

1. Aufgabe

Im Anschluss an Satz 16.1 und an die Diskussion des zugehörigen Beispiels für den Algorithmus für einen aufspannenden Baum habe ich geschrieben: „Bitte beachten Sie, dass uns dieser Algorithmus gleichzeitig einen schönen Test dafür liefert, ob ein Graph zusammenhängend ist.“

- a. Gegeben ein ungerichteter Graph G , A sei ein Knoten dieses Graphen. Beschreiben Sie genau den Algorithmus, mit dem Sie die Zusammenhangskomponente von A finden.

Algorithmus 1a

Es sei $G = G(V, E, \Psi)$. Man wende den Algorithmus zur Konstruktion eines aufspannenden Baumes in zusammenhängenden Graphen an, indem man mit dem Punkt A beginnt. Es sei V_A die Menge aller Punkte, die man mit diesem Algorithmus – beginnend bei A – erreichen kann. Es sei weiter E_A die Menge aller Kanten aus G , die Punkte aus V_A verbinden, also

$$E_A = \{ e \in E \mid \text{Es gibt } X, Y \in V_A \text{ so, dass } \Psi(e) = \{X, Y\} \}$$

Und es sei $\Psi_A = \Psi$, eingeschränkt auf E_A

Dann ist $G_A = G(V_A, E_A, \Psi_A)$ die Zusammenhangskomponente von A in G

- b. Gegeben ein ungerichteter Graph G . Beschreiben Sie genau den Algorithmus, mit dem Sie alle Zusammenhangskomponente von G finden.

Algorithmus 1b

Es sei $G = G(V, E, \Psi)$. Es sei $Erledigt = \{\}$.

Solange ($Erledigt \neq V$) tue das folgende

```
{
    Wähle  $A \in Erledigt \setminus V$ .
    Führe Algorithmus 1a durch zur Bestimmung von  $G_A(V_A, E_A, \Psi_A)$ 
    Setze  $Erledigt = Erledigt \cup V_A$ .
}
```

- c. Gegeben ein ungerichteter Graph G . Beschreiben Sie den Algorithmus, mit dem Sie erkennen, ob G zusammenhängend ist oder nicht.

Man wende den Algorithmus 1a an. G ist zusammenhängend genau dann, wenn $V_A = V$ ist.

2. Aufgabe

Gegeben sei der ungerichtete Graph G mit der folgenden Adjazenzmatrix:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
6	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0
8	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
10	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
12	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
13	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
15	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0

- a. Finden Sie die Zusammenhangskomponente, die den Knoten 14 enthält.

Nach Anwendung des Algorithmus 1a erhält man, wenn man mit dem Knoten 14 beginnt:

$V_{14} = \{3, 8, 9, 14\}$. Dazu gehören die Kanten:

$E_{14} = \{ (3, 8), (8, 9), (9, 14) \}$

- b. Finden Sie die Zusammenhangskomponente, die den Knoten 15 enthält.

Nach Anwendung des Algorithmus 1 a erhält man, wenn man mit dem Knoten 15 beginnt:

$V_{15} = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 15, 16\}$. Dazu gehören die Kanten:

$E_{15} = \{(1, 10), (1, 12), (1, 15), (2, 13), (4, 6), (5, 6), (5, 10), (5, 12), (6, 16), (7, 10), (7, 13), (7, 15), (11, 12), (11, 16)\}$

3. Aufgabe

Gegeben sei der ungerichtete Graph G mit der folgenden Adjazenzmatrix:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
4	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
8	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
11	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
13	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0

Finden Sie alle Zusammenhangskomponenten von G

Es ist $V_1 = \{1, 2\}$. Dazu gehört die Kante: $E_1 = \{(1, 2)\}$

Es ist $V_3 = \{3, 13\}$. Dazu gehört die Kante: $E_3 = \{(3, 13)\}$

Es ist $V_4 = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 14\}$. Dazu gehören die Kanten:

$$E_4 = \{(4, 6), (4, 8), (5, 7), (5, 14), (6, 9), (7, 8), (7, 11), (8, 9), (11, 14)\}$$

Es ist $V_{10} = \{10, 12, 15, 16\}$. Dazu gehören die Kanten:

$$E_{10} = \{(10, 15), (10, 16), (12, 15), (12, 16)\}$$

Es gibt also 4 Zusammenhangskomponenten.

4. Aufgabe

Testen Sie die beiden ungerichteten Graphen mit den folgenden Adjazenzmatrizen daraufhin, ob sie zusammenhängend sind:

a.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
6	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
11	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
15	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0

Es ist $V_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\} = V$, also ist 4a zusammenhängend.

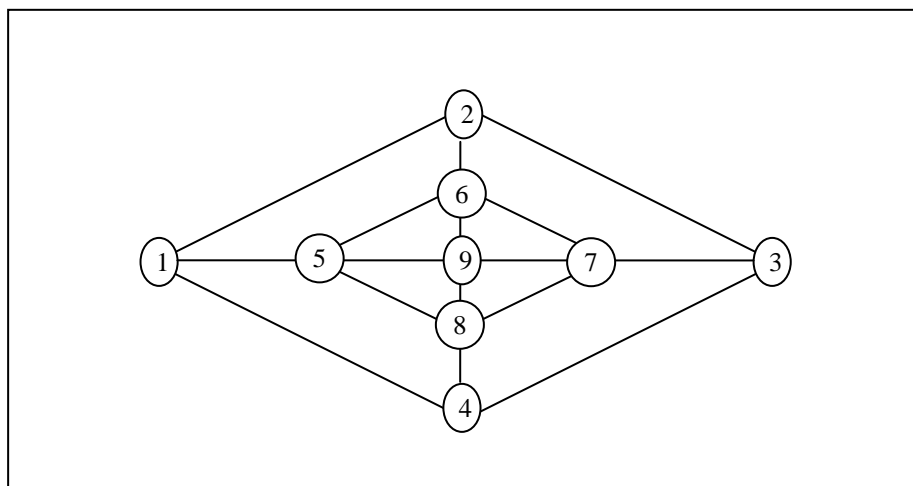
b.

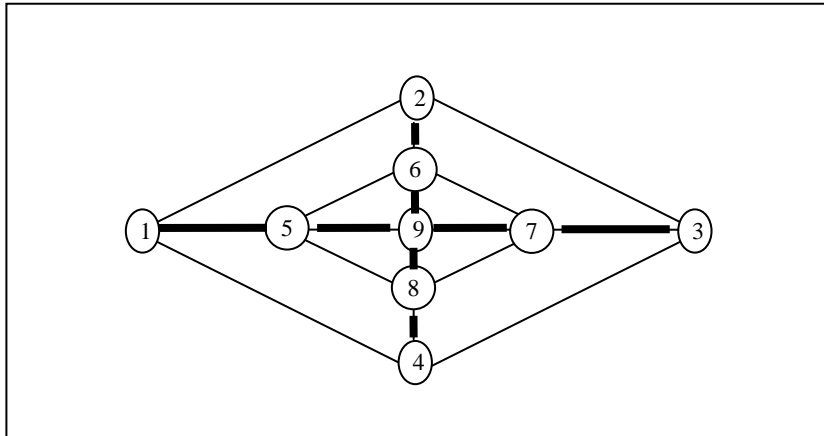
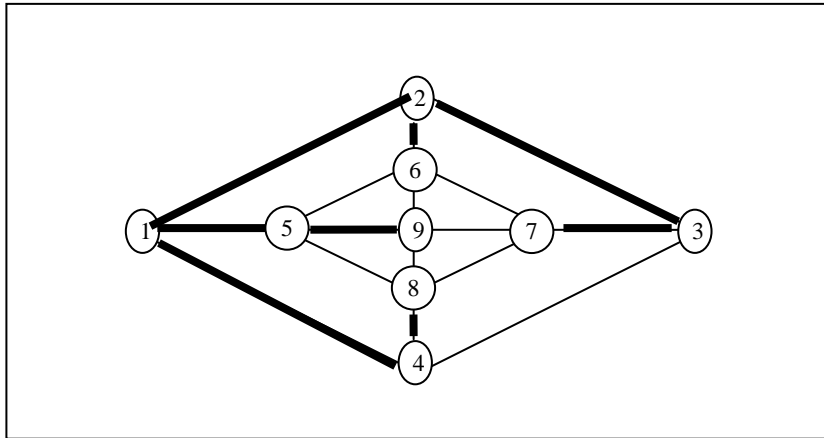
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
8	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
9	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
10	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
11	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
13	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
14	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
15	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0

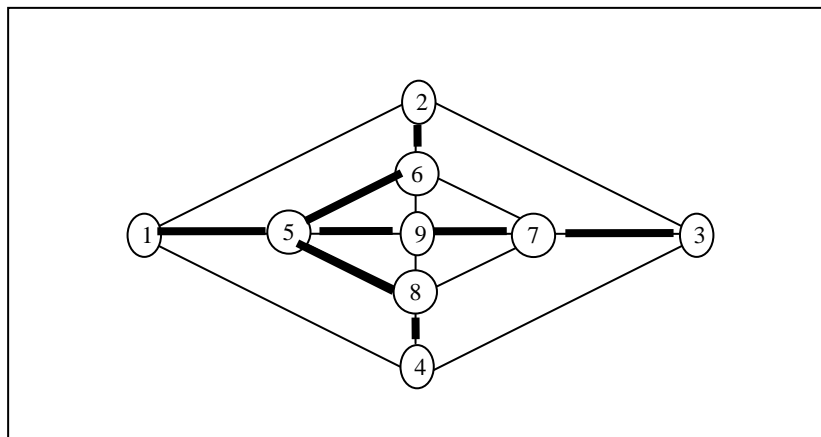
Hier ist $V_1 = \{1, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 16\} \neq V$, also ist 4b nicht zusammenhängend.

