & & & \\
 & x_3 & \overline{x_3} & \overline{x_3} & x_3 & & & x_3 & \overline{x_3} & \overline{x_3} & x_3 & & & & &
 \end{array}$$

$$= x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x_4} + x_1 \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4} + x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot x_4$$

d.

	x_1	x_1	$\overline{x_1}$	$\overline{x_1}$	
x_2	1				$\overline{x_4}$
x_2	1	1	1		x_4
$\overline{x_2}$	1	1			x_4
$\overline{x_2}$					$\overline{x_4}$
	x_3	$\overline{x_3}$	$\overline{x_3}$	x_3	

$$=$$

$$\begin{aligned}
& \begin{array}{cccc}
x_1 & x_1 & \overline{x_1} & \overline{x_1} \\
x_2 & 1 & & \overline{x_4} \\
x_2 & 1 & & x_4 \\
\overline{x_2} & & & x_4 \\
\overline{x_2} & & & \overline{x_4}
\end{array}
+ \begin{array}{cccc}
x_1 & x_1 & \overline{x_1} & \overline{x_1} \\
x_2 & 1 & 1 & \overline{x_4} \\
\overline{x_2} & 1 & 1 & x_4 \\
\overline{x_2} & & & \overline{x_4}
\end{array}
+ \\
& \begin{array}{cccc}
x_3 & \overline{x_3} & \overline{x_3} & x_3 \\
x_1 & x_1 & \overline{x_1} & \overline{x_1} \\
x_2 & & & \overline{x_4} \\
x_2 & 1 & 1 & x_4 \\
\overline{x_2} & & & x_4 \\
\overline{x_2} & & & \overline{x_4}
\end{array}
= \\
& \begin{array}{cccc}
x_3 & \overline{x_3} & \overline{x_3} & x_3
\end{array}
\\
& = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_4 + x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot x_4
\end{aligned}$$

e.

	x_1	x_1	$\overline{x_1}$	$\overline{x_1}$	
x_2		1		1	$\overline{x_4}$
x_2		1	1	1	x_4
$\overline{x_2}$					x_4
$\overline{x_2}$					$\overline{x_4}$
	x_3	$\overline{x_3}$	$\overline{x_3}$	x_3	

=

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & x_1 & x_1 & \overline{x_1} & \overline{x_1} & & x_1 & x_1 & \overline{x_1} & \overline{x_1} & & \\
 x_2 & & 1 & & & \overline{x_4} & x_2 & & & & \overline{x_4} & \\
 x_2 & & 1 & & & x_4 & + & x_2 & & 1 & 1 & x_4 & + \\
 \overline{x_2} & & & & & x_4 & & \overline{x_2} & & & & x_4 & \\
 \overline{x_2} & & & & & \overline{x_4} & & \overline{x_2} & & & & \overline{x_4} & \\
 & x_3 & \overline{x_3} & \overline{x_3} & x_3 & & & x_3 & \overline{x_3} & \overline{x_3} & x_3 & & \\
 & x_1 & x_1 & \overline{x_1} & \overline{x_1} & & & & & & & & \\
 x_2 & & & & 1 & \overline{x_4} & & & & & & & \\
 x_2 & & & & 1 & x_4 & & & & & & & \\
 \overline{x_2} & & & & & x_4 & & & & & & & \\
 \overline{x_2} & & & & & \overline{x_4} & & & & & & & \\
 & x_3 & \overline{x_3} & \overline{x_3} & x_3 & & & & & & & & \\
 \end{array}$$

=

$$= x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_4 + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3$$

f.

	x_1	x_1	$\overline{x_1}$	$\overline{x_1}$	
x_2					$\overline{x_4}$
x_2			1	1	x_4
$\overline{x_2}$	1		1	1	x_4
$\overline{x_2}$			1		$\overline{x_4}$
	x_3	$\overline{x_3}$	$\overline{x_3}$	x_3	

=

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & x_1 & x_1 & \overline{x_1} & \overline{x_1} & & x_1 & x_1 & \overline{x_1} & \overline{x_1} & & \\
 x_2 & & & & & \overline{x_4} & x_2 & & & & \overline{x_4} & \\
 x_2 & & & 1 & 1 & x_4 & + & x_2 & & & x_4 & + \\
 \overline{x_2} & & & 1 & 1 & x_4 & & \overline{x_2} & 1 & & 1 & x_4 \\
 \overline{x_2} & & & & & \overline{x_4} & & \overline{x_2} & & & \overline{x_4} & \\
 & x_3 & \overline{x_3} & \overline{x_3} & x_3 & & & x_3 & \overline{x_3} & \overline{x_3} & x_3 & \\
 \\
 & x_1 & x_1 & \overline{x_1} & \overline{x_1} & & & & & & & \\
 x_2 & & & & & \overline{x_4} & & & & & & \\
 x_2 & & & & & x_4 & & & & & & \\
 \overline{x_2} & & & 1 & & x_4 & & & & & & \\
 \overline{x_2} & & & 1 & & \overline{x_4} & & & & & & \\
 & x_3 & \overline{x_3} & \overline{x_3} & x_3 & & & & & & & \\
 \\
 = & \overline{x_1} \cdot x_4 & + & \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot x_4 & + & \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}
 \end{array}$$

gg.

	x_1	x_1	$\overline{x_1}$	$\overline{x_1}$	
x_2			1	1	$\overline{x_4}$
x_2	1	1	1		x_4
$\overline{x_2}$	1	1	1		x_4
$\overline{x_2}$			1		$\overline{x_4}$
	x_3	$\overline{x_3}$	$\overline{x_3}$	x_3	

