

1. Aufgabe

1. Beschreiben Sie die Ereignismenge Ω_1 beim Würfeln von drei unterscheidbaren Würfeln. Wie groß ist $|\Omega_1|$?

$$\Omega_1 = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid 1 \leq x_i \leq 6 \text{ für } 1 \leq i \leq 3 \}, |\Omega_1| = 6^3 = 216$$

2. Beschreiben Sie die Ereignismenge Ω_2 für die Augensumme, die beim Würfeln von drei unterscheidbaren Würfeln entsteht. Wie groß ist $|\Omega_2|$?

$$\Omega_2 = \{ y \mid 3 \leq y \leq 18 \}, |\Omega_2| = 16$$

3. Sei $\Omega := \Omega_1$. Sei $A \subseteq \Omega$ definiert durch $A := \{ \text{alle Würfe, bei denen die Augensumme} = 6 \text{ ist} \}$. Sei $B \subseteq \Omega$ definiert durch $B := \{ \text{alle Würfe, die genau eine 5 enthalten} \}$.

- (i) Berechnen Sie $|A|$ und $|B|$

$$|A| = 10, |B| = 3 \cdot 25 = 75$$

- (ii) Gibt es Ereignisse, die sowohl in A als auch in B enthalten sind?

$$\text{Nein, } A \cap B = \{ \}$$

- (iii) Es sei für beliebige $U \subseteq \Omega$ das Wahrscheinlichkeitsmaß P durch $P(U) = |U|/|\Omega|$ definiert. Zeigen Sie: P ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Vergleichen Sie bitte die Definition im ersten Abschnitt.

- (iv) Berechnen Sie $P(A)$, $P(B)$ und $P(A \cap B)$.

$$P(A) = \frac{10}{216}, P(B) = \frac{75}{216}, P(A \cap B) = 0$$

- (v) Sind A und B bezüglich dieses Maßes unabhängig voneinander?

$$\text{Nein, denn } P(A) \cdot P(B) = \frac{750}{46656} \neq 0 = P(A \cap B)$$

2. Aufgabe

1. Unter welcher Voraussetzung ist $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$?

Es ist $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, also gilt $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ nur, wenn $P(A \cap B) = 0$ ist.

2. Für zwei Ereignisse A und B gelte: $P(A) \geq 0,99$, $P(B) \geq 0,97$. Folgern Sie: $P(A \cap B) \geq 0,96$

$$\begin{aligned} \text{Es ist } P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \geq 0,99 + 0,97 - P(A \cap B) = \\ &= 1,96 - P(A \cap B) \leq 1 \Leftrightarrow P(A \cap B) \geq 0,96 \end{aligned}$$

3. Für zwei Ereignisse A und B gelte: $P(A) \geq p_A$, $P(B) \geq p_B$. Finden Sie analog der Aufgabe 2b eine untere Schranke für $P(A \cap B)$. Hinweis: Diese untere Schranke ist nur in bestimmten Fällen > 0 . Wann ist das so?

Es ist $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \geq p_A + p_B - P(A \cap B) \leq 1 \Leftrightarrow P(A \cap B) \geq p_A + p_B - 1$. Diese letzte Zahl ist nur dann > 0 (und also nur dann von Nutzen), wenn $p_A + p_B > 1$ ist.

3. Aufgabe

Eine Fabrikation von Kasemafunkeln (setzen Sie dafür: Bolzen, Chips, CD-Rohlinge – ganz wie Sie wollen) ist fehleranfällig: Es gibt den Fehler A, der bei 10 % der gefertigten Kasemafunkeln auftritt, und den Fehler B, der bei 5 % der gefertigten Kasemafunkeln auftritt. Das Auftreten der beiden Fehler ist voneinander unabhängig.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass keiner der beiden Fehler auftritt?

$$\begin{aligned}\text{Diese Wahrscheinlichkeit} &= 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B) = 0,855. \text{ Das entspricht } 85,5 \%\end{aligned}$$

2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Fehler A auftritt ohne dass Fehler B auftritt?