5. Aufgabe

Finden Sie drei verschiedene aufspannende Bäume für den folgenden Graphen:







6. Aufgabe

Finden Sie drei verschiedene aufspannende Bäume für den folgenden Graphen:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	1	0	0	0	0	1	1
2	1	0	0	1	1	0	0	0	1
3	1	0	0	1	0	1	0	0	1
4	0	1	1	0	0	0	1	0	1
5	0	1	0	0	0	0	1	1	0
6	0	0	1	0	0	0	1	1	0
7	0	0	0	1	1	1	0	0	0
8	1	0	0	0	1	1	0	0	0
9	1	1	1	1	0	0	0	0	0

===== 1 =====

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	1	0	0	0	0	1	1
2	1	0	0	1	1	0	0	0	0
3	1	0	0	0	0	1	0	0	0
4	0	1	0	0	0	0	1	0	0
5	0	1	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	1	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	1	0	0	0	0	0
8	1	0	0	0	0	0	0	0	0

9	1	0	0	0	0	0	0	0	0
----------	---	---	---	---	---	---	---	---	---

===== 2 =====

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	0	0	0	0	0	0	1	1
2	0	0	0	0	0	0	0	0	1
3	0	0	0	0	0	0	0	0	1
4	0	0	0	0	0	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	0	0	1	1	0
7	0	0	0	0	0	1	0	0	0
8	1	0	0	0	1	1	0	0	0
9	1	1	1	1	0	0	0	0	0

===== 3 =====

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
2	0	0	0	1	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	1	0	0	0
4	0	1	0	0	0	0	1	0	1
5	0	0	0	0	0	0	1	0	0
6	0	0	1	0	0	0	1	1	0
7	0	0	0	1	1	1	0	0	0
8	1	0	0	0	0	1	0	0	0
9	0	0	0	1	0	0	0	0	0

7. Aufgabe

In den folgenden Teilaufgaben wird Ihnen jeweils ein ungerichteter Graph G vorgestellt, der bestimmte Eigenschaften hat. Entscheiden Sie immer:

Ist es unmöglich für G , ein Baum zu sein oder

Kann G ein Baum sein, ohne dass das zwingend notwendig ist oder

Ist G notwendigerweise ein Baum

- a. G hat 12 Knoten und 11 Kanten. Baum möglich
- b. G ist zyklensfrei. Baum möglich
- c. G ist zusammenhängend, aber wenn man die Kante zwischen dem zweiten und dem dritten Knoten entfernt ist G nicht mehr zusammenhängend. Baum möglich
- d. G hat 24 Knoten und 23 Kanten und ist zusammenhängend. Baum zwingend
- e. G ist zusammenhängend. Baum möglich
- f. G hat 9 Kanten und 10 Knoten und ist zyklensfrei. Baum zwingend
- g. Zwischen allen Punkten einer gemeinsamen Zusammenhangskomponente gibt es genau einen Weg Baum möglich
- h. G hat 80 Knoten und 79 Kanten und G besteht aus zwei Zusammenhangskomponenten. Baum unmöglich
- i. G ist zusammenhängend und zyklensfrei. Baum zwingend
- j. G hat 23 Knoten und 24 Kanten und ist zusammenhängend. Baum unmöglich
- k. G ist zusammenhängend, aber nach jeder Entfernung irgend einer Kante von G ist G nicht mehr zusammenhängend. Baum zwingend
- l. Zwischen zwei beliebigen Punkten gibt es genau einen Weg Baum zwingend

8. Aufgabe

Für den Graphen G seine sowohl T_1 als auch T_2 aufspannende Bäume. Welche der folgenden Aussagen sind immer wahr? Finden Sie Gegenbeispiele für die Aussagen, die nicht automatisch folgen.

- a. Die Knoten von T_1 und T_2 sind identisch wahr!
- b. Die Kanten von T_1 und T_2 sind identisch falsch, vgl. Aufgabe 5
- c. Die Anzahl der Knoten von T_1 und die Anzahl der Knoten von T_2 ist identisch. Wahr!

- d. Die Anzahl der Kanten von T_1 und die Anzahl der Kanten von T_2 ist identisch. Wahr!

9. Aufgabe

Zeigen Sie: Falls ein Graph G genau so viele Knoten wie Kanten hat, enthält er mindestens einen Zyklus.

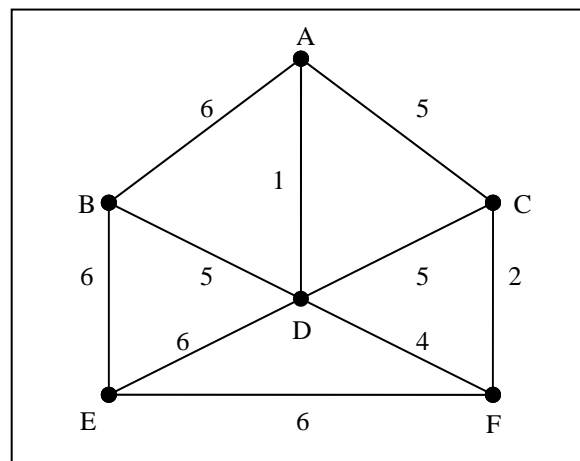
Hinweis: Bearbeiten Sie zunächst den Fall, dass G zusammenhängend ist.

Falls G zusammenhängend ist und genau so viele Kanten wie Knoten enthält, kann G nach Satz 16.3 kein Baum sein, muss also mindestens einen Zyklus enthalten.

Falls G nicht zusammenhängend ist, muss es mindestens eine Zusammenhangskomponente von G geben, in der die Anzahl der Kanten größer oder gleich der Anzahl der Knoten in dieser Zusammenhangskomponente ist. Dort muss nach obiger Argumentation wieder mindestens ein Zyklus vorhanden sein.

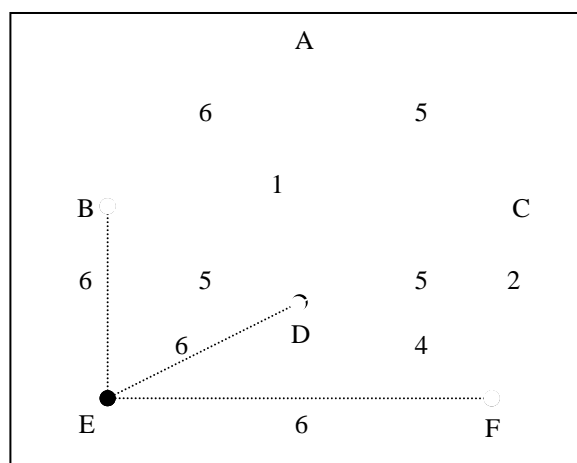
10. Aufgabe

Wenden Sie den Algorithmus von Prim auf den folgenden Graphen an und erzeugen Sie zwei voneinander verschiedene minimal aufspannende Bäume.



1. Baum, 1. Schritt:

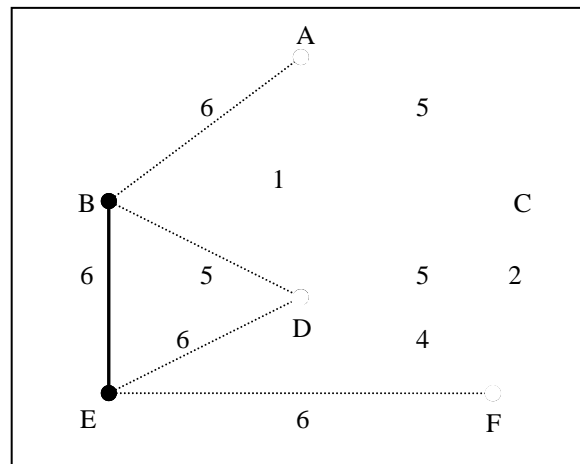
$$V_T = \{E\}, E_T = \{\}$$



<i>Kandidat_T</i>	(E, B)	(E, D)	(E, F)
Bewertung	6	6	6
Minumum	+	+	+
Auswahl	+		

1. Baum, 2. Schritt:

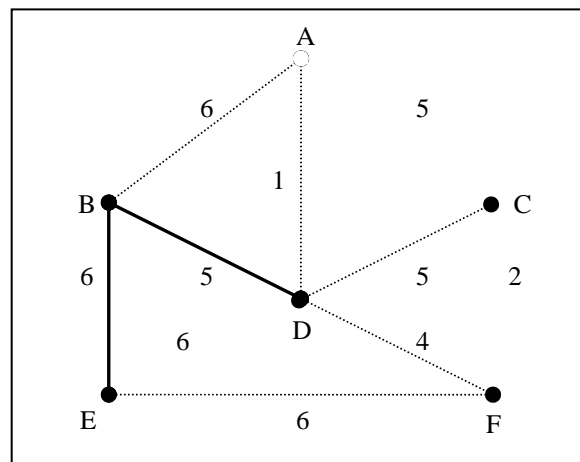
$$V_T = \{E, B\}, E_T = \{(E, B)\}$$



<i>Kandidat_T</i>	(E, D)	(E, F)	(B, D)	(B, A)
Bewertung	6	6	5	6
Minumum			+	
Auswahl			+	

1. Baum, 3. Schritt:

$$V_T = \{E, B, D\}, E_T = \{ (E, B), (B, D) \}$$

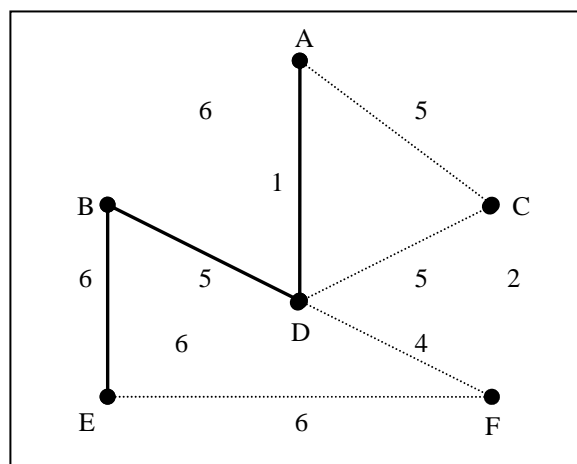


<i>Kandidat_T</i>	(E, F)	(B, A)	(D, A)	(D, C)	(D, F)
-----------------------------	--------	--------	--------	--------	--------

Bewertung	6	6	1	5	4
Minumum			+		
Auswahl			+		

1. Baum, 4. Schritt:

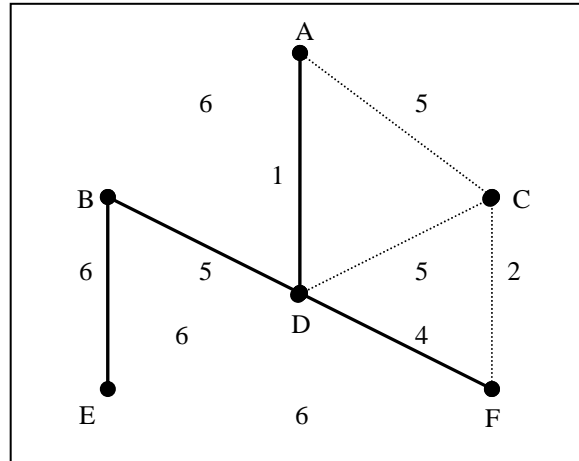
$V_T = \{E, B, D, A\}$, $E_T = \{ (E, B) , (B, D) , (D, A) \}$



Kandidat_T	(E, F)	(A, C)	(D, C)	(D, F)
Bewertung	6	5	5	4
Minumum				+
Auswahl				+