=

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & x_1 & x_1 & \overline{x_1} & \overline{x_1} & & x_1 & x_1 & \overline{x_1} & \overline{x_1} & & \\
 x_2 & & & & & \overline{x_4} & x_2 & & 1 & & \overline{x_4} & \\
 x_2 & 1 & 1 & & & x_4 & + & x_2 & & 1 & & x_4 & + \\
 \overline{x_2} & 1 & 1 & & & x_4 & & \overline{x_2} & & 1 & & x_4 & \\
 \overline{x_2} & & & & & \overline{x_4} & & \overline{x_2} & & 1 & & \overline{x_4} & \\
 & x_3 & \overline{x_3} & \overline{x_3} & x_3 & & & x_3 & \overline{x_3} & \overline{x_3} & x_3 & & \\
 & x_1 & x_1 & \overline{x_1} & \overline{x_1} & & & & & & & & \\
 x_2 & & & 1 & 1 & \overline{x_4} & & & & & & & \\
 x_2 & & & & & x_4 & & & & & & & \\
 \overline{x_2} & & & & & x_4 & & & & & & & \\
 \overline{x_2} & & & & & \overline{x_4} & & & & & & & \\
 & x_3 & \overline{x_3} & \overline{x_3} & x_3 & & & & & & & & \\
 \end{array}$$

=

$$= x_1 \cdot x_4 + \overline{x_1} \cdot \overline{x_3} + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_4}$$

h.

	x_1	x_1	$\overline{x_1}$	$\overline{x_1}$	
x_2	1	1		1	$\overline{x_4}$
x_2	1	1	1	1	x_4
$\overline{x_2}$	1	1	1	1	x_4
$\overline{x_2}$		1	1		$\overline{x_4}$
	x_3	$\overline{x_3}$	$\overline{x_3}$	x_3	

=

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & x_1 & x_1 & \overline{x_1} & \overline{x_1} & & x_1 & x_1 & \overline{x_1} & \overline{x_1} & & \\
 x_2 & 1 & & & 1 & \overline{x_4} & x_2 & 1 & 1 & & \overline{x_4} & \\
 x_2 & 1 & & & 1 & x_4 & + & x_2 & 1 & 1 & & x_4 & + \\
 \overline{x_2} & & & & & x_4 & & \overline{x_2} & & & & x_4 & \\
 \overline{x_2} & & & & & \overline{x_4} & & \overline{x_2} & & & & \overline{x_4} & \\
 & x_3 & \overline{x_3} & \overline{x_3} & x_3 & & & x_3 & \overline{x_3} & \overline{x_3} & x_3 & & \\
 & x_1 & x_1 & \overline{x_1} & \overline{x_1} & & & x_1 & x_1 & \overline{x_1} & \overline{x_1} & & \\
 x_2 & & & & & \overline{x_4} & x_2 & & & & & \overline{x_4} & \\
 x_2 & 1 & 1 & 1 & 1 & x_4 & + & x_2 & & & & x_4 & = \\
 \overline{x_2} & 1 & 1 & 1 & 1 & x_4 & & \overline{x_2} & & 1 & 1 & & x_4 & \\
 \overline{x_2} & & & & & \overline{x_4} & & \overline{x_2} & & 1 & 1 & & \overline{x_4} & \\
 & x_3 & \overline{x_3} & \overline{x_3} & x_3 & & & x_3 & \overline{x_3} & \overline{x_3} & x_3 & &
 \end{array}$$

$$= x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 + x_4 + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}$$

i.

	x_1	x_1	$\overline{x_1}$	$\overline{x_1}$
x_2			1	
$\overline{x_2}$	1	1		1
	x_3	$\overline{x_3}$	$\overline{x_3}$	x_3

=

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{cccc} x_1 & x_1 & \overline{x_1} & \overline{x_1} \\ & & 1 & \\ x_2 & & & \\ \overline{x_2} & & & \end{array} + \begin{array}{cccc} x_1 & x_1 & \overline{x_1} & \overline{x_1} \\ & & & \\ x_2 & & & \\ \overline{x_2} & 1 & & 1 \\ & x_3 & \overline{x_3} & \overline{x_3} & x_3 \end{array} + \\
 & \begin{array}{cccc} x_1 & x_1 & \overline{x_1} & \overline{x_1} \\ & & & \\ x_2 & & & \\ \overline{x_2} & 1 & 1 & \\ & x_3 & \overline{x_3} & \overline{x_3} & x_3 \end{array} \\
 & = \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} + \overline{x_2} \cdot x_3 + x_1 \cdot \overline{x_2}
 \end{aligned}$$

j.

	x_1	x_1	$\overline{x_1}$	$\overline{x_1}$
x_2	1	1	1	
$\overline{x_2}$			1	1
	x_3	$\overline{x_3}$	$\overline{x_3}$	x_3

=

$$\begin{array}{cccc}
 x_1 & x_1 & \overline{x_1} & \overline{x_1} \\
 x_2 & 1 & 1 & \\
 \overline{x_2} & & & \\
 x_3 & \overline{x_3} & \overline{x_3} & x_3
 \end{array}
 +
 \begin{array}{cccc}
 x_1 & x_1 & \overline{x_1} & \overline{x_1} \\
 x_2 & & 1 & \\
 \overline{x_2} & & 1 & \\
 x_3 & \overline{x_3} & \overline{x_3} & x_3
 \end{array}
 +$$

$$\begin{array}{cccc}
 x_1 & x_1 & \overline{x_1} & \overline{x_1} \\
 x_2 & & & \\
 \overline{x_2} & & 1 & 1 \\
 x_3 & \overline{x_3} & \overline{x_3} & x_3
 \end{array}
 =$$

$$= x_1 \cdot x_2 + \overline{x_1} \cdot \overline{x_3} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$$