$$\begin{aligned}\text{Diese Wahrscheinlichkeit} &= P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = 0,095. \\ \text{Das entspricht } &9,5 \%\end{aligned}$$

3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Fehler auftreten?

$$\begin{aligned}\text{Diese Wahrscheinlichkeit} &= P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,005. \\ \text{Das entspricht } &0,5 \%\end{aligned}$$

4. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens einer der beiden Fehler auftritt?

$$\begin{aligned}\text{Diese Wahrscheinlichkeit} &= 1 - P(A \cap B) = 1 - P(A) \cdot P(B) = 0,995. \\ \text{Das entspricht } &99,5 \%\end{aligned}$$

4. Aufgabe

Die Fabrikation von Lesebrillen für Maulwürfe ist ebenfalls fehleranfällig: Es gibt den Fehler A, der eine Wahrscheinlichkeit von 0,06 hat und den Fehler B, der die doppelte Wahrscheinlichkeit 0,12 besitzt. Beide Fehler zusammen treten mit der Wahrscheinlichkeit von 0,03 auf.

1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt mindestens einer der beiden Fehler auf?

$$\begin{aligned} \text{Diese Wahrscheinlichkeit} &= P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \\ &= 0,06 + 0,12 - 0,03 = 0,15. \text{ Das entspricht } 15 \% \end{aligned}$$

2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Lesebrille für Maulwürfe fehlerfrei?

$$\text{Diese Wahrscheinlichkeit} = 1 - P(A \cup B) = 0,85. \text{ Das entspricht } 85 \%$$

5. Aufgabe

In einem Wahrscheinlichkeitsraum seien für die Ereignisse A, B und C die folgenden Werte bekannt: $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$, $P(B \cap C)$, $P(A \cap B \cap C)$

$$\begin{aligned} \text{Es ist } P(A \cup B \cup C) &= \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

1. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei dieser Ereignisse eintreten.

$$\begin{aligned} \text{Diese Wahrscheinlichkeit} &= \\ &= P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C) - 3 \cdot P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

2. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau eins dieser Ereignisse eintritt.

$$\begin{aligned} \text{Diese Wahrscheinlichkeit} &= P(A) + P(B) + P(C) - \\ &\quad - 2 \cdot P(A \cap B) - 2 \cdot P(A \cap C) - 2 \cdot P(B \cap C) + \\ &\quad + 3 \cdot P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

6. Aufgabe

Warum ist es zuweilen unmöglich, in einem Wahrscheinlichkeitsraum Ω für die Ereignisse $A \subseteq \Omega$ das Wahrscheinlichkeitsmaß P durch

$$P(A) = (\text{Anzahl der Elemente von } A) / (\text{Anzahl der Elemente von } \Omega)$$

zu beschreiben?

Das ist immer dann unmöglich, wenn Ω unendlich viele Elemente hat.

7. Aufgabe

Ferdi Fuscher hat einen Würfel so manipuliert, dass er nach langen Tests die folgenden Wahrscheinlichkeiten ermitteln konnte: $P(1) = P(2) = 1/12$, $P(3) = P(4) = 1/6$, $P(5) = P(6) = 3/12$.

1. Wie groß ist $P(\text{Augenzahl} > 3)$?

$$P(\text{Augenzahl} > 3) = P(4) + P(5) + P(6) = 8/12 = 2/3$$

2. Wie groß ist $P(\text{Augenzahl ist eine gerade Zahl})$?

$$P(\text{Augenzahl ist eine gerade Zahl}) = P(2) + P(4) + P(6) = 1/2$$

8. Aufgabe

Ich habe 9 rote, 4 gelbe und 12 schwarze Socken in meiner Schublade.

Das sind 25 Socken. Es gibt $\binom{25}{2} = 300$ Zweierpaare, die entnommen werden können.

1. Wie viele Möglichkeiten gibt es für mich, bei zufälliger Auswahl zweier Socken 2 verschiedenfarbige Socken auszuwählen?