1. Baum, 5. Schritt:

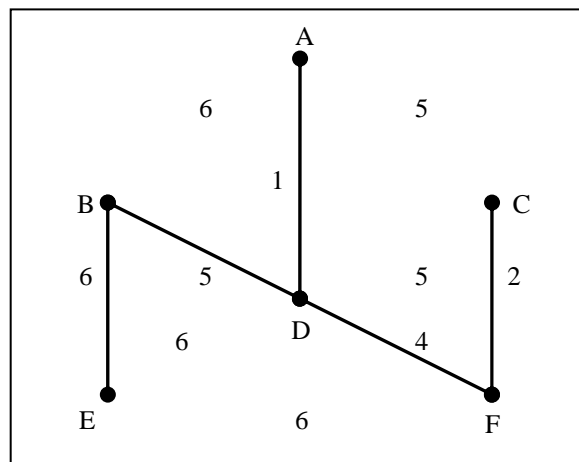
$V_T = \{E, B, D, A, F\}$, $E_T = \{ (E, B) , (B, D) , (D, A) , (D, F) \}$



<i>Kandidat_T</i>	(A, C)	(D, C)	(F, C)
Bewertung	5	5	2
Minumum			+
Auswahl			+

1. Baum, Endstand:

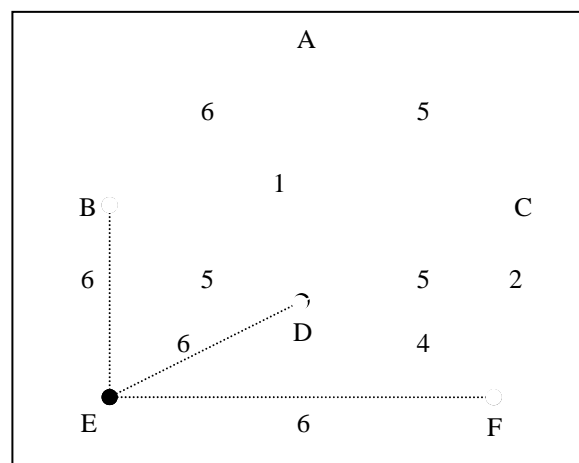
$V_T = \{E, B, D, A, F, C\}$, $E_T = \{ (E, B) , (B, D) , (D, A) , (D, F) , (F, C) \}$



Gesamtgewicht: 18

2. Baum, 1. Schritt:

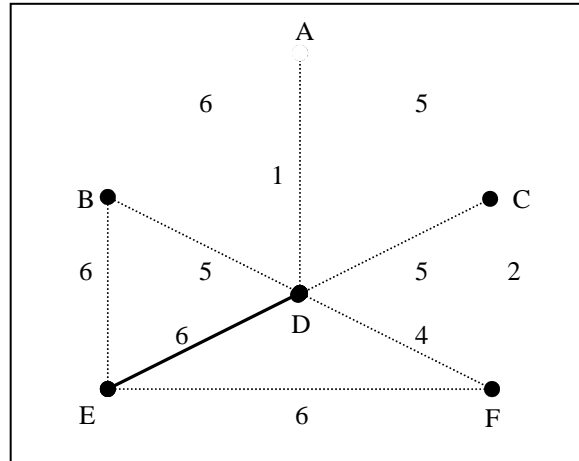
$V_T = \{E\}$, $E_T = \{\}$



<i>Kandidat</i> _T	(E, B)	(E, D)	(E, F)
Bewertung	6	6	6
Minumum	+	+	+
Auswahl		+	

2. Baum, 2. Schritt:

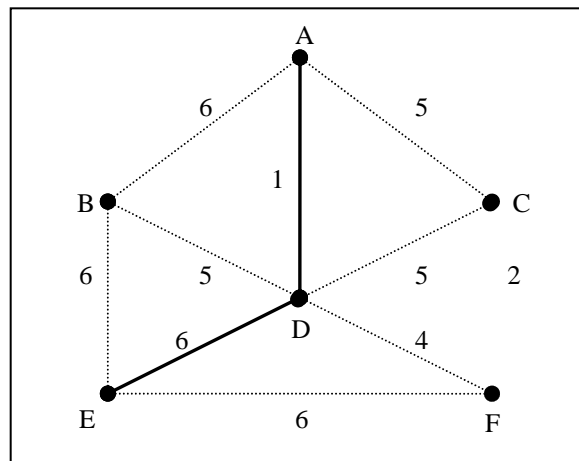
$V_T = \{E, D\}$, $E_T = \{(E, D)\}$



<i>Kandidat_T</i>	(E, B)	(E, F)	(D, B)	(D, A)	(D, C)	(D, F)
Bewertung	6	6	5	1	5	4
Minimum				+		
Auswahl				+		

2. Baum, 3. Schritt:

$$V_T = \{E, D, A\}, E_T = \{ (E, D), (D, A) \}$$

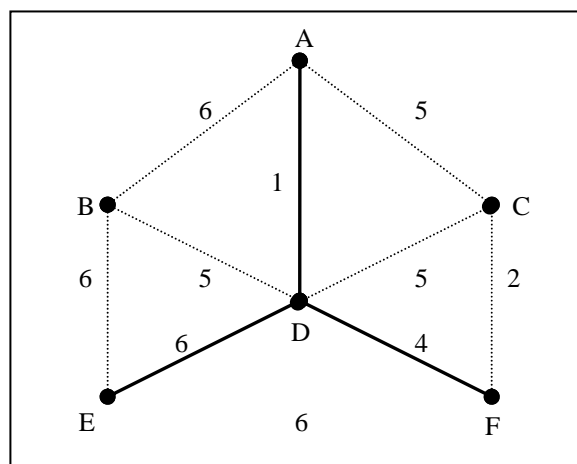


<i>Kandidat_T</i>	(E, B)	(E, F)	(D, B)	(D, C)	(D, F)	(A, B)	(A, C)
-----------------------------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

Bewertung	6	6	5	5	4	6	5
Minumum					+		
Auswahl					+		

2. Baum, 4. Schritt:

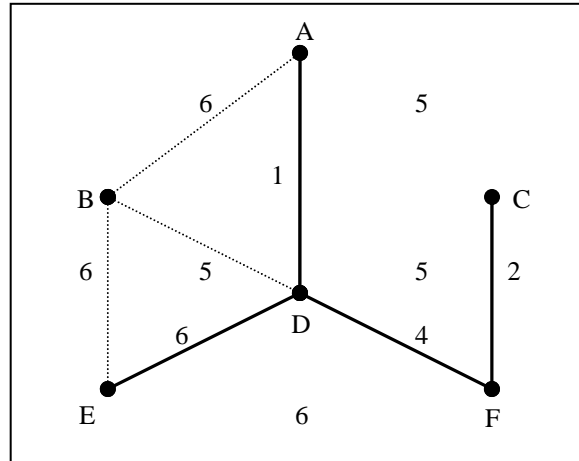
$$V_T = \{E, D, A, F\}, E_T = \{ (E, D), (D, A), (D, F) \}$$



Kandidat_T	(E, B)	(D, B)	(D, C)	(A, B)	(A, C)	(F, C)
Bewertung	6	5	5	6	5	2
Minumum						+
Auswahl						+

2. Baum, 5. Schritt:

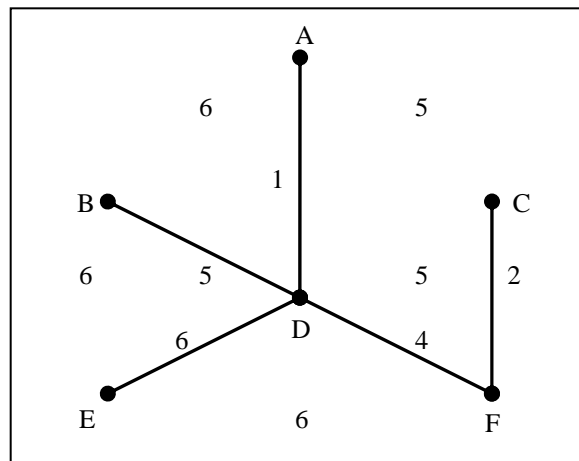
$$V_T = \{E, D, A, F, C\}, E_T = \{ (E, D), (D, A), (D, F), (F, C) \}$$



<i>Kandidat_T</i>	(E, B)	(D, B)	(A, B)
Bewertung	6	5	6
Minimum		+	
Auswahl		+	

2. Baum, Endstand:

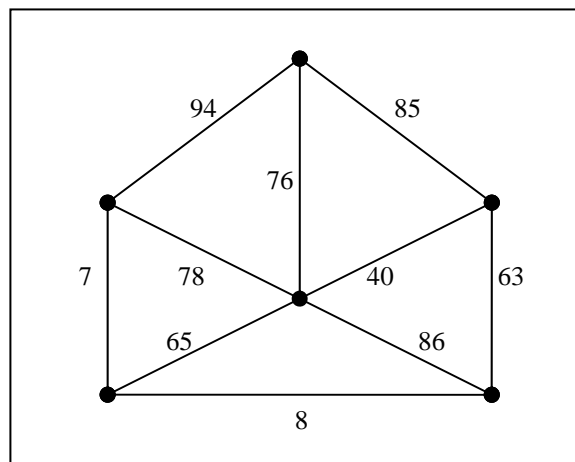
$$V_T = \{E, D, A, F, C, B\}, E_T = \{ (E, D), (D, A), (D, F), (F, C), (D, B) \}$$



Gesamtgewicht: 18 (wie bei Baum 1)

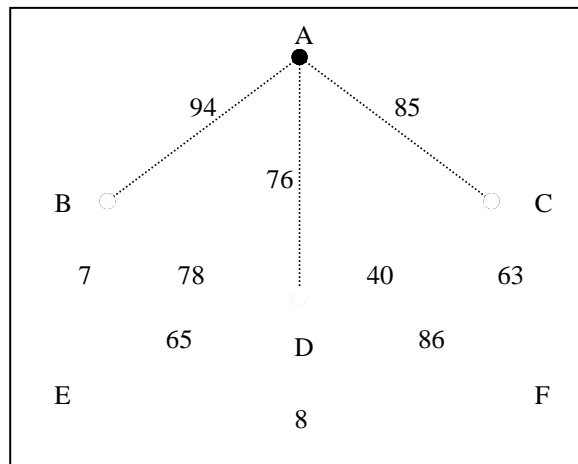
11. Aufgabe

Wenden Sie den Algorithmus von Prim auf den folgenden Graphen an. Sie werden nur genau einen minimal aufspannenden Baum erzeugen können. Die übernächste Aufgabe sagt Ihnen, warum das so ist.



1. Schritt

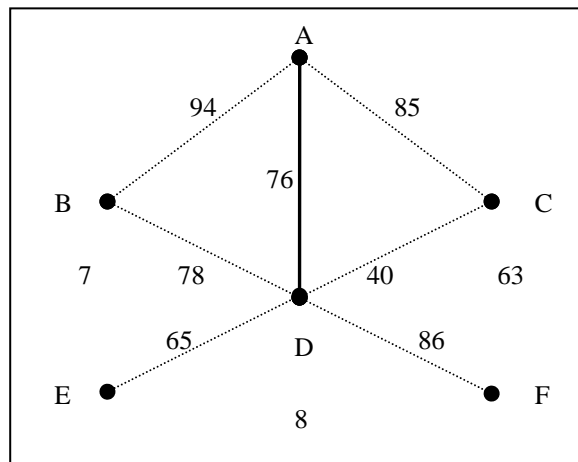
$V_T = \{A\}$, $E_T = \{\}$



<i>Kandidat_T</i>	(A, B)	(A, C)	(A, D)
Bewertung	94	85	76
Minumum			+
Auswahl			+

2. Schritt

$V_T = \{A, D\}$, $E_T = \{(A, D)\}$

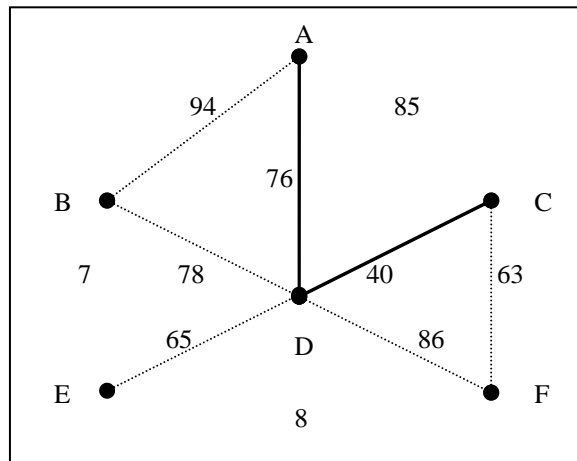


<i>Kandidat_T</i>	(A, B)	(A, C)	(D, B)	(D, C)	(D, E)	(D, F)
Bewertung	94	85	78	40	65	86
Minumum				+		

Auswahl				+		
----------------	--	--	--	---	--	--

3. Schritt

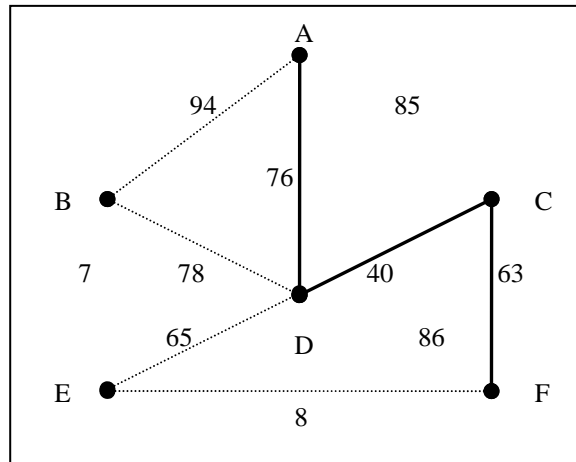
$$V_T = \{A, D, C\}, E_T = \{ (A, D), (D, C) \}$$



<i>Kandidat_T</i>	(A, B)	(D, B)	(D, E)	(D, F)	(C, F)
Bewertung	94	78	65	86	63
Minumum					+
Auswahl					+

4. Schritt

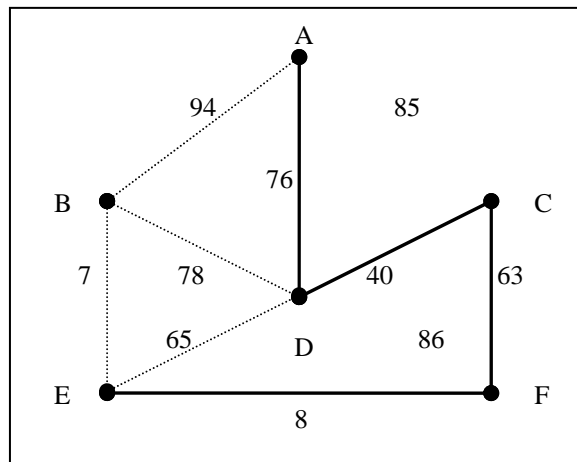
$$V_T = \{A, D, C, F\}, E_T = \{ (A, D), (D, C), (C, F) \}$$



<i>Kandidat_T</i>	(A, B)	(D, B)	(D, E)	(F, E)
Bewertung	94	78	65	8
Minumum				+
Auswahl				+

5. Schritt

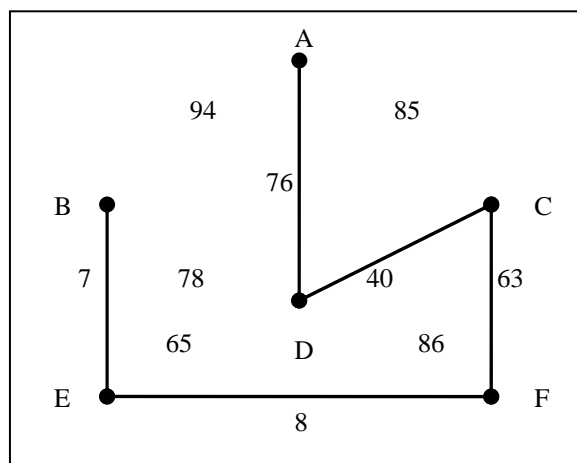
$$V_T = \{A, D, C, F, E\}, E_T = \{ (A, D) , (D, C) , (C, F) , (F, E) \}$$



<i>Kandidat_T</i>	(A, B)	(D, B)	(D, E)	(E, B)
Bewertung	94	78	65	7
Minumum				+
Auswahl				+

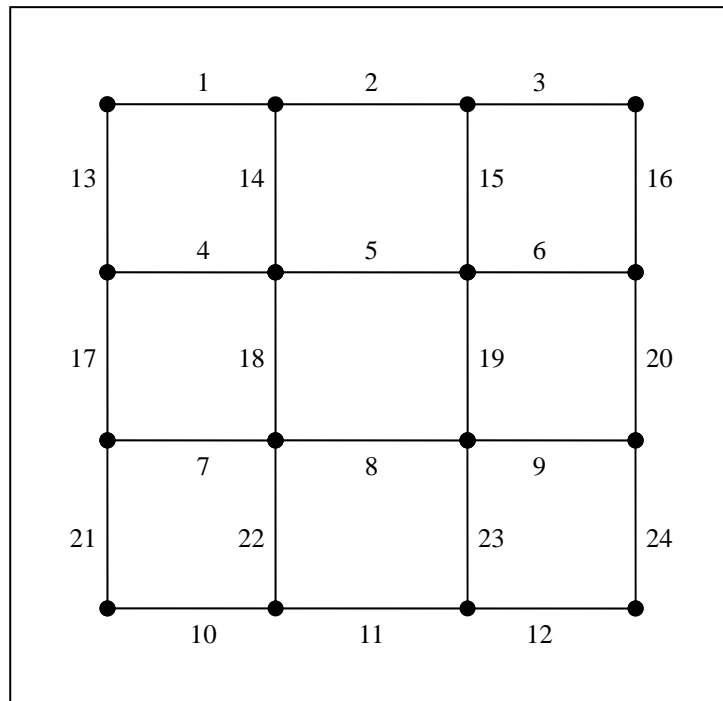
Endstand:

$V_T = \{A, D, C, F, E, B\}$, $E_T = \{(A, D), (D, C), (C, F), (F, E), (E, B)\}$



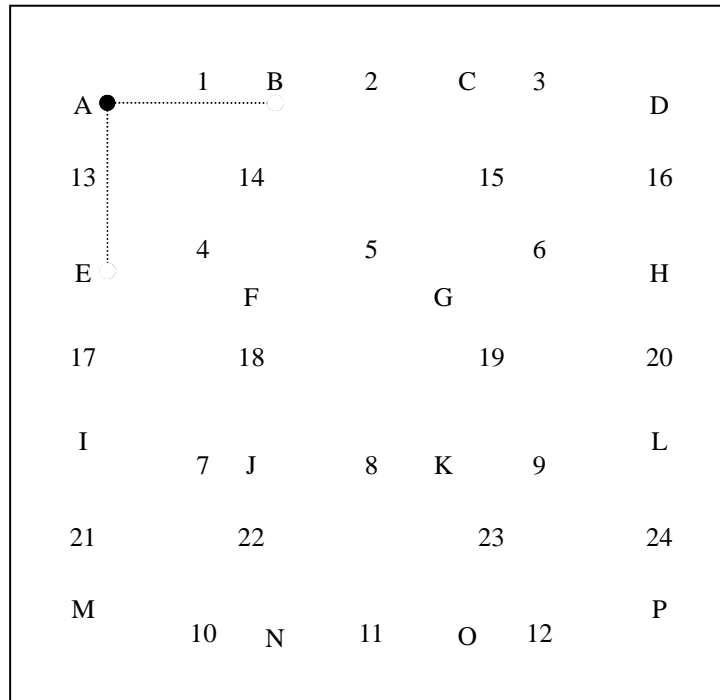
12. Aufgabe

Wenden Sie den Algorithmus von Prim auf den folgenden Graphen an. Auch hier werden Sie nur genau einen minimal aufspannenden Baum erzeugen können. Die nächste Aufgabe sagt Ihnen, warum das so ist.