Das sind $9 \cdot 4 + 9 \cdot 12 + 4 \cdot 12 = 192$ Möglichkeiten

2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für die Auswahl zweier verschiedenfarbigen Socken?

Diese Wahrscheinlichkeit $= 192/300 = 0,64$

3. Wie viele Möglichkeiten gibt es für mich, bei zufälliger Auswahl zweier Socken 2 gleichfarbige Socken auszuwählen?

Das sind $\binom{9}{2} + \binom{4}{2} + \binom{12}{2} = 36 + 6 + 66 = 108$ Möglichkeiten

4. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für die Auswahl zweier gleichfarbigen Socken?

Diese Wahrscheinlichkeit $= 108/300 = 0,36$

9. Aufgabe

In einer Abiturklasse sind 10 Schülerinnen und 8 Schüler. Auf wie viele Arten kann die Abiturklasse für ein Abschlussphoto angeordnet werden,

1. wenn es keine Einschränkungen gibt?

$$\text{Anzahl der Arten} = 18! = 6402373705728000$$

2. wenn sich Mädchen und Jungen nach Geschlecht getrennt aufstellen müssen?

$$\text{Anzahl der Arten} = 2 \cdot 10! \cdot 8! = 292626432000$$

3. wenn die Mädchen alle auf der linken Seite des Photos sein sollen?

$$\text{Anzahl der Arten} = 10! \cdot 8! = 146313216000$$

10. Aufgabe

Sie haben eine Anwendung geschrieben, für die Sie eine Passwort-Logik entwerfen wollen. Sie legen fest: Ein Passwort muss aus 8 Zeichen bestehen. Als Zeichenvorrat lassen Sie 26 Großbuchstaben, 26 Kleinbuchstaben und 10 Ziffern zu. Wie viele Möglichkeiten für Passwörter gibt es,

1. wenn es sonst keine Einschränkungen gibt?

$$(26 + 26 + 10)^8 = 218\,340\,105\,584\,896 \quad (218 \text{ Billionen } 340 \text{ Milliarden } 105 \text{ Millionen } 584 \text{ Tausend } 896)$$

2. wenn jedes Zeichen nur einmal benutzt werden darf?

$$62!/54! = 136\,325\,893\,334\,400$$

3. wenn jeder Buchstabe beliebig oft vorkommen darf, aber jedes Passwort aus 7 Buchstaben und genau einer Ziffer, deren Position beliebig ist, bestehen muss.?

$$52^7 \cdot 8 \cdot 10 = 82\,245\,736\,202\,240$$

11. Aufgabe

Häuptling Listiger Fuchs hat herausgefunden, dass das Codewort, das er braucht, um die Aktiendepots der feindlichen Übernahmegegner einsehen zu können, eine Permutation des Wortes „Mississippi“ ist. Wie viele Möglichkeiten gibt es für solch eine Permutation?

Wir haben 11 Stellen, darunter 1 M, 4 I, 4 S, 2 P. Also gibt es:

$$11 \cdot \binom{10}{4} \cdot \binom{6}{4} = 11 \cdot 210 \cdot 15 = 34650 = (\text{Probe})$$

$$= 55 \cdot 126 \cdot 5 = \binom{11}{2} \cdot \binom{9}{4} \cdot \binom{5}{4} \text{ Möglichkeiten.}$$

12. Aufgabe

1. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 254 Studentinnen und Studenten auf drei Kurse zu verteilen? Lassen Sie dabei auch die Möglichkeit zu, dass ein oder zwei dieser Kurse leer bleiben.