1. Schritt

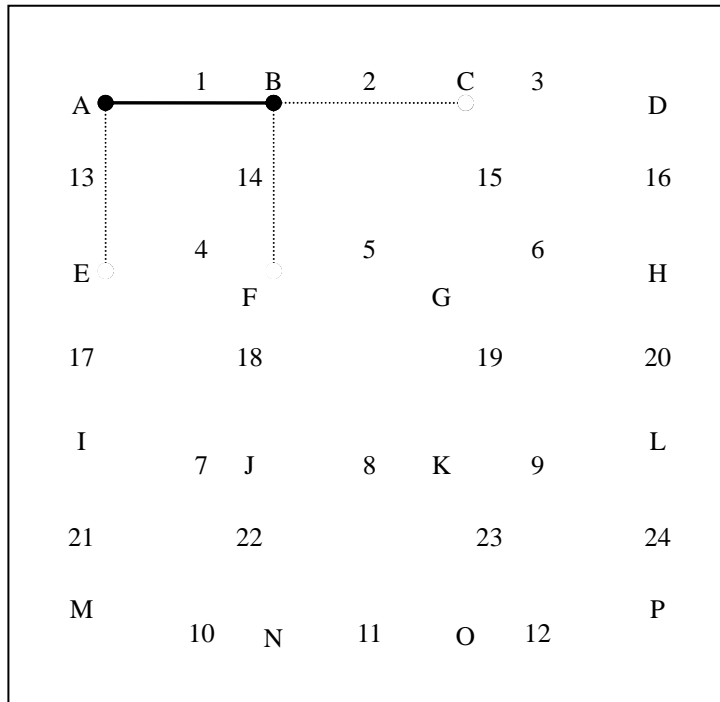
$$V_T = \{A\}, E_T = \{\}$$



Kandidat_T	(A, B)	(A, E)
Bewertung	1	13
Minumum	+	
Auswahl	+	

2. Schritt

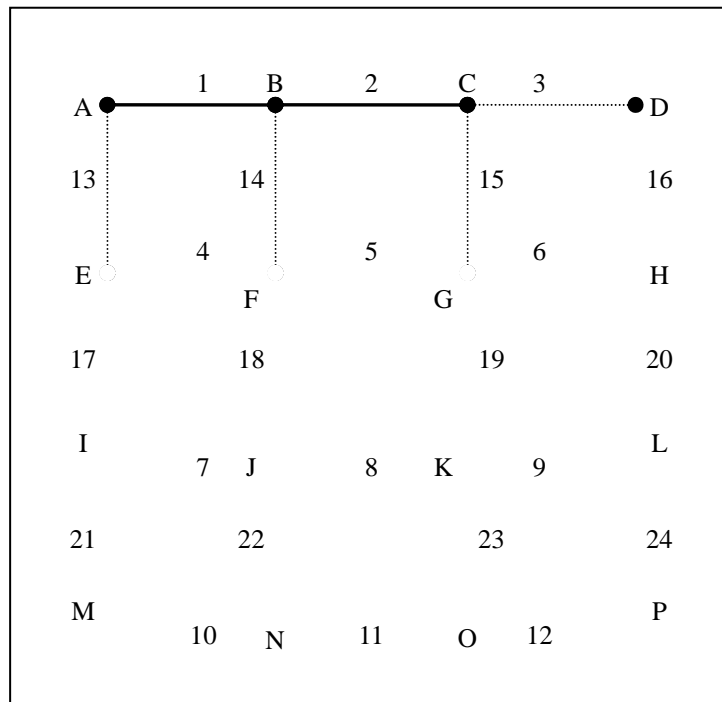
$$V_T = \{A, B\}, E_T = \{ (A, B) \}$$



<i>Kandidat_T</i>	(A, E)	(B, C)	(B, F)
Bewertung	13	2	14
Minumum		+	
Auswahl		+	

3. Schritt

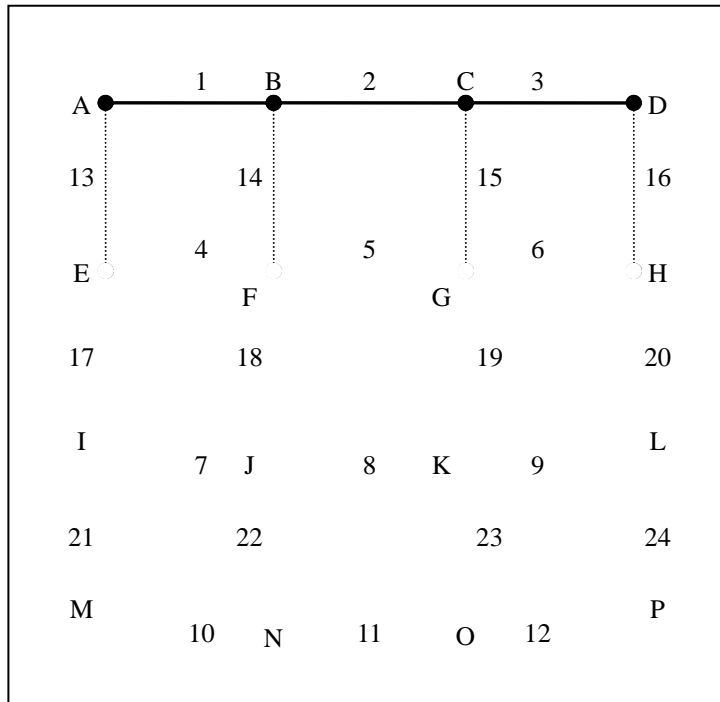
$$V_T = \{A, B, C\}, E_T = \{ (A, B), (B, C) \}$$



<i>Kandidat_T</i>	(A, E)	(B, F)	(C, D)	(C, G)
Bewertung	13	14	3	15
Minumum			+	
Auswahl			+	

4. Schritt

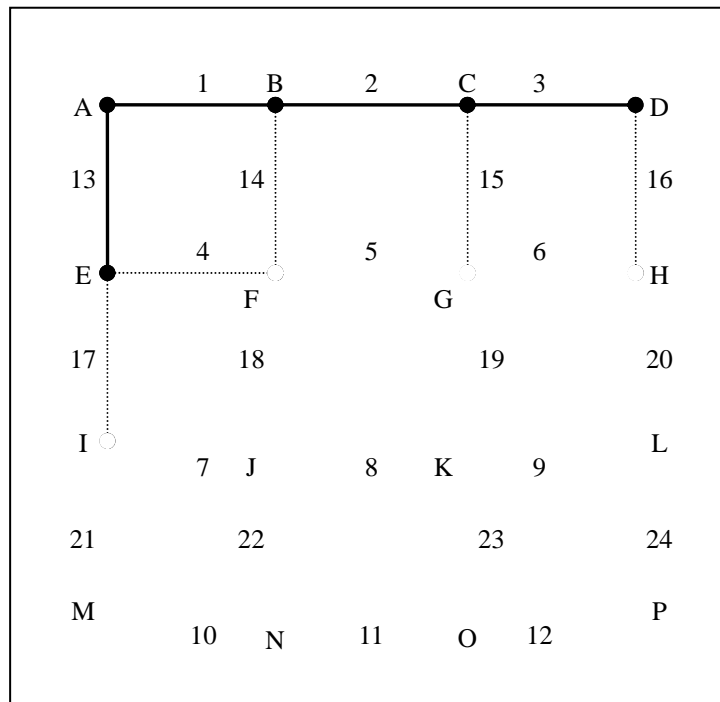
$$V_T = \{A, B, C, D\}, E_T = \{ (A, B), (B, C), (C, D) \}$$



<i>Kandidat_T</i>	(A, E)	(B, F)	(C, G)	(D, H)
Bewertung	13	14	15	16
Minumum	+			
Auswahl	+			

5. Schritt

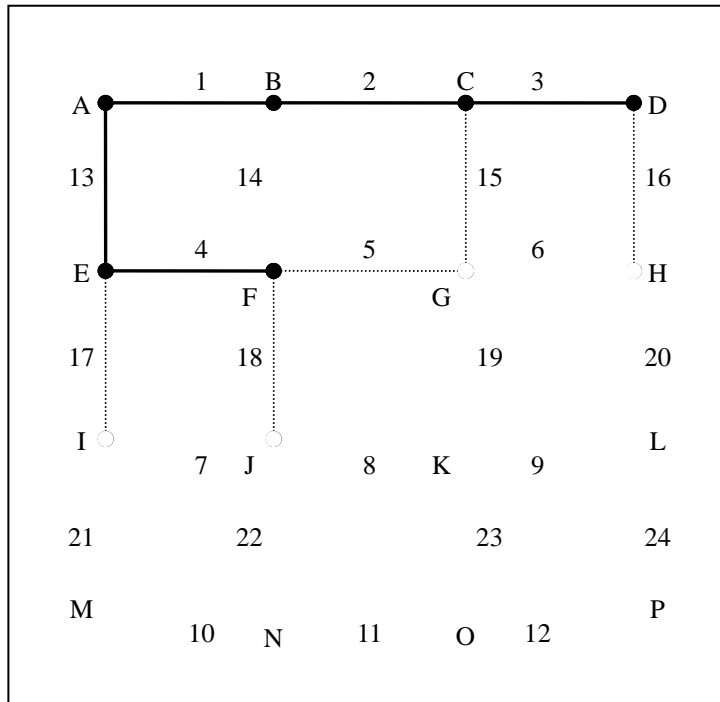
$$V_T = \{A, B, C, D, E\}, E_T = \{ (A, B), (B, C), (C, D), (A, E) \}$$



<i>Kandidat_T</i>	(B, F)	(C, G)	(D, H)	(E, F)	(E, I)
Bewertung	14	15	16	4	17
Minumum				+	
Auswahl				+	

6. Schritt

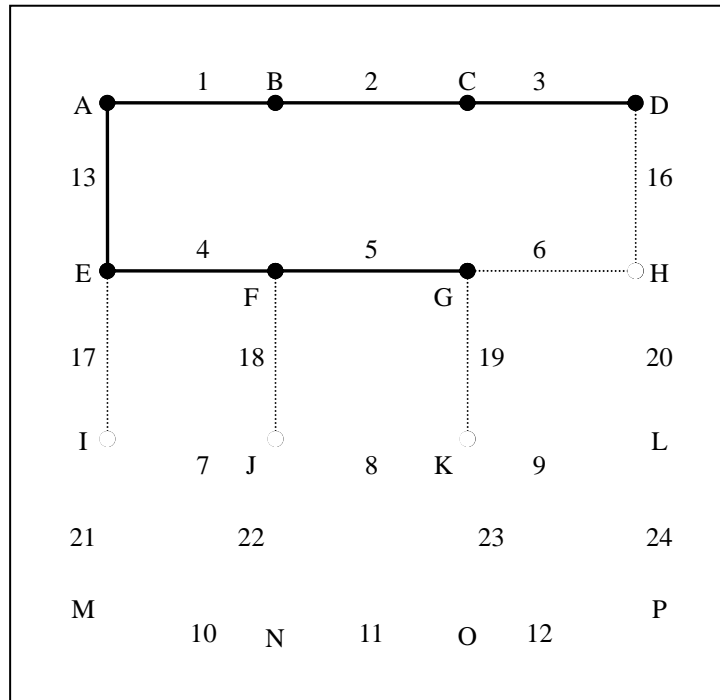
$$V_T = \{A, B, C, D, E, F\}, E_T = \{ (A, B), (B, C), (C, D), (A, E), (E, F) \}$$



<i>Kandidat_T</i>	(C, G)	(D, H)	(E, I)	(F, G)	(F, J)
Bewertung	15	16	17	5	18
Minumum				+	
Auswahl				+	