Mein Modell ist eine Urne mit 3 Kugeln, aus der 254 mal mit Zurücklegen gezogen wird. Die Reihenfolge der Ziehungen spielt dabei keine Rolle. Wir erhalten

$$\binom{3 + 254 - 1}{254} = \binom{256}{254} = 32640 \text{ Möglichkeiten.}$$

2. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 254 Studentinnen und Studenten so auf drei Kurse zu verteilen, dass höchstens einer dieser Kurse leer bleibt?

$$\binom{3 + 254 - 1}{254} - 3 \cdot \binom{2 + 254 - 1}{254} = 32640 - 3 \cdot 255 = 31875$$

Möglichkeiten

3. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 254 Studentinnen und Studenten so auf drei Kurse zu verteilen, dass keiner dieser Kurse leer bleibt?

$$\binom{3+254-1}{254} - 3 \cdot \binom{2+254-1}{254} - 3 = 32640 - 3 \cdot 255 - 3 = 31872$$

Möglichkeiten

13. Aufgabe

Bestimmen Sie die Anzahl der Lösungen (x_1, x_2, x_3, x_4) der Gleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12 \text{ mit } x_i \in \mathbf{N}.$$

Unser Modell ist eine Urne mit 4 Kugeln, aus der 12-mal mit Zurücklegen gezogen wird. Die Reihenfolge der Ziehungen spielt dabei keine Rolle. Wir erhalten

$$\binom{4+12-1}{12} = \binom{15}{12} = 455 \text{ Lösungen.}$$

14. Aufgabe

Bestimmen Sie die Anzahl der Lösungen (x_1, x_2, x_3, x_4) der Gleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 3 \text{ mit } x_i \in \mathbf{N}.$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned} & \binom{4+3-1}{3} + \binom{4+2-1}{2} + \binom{4+1-1}{1} + \binom{4+0-1}{0} = \\ & = \binom{6}{3} + \binom{5}{2} + \binom{4}{1} + \binom{3}{0} = 20 + 10 + 4 + 1 = 35 \text{ Lösungen} \end{aligned}$$

15. Aufgabe

In einem Hut liegen 100 Lose, von denen 40 Nieten sind. Sie ziehen 4 Lose. Schätzen Sie zunächst die Wahrscheinlichkeit, dass Sie mindestens 2 Gewinne gezogen haben und berechnen Sie sie dann.

$$\frac{\binom{40}{2} \cdot \binom{60}{2}}{\binom{100}{4}} + \frac{\binom{40}{1} \cdot \binom{60}{3}}{\binom{100}{4}} + \frac{\binom{40}{0} \cdot \binom{60}{4}}{\binom{100}{4}} =$$

$$\frac{780 \cdot 1770 + 40 \cdot 34220 + 1 \cdot 487635}{3921225} = \frac{3237035}{3921225} = 0,8255$$

Das sind ungefähr 82,55 %

16. Aufgabe

1. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 12 identische Pakete auf 8 Körbe zu verteilen?

Wie viele Möglichkeiten gibt es, 12 identische Pakete auf n Körbe zu verteilen?

Antwort: $\binom{n+12-1}{12}$ Möglichkeiten.

Bei n = 8: $\binom{8+12-1}{12} = \binom{19}{12} = 50388$ Möglichkeiten.

2. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 12 identische Pakete auf 1 Korb zu verteilen? (Entschuldigen Sie die dumme Frage, aber unter anderem ist dieses Problem eine gute Gelegenheit, zu überprüfen, wie leistungsfähig Ihre allgemeine Formel für dieses Problem ist)

Bei n = 1: $\binom{1+12-1}{12} = \binom{12}{12} = 1$ Möglichkeit wie erwartet.

17. Aufgabe

Sie werfen 10 mal eine faire Münze. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie mehr als 6 mal das Ergebnis „Kopf“ erhalten?

$$\frac{\binom{10}{7} + \binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10}}{2^{10}} = \frac{120 + 45 + 10 + 1}{1024} = \frac{176}{1024} = 0,1719$$

Das sind ungefähr 17,19 %

18. Aufgabe

Wir betrachten Lotto als das Spiel, bei dem 6 Kugeln aus 49 Kugeln gezogen werden. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für

1. einen Dreier im Lotto

$$\frac{\binom{43}{3} \cdot \binom{6}{3}}{\binom{49}{6}} = \frac{12341 \cdot 20}{13983816} = 0,0177,$$

also ungefähr 1,77 %

2. einen Vierer im Lotto

$$\frac{\binom{43}{2} \cdot \binom{6}{4}}{\binom{49}{6}} = \frac{903 \cdot 15}{13983816} = 0,0010,$$

also ungefähr 0,1 %

3. einen Fünfer im Lotto

$$\frac{\binom{43}{1} \cdot \binom{6}{5}}{\binom{49}{6}} = \frac{43 \cdot 6}{13983816} = 0,000018,$$

also ungefähr 0 %

19. Aufgabe

Vor der Ziehung der Lottozahlen wird die Anlage jedes Mal überprüft. Nehmen Sie an, dass dabei zwei Kugeln (mit Zurücklegen) gezogen werden.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Kugel die 1, die zweite Kugel die 2 repräsentiert?

$$\frac{1}{49^2} = \frac{1}{2401} = 0,0004, \text{ also ungefähr } 0,04 \%$$

2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Kugel genau eine Zahl größer als die erste Kugel ist?

$$\frac{1}{49} = 0,0204, \text{ also ungefähr } 2,04 \%$$

3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Kugel eine größere Zahl als die erste Kugel trägt?

Sei x die Zahl der ersten Kugel. Dann ist die Wahrscheinlichkeit =

$$= \frac{49 - x}{49} = 1 - \frac{x}{49}$$

20. Aufgabe

Beantworten Sie noch einmal dieselben Fragen wie in Aufgabe 19 – aber nehmen Sie jetzt an, dass die beiden Kugeln ohne Zurücklegen gezogen werden.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Kugel die 1, die zweite Kugel die 2 repräsentiert?

$$\frac{1}{49 \cdot 48} = \frac{1}{2352} = 0,0004, \text{ also ebenfalls ungefähr } 0,04 \%$$

2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Kugel genau eine Zahl größer als die erste Kugel ist?

$$\frac{1}{48} = 0,0208, \text{ also ungefähr } 2,08 \%$$

3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Kugel eine größere Zahl als die erste Kugel trägt?

$$\begin{aligned} \text{Sei } x \text{ die Zahl der ersten Kugel. Dann ist die Wahrscheinlichkeit} &= \\ &= \frac{49 - x}{48} \end{aligned}$$

21. Aufgabe

Nehmen Sie an, ein Jahr habe grundsätzlich 365 Tage. Wählen Sie nun 3 Personen zufällig aus.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese 3 Personen am 1. Januar Geburtstag haben?

$$\frac{1}{365^3} = \frac{1}{48627125}$$

2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese 3 Personen am selben Tag Geburtstag haben? Schätzen Sie zunächst, ob diese Wahrscheinlichkeit größer, gleich oder kleiner der Wahrscheinlichkeit aus Aufgabenteil a ist. Berechnen Sie sie dann.

Sie muss größer sein, da eine Person „freie Wahl“ für ihren Geburtstag hat. Sie ist: $\frac{1}{365^2} = \frac{1}{133225}$

22. Aufgabe

In einem Produktionszyklus von 100 Bauteilen sind 9 Bauteile fehlerhaft. Es werden (ohne Zurücklegen) 7 Bauteile als Stichprobe zur Qualitätsprüfung entnommen.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass keines der 7 Bauteile fehlerhaft ist?

$$\text{Sie ist } \frac{\binom{91}{7} \cdot \binom{9}{0}}{\binom{100}{7}} = \frac{8093990190 \cdot 1}{16007560800} = 0,5056.$$

Das sind ungefähr 50,56 %

2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau eines der 7 Bauteile fehlerhaft ist?

$$\text{Sie ist } \frac{\binom{91}{6} \cdot \binom{9}{1}}{\binom{100}{7}} = \frac{666563898 \cdot 9}{16007560800} = 0,3748.$$

Das sind ungefähr 37,48 %

3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens zwei der 7 Bauteile fehlerhaft sind?