7. Schritt

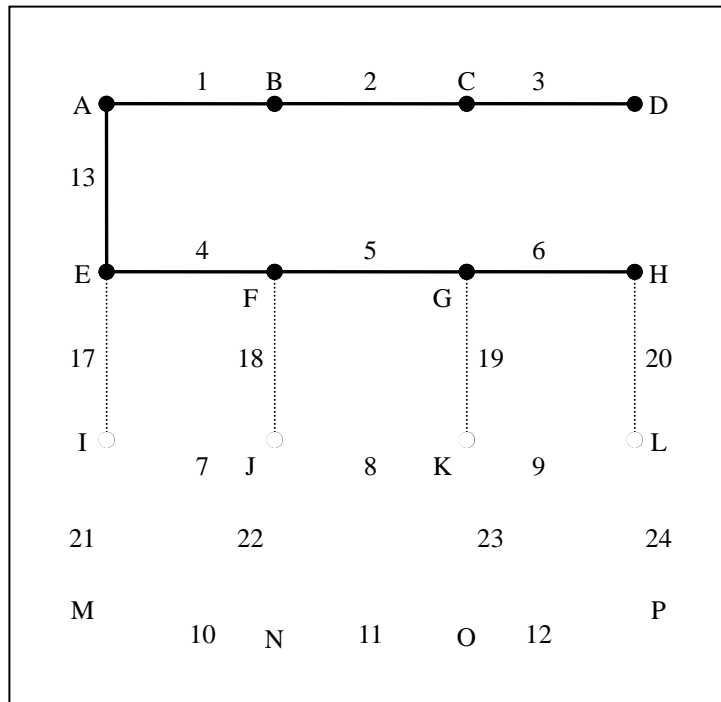
$$V_T = \{A, B, C, D, E, F, G\}, E_T = \{ (A, B), (B, C), (C, D), (A, E), (E, F), (F, G) \}$$



<i>Kandidat_T</i>	(D, H)	(E, I)	(F, J)	(G, H)	(G, K)
Bewertung	16	17	18	6	19
Minumum				+	
Auswahl				+	

8. Schritt

$$V_T = \{A, B, C, D, E, F, G, H\},$$

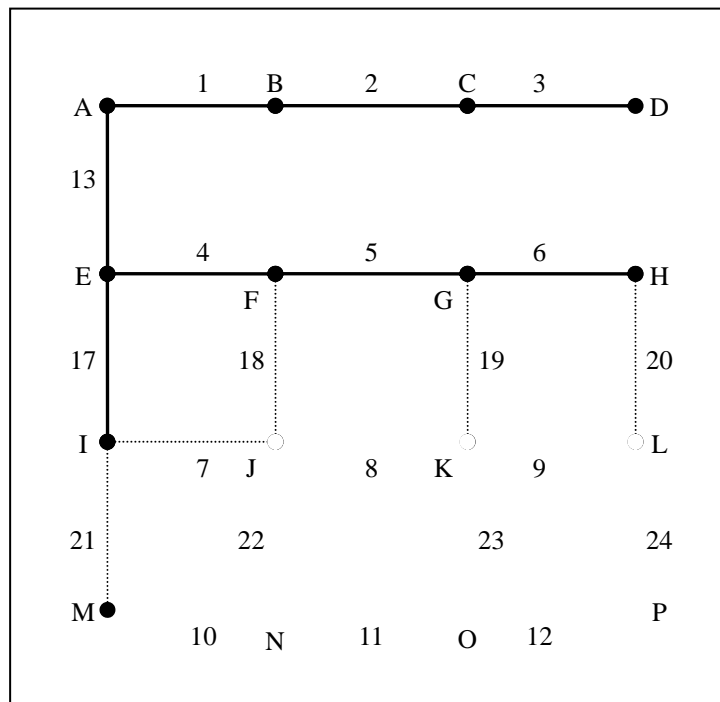
$$E_T = \{ (A, B), (B, C), (C, D), (A, E), (E, F), (F, G), (G, H) \}$$


<i>Kandidat_T</i>	(E, I)	(F, J)	(G, K)	(H, L)
Bewertung	17	18	19	20
Minumum	+			
Auswahl	+			

9. Schritt

$$V_T = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I\},$$

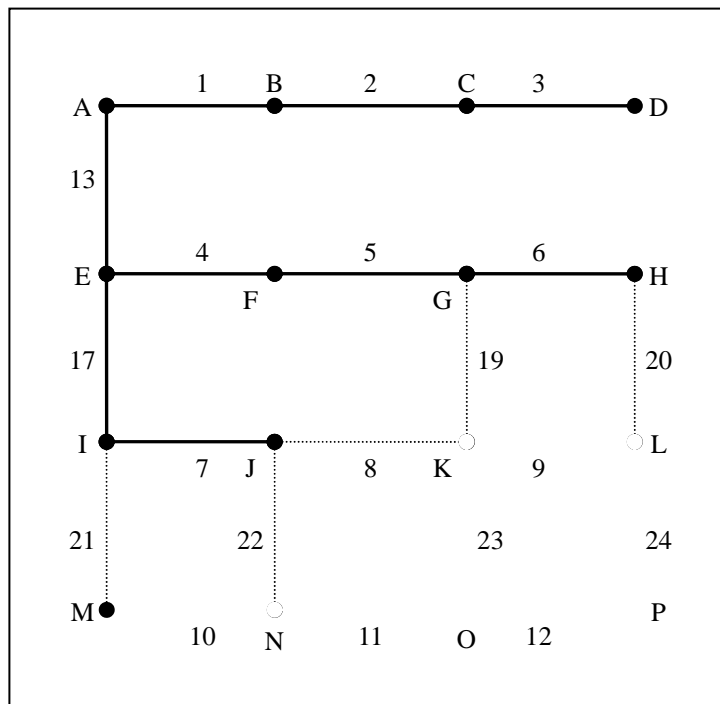
$$E_T = \{ (A, B), (B, C), (C, D), (A, E), (E, F), (F, G), (G, H), (E, I) \}$$



<i>Kandidat_T</i>	(F, J)	(G, K)	(H, L)	(I, J)	(I, M)
Bewertung	18	19	20	7	21
Minumum				+	
Auswahl				+	

10. Schritt

$$V_T = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J\},$$

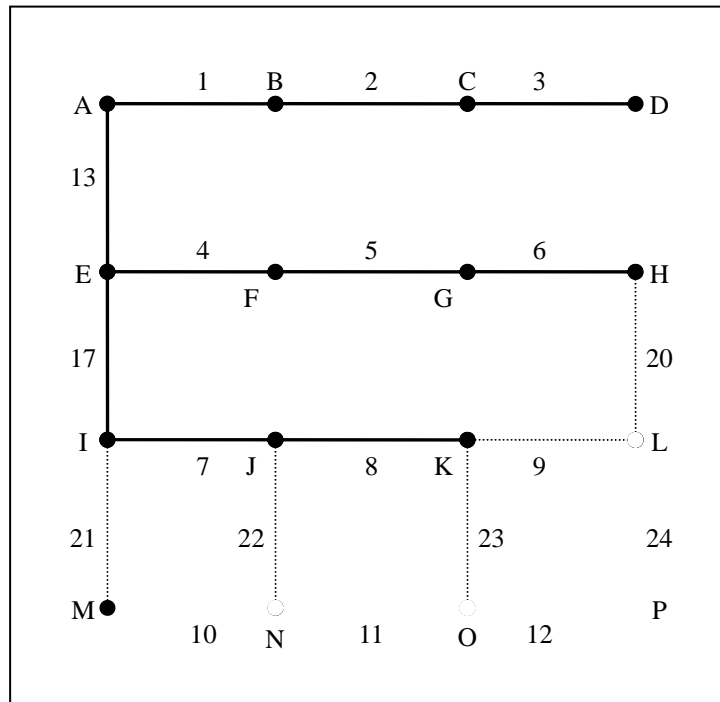
$$E_T = \{ (A, B), (B, C), (C, D), (A, E), (E, F), (F, G), (G, H), (E, I), (I, J) \}$$


<i>Kandidat_T</i>	(G, K)	(H, L)	(I, M)	(J, K)	(J, N)
Bewertung	19	20	21	8	22
Minumum				+	
Auswahl				+	

11. Schritt

$$V_T = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K\},$$

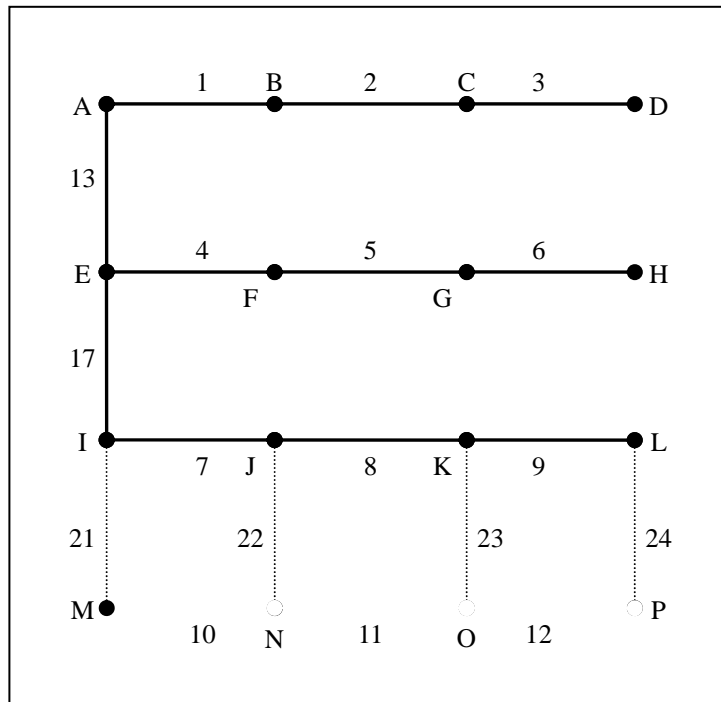
$$E_T = \{ (A, B), (B, C), (C, D), (A, E), (E, F), (F, G), (G, H), (E, I), (I, J), (J, K) \}$$



<i>Kandidat_T</i>	(H, L)	(I, M)	(J, N)	(K, L)	(K, O)
Bewertung	20	21	22	9	23
Minumum				+	
Auswahl				+	

12. Schritt

$$V_T = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L\},$$

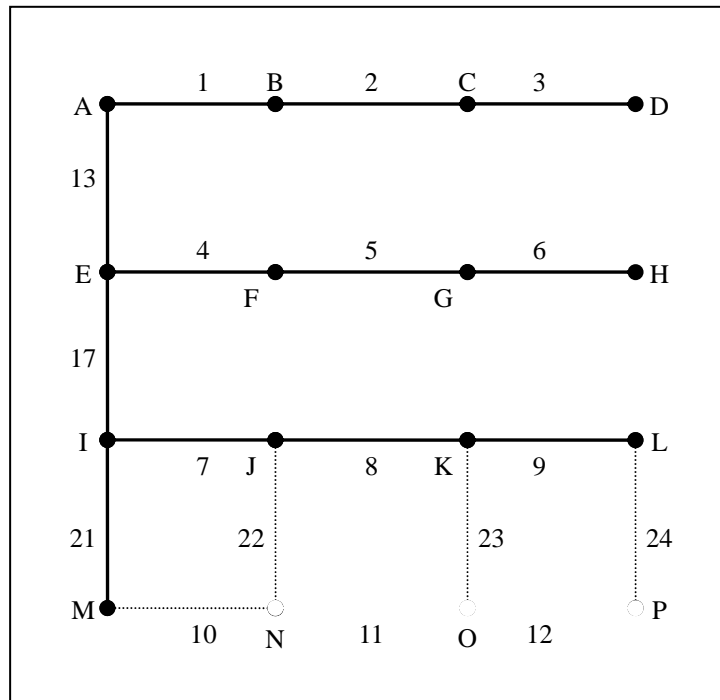
$$E_T = \{ (A, B), (B, C), (C, D), (A, E), (E, F), (F, G), (G, H), (E, I), (I, J), (J, K), (K, L) \}$$


<i>Kandidat_T</i>	(I, M)	(J, N)	(K, O)	(L, P)
Bewertung	21	22	23	24
Minumum	+			
Auswahl	+			

13. Schritt

$$V_T = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M\},$$

$$E_T = \{ (A, B), (B, C), (C, D), (A, E), (E, F), (F, G), (G, H), (E, I), (I, J), (J, K), (K, L), (I, M) \}$$

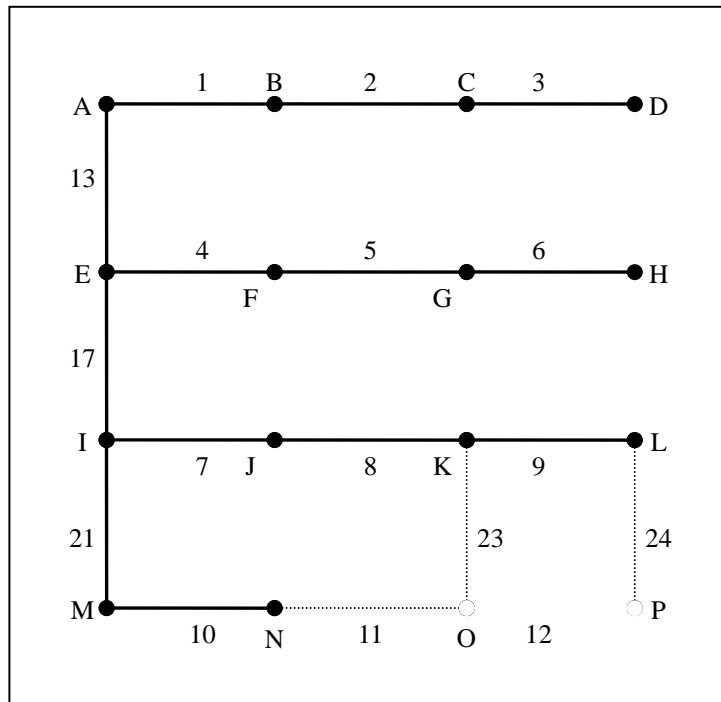


<i>Kandidat_T</i>	(J, N)	(K, O)	(L, P)	(M, N)
Bewertung	22	23	24	10
Minumum				+
Auswahl				+

14. Schritt

$$V_T = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N\},$$

$$E_T = \{ (A, B), (B, C), (C, D), (A, E), (E, F), (F, G), (G, H), (E, I), (I, J), (J, K), (K, L), (I, M), (M, N) \}$$

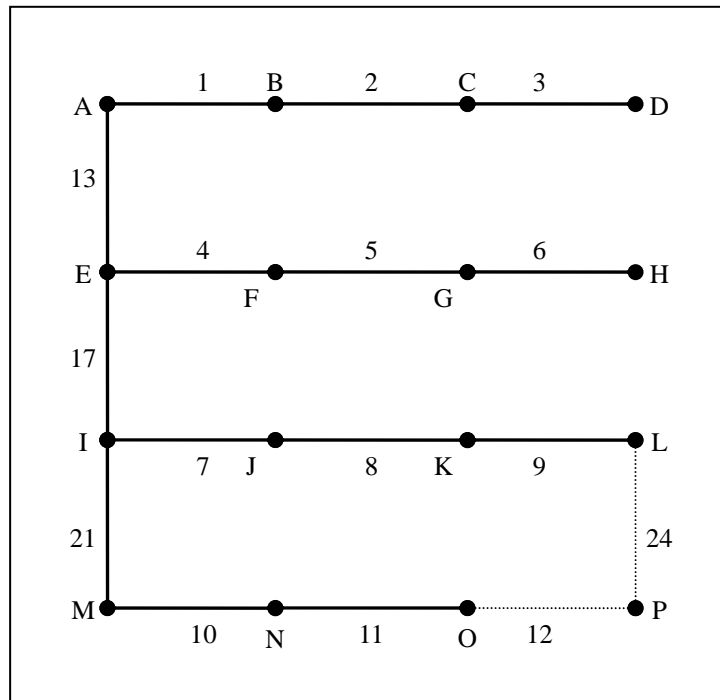


<i>Kandidat_T</i>	(K, O)	(L, P)	(N, O)
Bewertung	23	24	11
Minumum			+
Auswahl			+

15. Schritt

$$V_T = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O\},$$

$$E_T = \{ (A, B), (B, C), (C, D), (A, E), (E, F), (F, G), (G, H), (E, I), (I, J), (J, K), (K, L), (I, M), (M, N), (N, O) \}$$

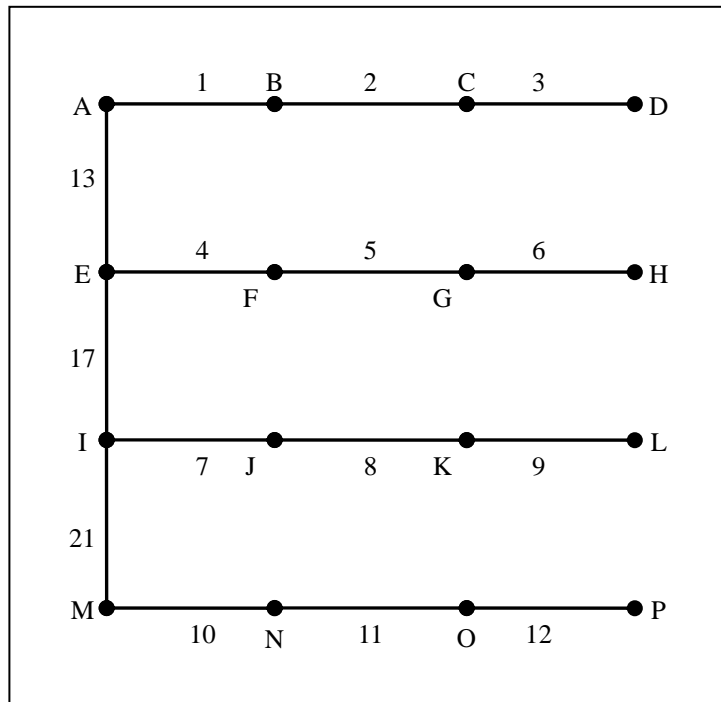


Kandidat_T	(L, P)	(O, P)
Bewertung	24	12
Minumum		+
Auswahl		+

Endstand

$$V_T = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P\},$$

$$E_T = \{ (A, B), (B, C), (C, D), (A, E), (E, F), (F, G), (G, H), (E, I), (I, J), (J, K), (K, L), (I, M), (M, N), (N, O), (O, P) \}$$



13. Aufgabe

Zeigen Sie: Sobald in einem zusammenhängenden Graphen jede Kante eine eindeutige Bewertung hat, die keine andere Kante hat, gibt es genau einen minimal (bzw. maximal) aufspannenden Baum.

Beweis durch Widerspruch: (nur für den minimal aufspannenden Baum)

Der zusammenhängende Graph sei $G(V, E, \Psi)$ mit Bewertung Γ . Angenommen, es gebe zwei MSB $T_1(V, E_1, \Psi_1)$ und $T_2(V, E_2, \Psi_2)$, die voneinander verschieden sind. Dann muss es eine Kante $e_1 \in E_1$ geben, die nicht zu E_2 gehört, für die also gilt: $e_1 \notin E_2$.

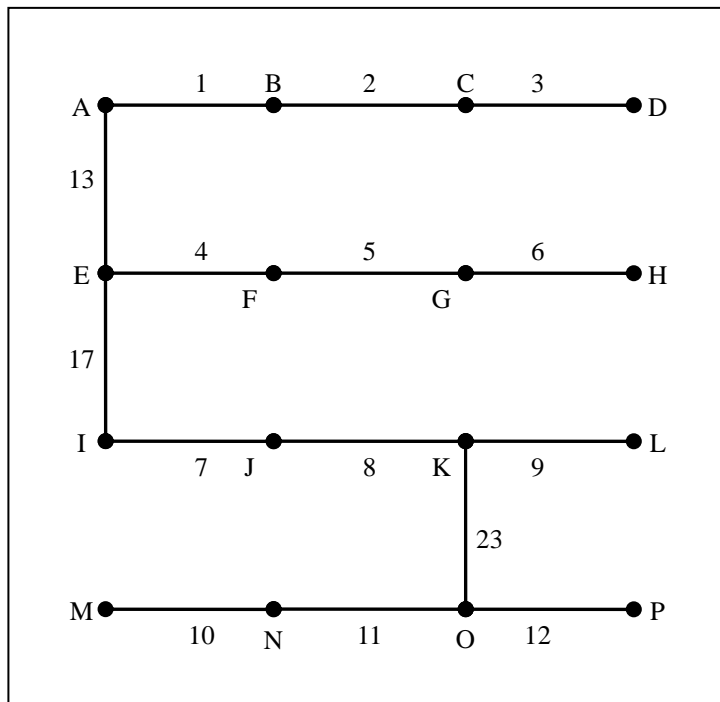
Es seien X und Y die beiden Endpunkte von e_1 . Weiter sei $F = E_1 \setminus \{e_1\}$ und $\Psi_F = \Psi - \text{eingeschränkt auf } F$. Dann besteht der Graph $U = U(V, F, \Psi)$ aus zwei disjunkten Zusammenhangskomponenten $U_1(V_1, F_1, \Psi_1)$ und $U_2(V_2, F_2, \Psi_2)$. Dabei sei $X \in V_1$ und dementsprechend $Y \in V_2$. Unter allen Kanten aus E , die Punkte aus V_1 mit Punkten aus V_2 miteinander verbinden, muss e_1 minimal sein, sonst wäre T_1 nicht minimal.