Sie ist

$$\begin{aligned} & \frac{\binom{91}{7} \cdot \binom{9}{0}}{\binom{100}{7}} + \frac{\binom{91}{6} \cdot \binom{9}{1}}{\binom{100}{7}} + \frac{\binom{91}{5} \cdot \binom{9}{2}}{\binom{100}{7}} = \\ &= \frac{8093990190 \cdot 1 + 666563898 \cdot 9 + 46504458 \cdot 36}{16007560800} = \\ &= \frac{8093990190 \cdot 1 + 5999075082 + 1674160488}{16007560800} = \\ & \frac{15767225760}{16007560800} = 0,9850 \end{aligned}$$

Das sind ungefähr 98,50 %

4. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als zwei der 7 Bauteile fehlerhaft sind?

Ungefähr $100 - 98,50 = 1,50$ %

23. Aufgabe

In meiner letzten Vorlesung haben sich 56 Studentinnen und Studenten zur Klausur angemeldet. Berechnen Sie unter der Annahme, dass ein Jahr immer 365 Tage hat, die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 2 von diesen am gleichen Kalendertag (ohne Berücksichtigung des Jahres) Geburtstag haben.

$P(\text{unter 56 haben mindestens 2 am selben Tag Geburtstag}) =$

$$P_k = 1 - \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{365}\right) \text{ für } k = 56. \text{ Es ist } P_{56} = 98,83 \%$$

Zur Berechnung können Sie das C++ - Programm *Aufgabe23* benutzen, dass ich ebenfalls auf meiner Homepage abgestellt habe.

24. Aufgabe

Es werden an n Personen je ein Brief geschrieben und je ein Briefumschlag adressiert. Briefe und Umschläge werden völlig zufällig miteinander kombiniert.

1. Es sei $n = 5$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Brief im richtigen Umschlag landet?

Es ist:

$$P_5 = \sum_{k=1}^5 (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k!} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = 0,6\bar{3}$$

2. Es sei $n = 6$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Brief im richtigen Umschlag landet?

Es ist:

$$P_6 = P_5 - \frac{1}{720} = 0,6319\bar{4}$$

3. Geben Sie auf Grund der Ergebnisse aus den Aufgabenteilen a und b eine untere und eine obere Abschätzung für die Eulersche Zahl e an.

Es ist:

$$0,6319\bar{4} \leq 1 - \frac{1}{e} \leq 0,6\bar{3}, \text{ d.h.}$$

$$0,3\bar{6} \leq \frac{1}{e} \leq 0,3680\bar{5}, \text{ d.h.}$$

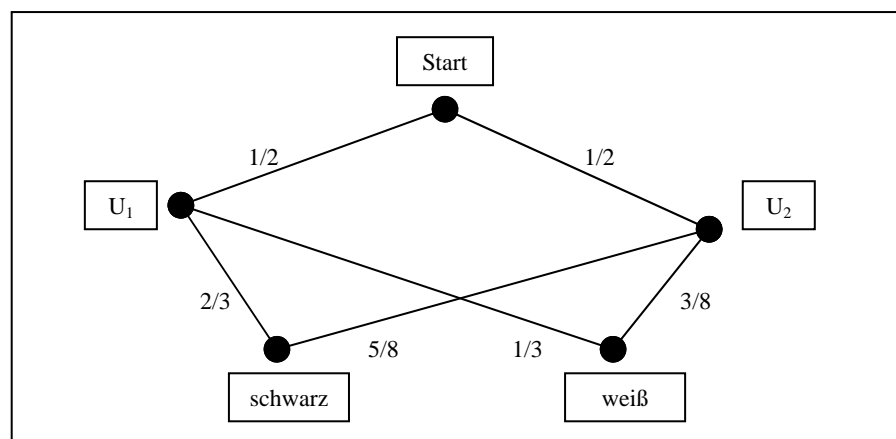
$$2,716981132075\bar{4} \leq e \leq 2,7\bar{2}$$

Das ist schon eine ganz gute Approximation für $e = 2,718281828 \dots$

25. Aufgabe

Gegeben seien 2 Urnen. Die erste Urne enthält vier schwarze und zwei weiße Kugeln. Die zweite Urne enthält fünf schwarze und drei weiße Kugeln. Zunächst wird eine Urne zufällig ausgewählt, anschließend wird eine Kugel zufällig aus der ausgewählten Urne gezogen.

1. Zeichnen Sie ein geeignetes Baumdiagramm und geben Sie im Baumdiagramm die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten und bedingten Wahrscheinlichkeiten an.



2. Wie groß ist die totale Wahrscheinlichkeit, dass eine schwarze Kugel gezogen wird?

$$\text{Sie ist } \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} = \frac{16 + 15}{48} = \frac{31}{48}. \text{ Das sind ungefähr } 64,58 \%$$

3. Wie groß wäre die Wahrscheinlichkeit, dass eine schwarze Kugel gezogen wird, wenn alle Kugeln in einer Urne gelegen hätten?

$$\text{Sie wäre } \frac{9}{14} = 0,6429. \text{ Das sind ungefähr } 64,29 \%$$

26. Aufgabe

In einem komplexen Produktionsprozess von Bauteilen gibt es einen empirisch ermittelte Anteil von 15 %, der fehlerhaft ist. Ein Prüfprozess erkennt 90 % der fehlerhaften Bauteile, beurteilt allerdings auch 0,1 % der fehlerfreien Bauteile als fehlerhaft.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bauteil, das der Prüfprozess als fehlerfrei beurteilt hat, auch wirklich in Ordnung ist?

Gegeben ein Bauteil x . Wir definieren:

$x+$ bedeutet: x ist in Ordnung

$x-$ bedeutet: x ist fehlerhaft.

$px+$ bedeutet: der Prüfprozess sagt: x ist in Ordnung

$px-$ bedeutet: der Prüfprozess sagt: x ist fehlerhaft

Wir suchen: $P(x+ | px+)$

Wir wissen:

$$P(x+) = 0,85$$

$$P(px+ | x+) = 0,999$$

$$P(x-) = 0,15$$

$$P(px+ | x-) = 0,1$$

Wir brauchen also die Formel von Bayes, die sagt:

$$\begin{aligned} P(x+ | px+) &= \frac{P(x+) \cdot P(px+ | x+)}{P(x+) \cdot P(px+ | x+) + P(x-) \cdot P(px+ | x-)} = \\ &= \frac{0,85 \cdot 0,999}{0,85 \cdot 0,999 + 0,15 \cdot 0,1} = 0,9826 \end{aligned}$$

Das sind ungefähr 98,26%

2. Wie hoch ist der Anteil an defekten Bauteilen, den der Prüfprozess in den Verkauf gehen lässt?

$$1 - 0,9826 = 0,0174, \text{ das sind ungefähr } 1,74 \%$$

27. Aufgabe

Eine bestimmte Krankheit tritt bei 0,6 % der Bevölkerung auf. Es ist nun ein Test entwickelt worden, der zwar 99 % der kranken Testpersonen als krank erkennt, der aber auch bei 3% der gesunden Testpersonen diese Krankheit diagnostiziert. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine von diesem Test als krank diagnostizierte Person auch wirklich krank ist?

Gegeben eine Person x . Wir definieren:

$x+$	bedeutet:	x ist gesund
$x-$	bedeutet:	x ist krank.
$tx+$	bedeutet:	der Test sagt: x ist gesund
$tx-$	bedeutet:	der Test sagt: x ist krank

Wir suchen: $P(x- | tx-)$

Wir wissen:

$$P(x-) = 0,006$$

$$P(tx- | x-) = 0,99$$

$$P(x+) = 0,994$$

$$P(tx- | x+) = 0,03$$

Wir brauchen also die Formel von Bayes, die sagt:

$$\begin{aligned} P(x- | tx-) &= \frac{P(x-) \cdot P(tx- | x-)}{P(x-) \cdot P(tx- | x-) + P(x+) \cdot P(tx- | x+)} = \\ &= \frac{0,006 \cdot 0,99}{0,006 \cdot 0,99 + 0,994 \cdot 0,03} = 0,1661 \end{aligned}$$

Das sind ungefähr 16,61%