Insbesondere muss es in T_2 , genauer in E_2 eine Kante e_2 geben, deren einer Endpunkt in V_1 und deren anderer Endpunkt in V_2 liegt. Da nach Voraussetzung gilt: $\Gamma(e_1) < \Gamma(e_2)$ (nicht etwa $\Gamma(e_1) = \Gamma(e_2)$), wäre das Gesamtgewicht des aufspannenden Baums $T_3 = T_3(V, (E_2 \setminus \{e_2\}) \cup \{e_1\})$ kleiner als das von T_2 bzw. T_1 im Widerspruch zur Annahme, dass sowohl T_1 als auch T_2 minimal aufspannende Bäume waren.

14. Aufgabe

Finden Sie jetzt für den Graphen aus Aufgabe 12 einen aufspannenden Baum mit möglichst kleinen Kosten, der aber die Kante mit der Bewertung 23 auf jeden Fall enthält.

Wir gehen genau so vor, wie bei Aufgabe 12, mit einer Ausnahme: Wir beginnen mit der fest vorgegebenen Kante mit der Bewertung 23. Das Resultat ist:



15. Aufgabe

Wenden Sie den Algorithmus von Prim auf den Graphen an, der durch die folgende Kostenmatrix beschrieben wird. Die Zahlen repräsentieren die Kosten der Kanten, der Eintrag ∞ bedeutet: Es gibt keine Kante.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	2	∞	∞	3	1	∞	∞	∞	∞
1	2	0	1	∞	∞	∞	2	∞	∞	∞
2	∞	1	0	4	∞	∞	∞	3	∞	∞
3	∞	∞	4	0	5	∞	∞	∞	4	∞
4	3	∞	∞	5	0	∞	∞	∞	∞	5
5	1	∞	∞	∞	∞	0	∞	2	3	∞
6	∞	2	∞	∞	∞	∞	0	∞	4	5
7	∞	∞	3	∞	∞	2	∞	0	∞	1
8	∞	∞	∞	4	∞	3	4	∞	0	∞
9	∞	∞	∞	∞	5	∞	5	1	∞	0

1. Schritt: $V_T = \{0\}$, $E_T = \{\}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		2			3	1				
1	2									
2										
3										
4	3									
5	1									
6										
7										
8										
9										

<i>Kandidat_T</i>	(0, 1)	(0, 4)	(0,5)
Bewertung	2	3	1
Minumum			+
Auswahl			+

2. Schritt: $V_T = \{0, 5\}$, $E_T = \{(0,5)\}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		2			3	1				
1	2									
2										
3										
4	3									
5	1							2	3	
6										
7						2				
8						3				
9										

<i>Kandidat_T</i>	(0, 1)	(0, 4)	(5, 7)	(5, 8)
Bewertung	2	3	2	3
Minumum	+		+	
Auswahl	+			

3. Schritt: $V_T = \{0, 1, 5\}$, $E_T = \{(0, 1), (0, 5)\}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		2			3	1				
1	2		1				2			
2		1								
3										
4	3									
5	1							2	3	
6		2								
7						2				
8						3				
9										

<i>Kandidat_T</i>	(0, 4)	(1, 2)	(1, 6)	(5, 7)	(5, 8)
Bewertung	3	1	2	2	3
Minumum		+			
Auswahl		+			

4. Schritt: $V_T = \{0, 1, 2, 5\}$, $E_T = \{(0, 1), (0, 5), (1, 2)\}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		2			3	1				
1	2		1				2			
2		1		4				3		
3			4							
4	3									
5	1							2	3	
6		2								
7			3			2				
8						3				
9										

<i>Kandidat_T</i>	(0, 4)	(1, 6)	(2, 3)	(2, 7)	(5, 7)	(5, 8)
Bewertung	3	2	4	3	2	3
Minumum		+			+	
Auswahl		+				

5. Schritt: $V_T = \{0, 1, 2, 5, 6\}$, $E_T = \{(0, 1), (0, 5), (1, 2), (1, 6)\}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		2			3	1				
1	2		1				2			
2		1		4				3		
3			4							
4	3									
5	1							2	3	
6		2							4	5
7			3			2				
8						3	4			
9							5			

<i>Kandidat_T</i>	(0, 4)	(2, 3)	(2, 7)	(5, 7)	(5, 8)	(6, 8)	(6, 9)
Bewertung	3	4	3	2	3	4	5
Minumum				+			
Auswahl				+			

6. Schritt: $V_T = \{0, 1, 2, 5, 6, 7\}$, $E_T = \{(0, 1), (0, 5), (1, 2), (1, 6), (5, 7)\}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		2			3	1				
1	2		1				2			
2		1		4						
3			4							
4	3									
5	1							2	3	
6		2							4	5
7						2				1
8						3	4			
9							5	1		

<i>Kandidat_T</i>	(0, 4)	(2, 3)	(5, 8)	(6, 8)	(6, 9)	(7, 9)
Bewertung	3	4	3	4	5	1
Minumum						+
Auswahl						+

7. Schritt: $V_T = \{0, 1, 2, 5, 6, 7, 9\}$, $E_T = \{(0, 1), (0, 5), (1, 2), (1, 6), (5, 7), (7, 9)\}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		2			3	1				
1	2		1				2			
2		1		4						
3			4							
4	3									5
5	1							2	3	
6		2							4	
7						2				1
8						3	4			
9					5			1		

<i>Kandidat_T</i>	(0, 4)	(2, 3)	(5, 8)	(6, 8)	(9, 4)
Bewertung	3	4	3	4	5
Minumum	+		+		
Auswahl	+				

8. Schritt: $V_T = \{0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9\}$,

$E_T = \{(0, 1), (0, 4), (0, 5), (1, 2), (1, 6), (5, 7), (7, 9)\}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		2			3	1				
1	2		1				2			
2		1		4						
3			4		5					
4	3			5						
5	1							2	3	
6		2							4	
7						2				1
8						3	4			
9								1		

<i>Kandidat_T</i>	(2, 3)	(4, 3)	(5, 8)	(6, 8)
Bewertung	4	5	3	4
Minumum			+	
Auswahl			+	

$$E_T = \{ (0, 1), (0, 4), (0, 5), (1, 2), (1, 6), (5, 7), (7, 9), (5, 8) \}$$
[illegible]

Kandidat_T	(2, 3)	(4, 3)	(8, 3)
Bewertung	4	5	4
Minumum	+		+
Auswahl	+		

$$E_T = \{ (0, 1), (0, 4), (0, 5), (1, 2), (1, 6), (2, 3), (5, 7), (7, 9), (5, 8) \}$$
[illegible]

16. Aufgabe

Ein maximal aufspannender Baum für einen Graphen mit bewerteten Kanten ist ein aufspannender Baum, dessen Kostensumme so groß wie möglich ist. Geben Sie eine Modifikation von Prim's Algorithmus, die diesen maximal aufspannenden Baum liefert.

Algorithmus zur Konstruktion eines maximalen, aufspannenden Baumes in bewerteten, einfachen, ungerichteten, zusammenhängenden Graphen:

Es sei $G(V_G, E_G, \Psi_G)$ ein bewerteter, einfacher, ungerichteter, zusammenhängender Graph mit Bewertungsfunktion $\Gamma : E_G \rightarrow \mathbf{R}$. Es soll ein MaxSB $T(V_T, E_T, \Psi_T)$ von G konstruiert werden. Sei $A \in V_G$ ein beliebiger Punkt.

Setze $V_T = \{ A \}$, $E_T = \{ \}$

Solange $V_T \neq V_G$ ist, wiederhole die folgende Verarbeitung

{

Definiere die Menge $Kandidat_T \subseteq V_T \times (V_G \setminus V_T)$ durch:

$Kandidat_T = \{ (X, Y) \in V_T \times (V_G \setminus V_T) \mid$

Es gibt eine Kante $e \in E_G$ so, dass $\Psi(e) = \{ X, Y \} \}$

Sei nun $(X, Y) \in Kandidat_T$ mit eindeutig bestimmter Verbindungskante e .

Dann definiere $\Gamma_T((X, Y)) = \Gamma(e)$

Nun wähle ein Element $(X_{Max}, Y_{Max}) \in Kandidat_T$ mit der Eigenschaft:

$\Gamma_T((X_{Max}, Y_{Max})) = \text{Max} \{ \Gamma_T((X, Y)) \mid (X, Y) \in Kandidat_T \}$

e sei die Kante, die X_{Max} und Y_{Max} miteinander verbindet.

Setze $V_T = V_T \cup \{ Y_{Max} \}$, $E_T = E_T \cup \{ e \}$, $\Psi_T(e) = \Psi_G(e)$

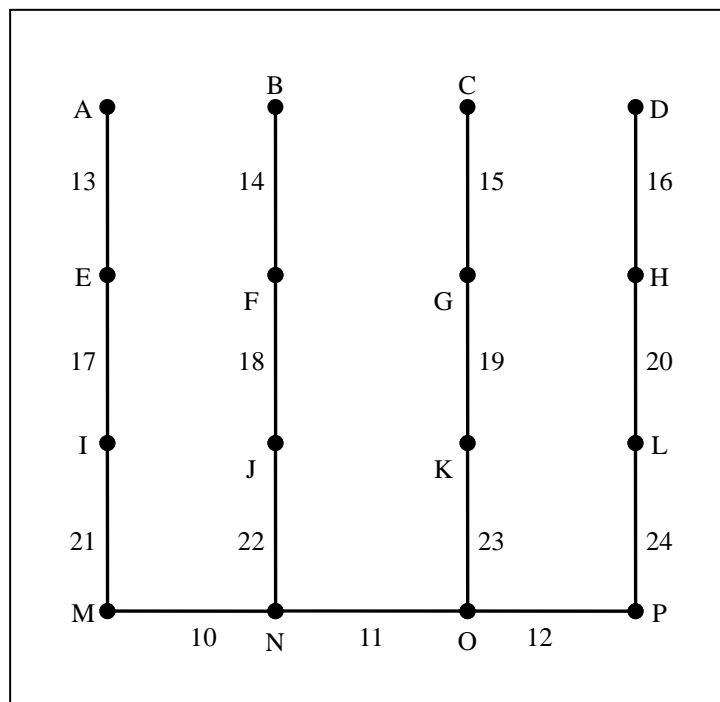
}

T ist jetzt ein maximaler aufspannender Baum von G

17. Aufgabe

Finden Sie einen maximal aufspannenden Baum für den Graphen aus Aufgabe 12.

Wir gehen genau so vor, wie bei Aufgabe 12, mit einer Ausnahme: Wir suchen in jedem Schritt die Kante des teuersten, des maximalen Kandidaten. Das Resultat ist:



18. Aufgabe

Finden Sie für den Graphen aus Aufgabe 12 einen aufspannenden Baum mit möglichst maximalen Kosten, der aber die Kante mit der Bewertung 1 auf jeden Fall enthält.

Wir gehen genau so vor, wie bei Aufgabe 17, mit einer Ausnahme: Wir beginnen mit der fest vorgegebenen Kante mit der Bewertung 1. Das Resultat ist:

