

1. Aufgabe

Es seien X und Y zwei Zufallsvariablen auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum. Unter welchen jeweiligen Bedingungen an X und Y gilt:

1. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Diese Beziehung gilt immer. (Satz 23.7)

2. $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$

Diese Beziehung ist nur garantiert, falls X und Y stochastisch unabhängig sind. (Satz 23.7)

3. $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$

Auch diese Beziehung ist nur garantiert, falls X und Y stochastisch unabhängig sind. (Satz 23.7)

2. Aufgabe

Geben Sie ein Beispiel für eine Zufallsvariable X mit $\text{Var}(X) = 0$.

Es sei Ω eine nicht leere Ereignismenge und $X: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ eine Abbildung, die eine Zufallsvariable ist. (Wissen Sie noch die entsprechende Anforderung dafür?)
Damit $\text{Var}(X) = 0$ ist, muss X konstant sein, d.h. für beliebige $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ muss gelten: $X(\omega_1) = X(\omega_2)$

3. Aufgabe

Es sei X eine Zufallsvariable und $Z = X^*$ die zugehörige Standardisierung. Drücken Sie die Verteilungsfunktion F_Z von Z mit Hilfe der Verteilungsfunktion F_X von X aus.

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= P\left(\frac{X - E(X)}{\sigma(X)} \leq x\right) = P(X \leq x \cdot \sigma(X) + E(X)) = \\ &= F_X(x \cdot \sigma(X) + E(X)) \end{aligned}$$

4. Aufgabe

Gegeben eine Zufallsvariable X , die die Werte $x_i = 1, 2, 3$ mit den Wahrscheinlichkeiten $p_i = 1/5, 3/10, 1/2$ für $i = 1, 2, 3$ annehmen kann.

- a. Ist X damit bereits vollständig beschrieben? Oder gibt es die Möglichkeit, dass X noch andere Werte annehmen kann?

$$\text{Es ist } p_1 + p_2 + p_3 = \frac{1}{5} + \frac{3}{10} + \frac{1}{2} = \frac{10}{10} = 1$$

d.h. X ist damit bereits vollständig beschrieben.

- b. Berechnen Sie den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung von X .

$$E(X) = \frac{1}{5} + \frac{6}{10} + \frac{3}{2} = \frac{23}{10} = 2,3$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= (1 - 2,3)^2 \cdot \frac{1}{5} + (2 - 2,3)^2 \cdot \frac{3}{10} + (3 - 2,3)^2 \cdot \frac{1}{2} = \\ &= \frac{3,38}{10} + \frac{0,27}{10} + \frac{2,45}{10} = 0,61 \end{aligned}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} = 0,781$$

5. Aufgabe

Sei X die Anzahl der Jahre, die vergehen können, bis bei einem PC ein bestimmtes Bauteil ersetzt werden muss. X habe die Werte $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$ und $x_5 = 4$. Dazu gehören: $p_1 = 0,1$; $p_2 = 0,2$; $p_3 = 0,3$; $p_4 = 0,25$ und $p_5 = 0,15$. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von X . Wenn Sie dieses Bauteil verkaufen, wie viele Jahre sollten Sie höchstens Garantie geben?

$$E(X) = 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,25 + 4 \cdot 0,15 = 2,15$$

(Sie sollten also höchstens 2 Jahre Garantie geben – oder eine andere Preiskalkulation machen)

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= (0 - 2,15)^2 \cdot 0,1 + (1 - 2,15)^2 \cdot 0,2 + (2 - 2,15)^2 \cdot 0,3 + \\ &\quad + (3 - 2,15)^2 \cdot 0,25 + (4 - 2,15)^2 \cdot 0,15 = \\ &= 4,6225 \cdot 0,1 + 1,3225 \cdot 0,2 + 0,0225 \cdot 0,3 + 0,7225 \cdot 0,25 + 3,4225 \cdot 0,15 = \\ &= 0,46225 + 0,2645 + 0,00675 + 0,180625 + 0,513375 = \\ &= 1,4275 \end{aligned}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} = 1,195$$

6. Aufgabe

Sie brauchen Geld! Sie bieten deshalb ein Gewinnspiel an, das folgendermaßen funktioniert:

Ein Teilnehmer muss 1 Euro Einsatz zahlen. Es wird zweimal gewürfelt. Bei einer Augensumme von 11 erhält der Spieler x Euro ausgezahlt, bei einer Augensumme von 12 erhält der Spieler $2 \cdot x$ Euro ausgezahlt. Bei allen anderen Ergebnissen wird nichts ausgezahlt. Wie sollten Sie x als ganzzahligen Eurobetrag mindestens wählen, wenn Sie das Spiel einerseits für Ihre Kunden so attraktiv wie möglich machen wollen und aber andererseits bei genügend häufigem Spiel einen Gewinn machen wollen?

Sie müssen dazu den Erwartungswert der Zufallsvariable $X = \text{Reingewinn}$ berechnen.

Es sei also X die Zufallsvariable, die Ihren (des Veranstalters) Reingewinn wiedergibt. Dann gilt:

$$\begin{aligned} P(X = 1 - 2x) &= P(\text{Augensumme} = 12) = 1/36 \\ P(X = 1 - x) &= P(\text{Augensumme} = 11) = 2/36 \\ P(X = 1) &= P(\text{Augensumme} < 11) = 33/36 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dann ist } E(X) &= (1 - 2x) \cdot (1/36) + (1 - x) \cdot (2/36) + 33/36 = \\ &= 1 - (x/9) > 0 \text{ genau dann, wenn } x < 9 \text{ ist.} \end{aligned}$$

Ihr Gewinnparameter x sollte also den Wert 8 haben, was für Glücksspieler, die nicht fit in Wahrscheinlichkeitsrechnung sind, immer noch attraktiv genug klingt. (Setze 1 Euro, gewinne 16 Euro)

7. Aufgabe

Ein Würfel sei manipuliert worden. Es gelte jetzt: $P(1) = 1/12$, $P(2) = 1/6$, $P(3) = 1/6$, $P(4) = 1/6$, $P(5) = 1/6$, $P(6) = 1/4$.

1. Geben Sie Dichte- und die Verteilungsfunktion an!

$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. mit $f(x) = 0$ für $x \notin \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $f(1) = 1/12$, $f(2) = 1/6$, $f(3) = 1/6$, $f(4) = 1/6$, $f(5) = 1/6$, $f(6) = 1/4$ ist die Dichtefunktion.

$F: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ mit

- $F(x) = 0$ für $x < 1$
- $F(x) = 1/12$ für $1 \leq x < 2$
- $F(x) = 1/4$ für $2 \leq x < 3$
- $F(x) = 5/12$ für $3 \leq x < 4$
- $F(x) = 7/12$ für $4 \leq x < 5$
- $F(x) = 3/4$ für $5 \leq x < 6$
- $F(x) = 1$ für $6 \leq x$

ist die Verteilungsfunktion.

2. Berechnen Sie den Median

Der Median ist eine Zahl $x_{0,5}$, für die gilt:

$$P(X < x_{0,5}) \leq 0,5 \text{ und } P(X > x_{0,5}) \leq 0,5$$

Behauptung: Diese beiden Ungleichungen sind nur für $x_{0,5} = 4$ erfüllt.

Beweis:

$$\text{Sei } y < 4. \text{ Dann ist } P(X > y) = (1/6) + (1/6) + (1/4) = 7/12 > 0,5$$

$$\text{Sei } y = 4. \text{ Dann ist } P(X < 4) = (1/12) + (1/6) + (1/6) = 5/12 \leq 0,5$$

$$\text{Und } P(X > 4) = (1/6) + (1/4) = 5/12 \leq 0,5$$

$$\text{Sei } y > 4. \text{ Dann ist } P(X < y) = (1/12) + (1/6) + (1/6) + (1/6) = 7/12 > 0,5$$

3. Berechnen Sie den Erwartungswert der Variable $X = \text{Augenzahl}$

$$E(X) = 1 \cdot (1/12) + (2 + 3 + 4 + 5) \cdot (1/6) + 6 \cdot (1/4) = 47/12$$

4. Berechnen Sie die Varianz und die Standardabweichung der Variable $X = \text{Augenzahl}$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= (1 - 47/12)^2 \cdot (1/12) + \\ &+ ((2 - 47/12)^2 + (3 - 47/12)^2 + (4 - 47/12)^2 + (5 - 47/12)^2) \cdot (2/12) \\ &+ \\ &+ (6 - 47/12)^2 \cdot (3/12) = \\ &= (1225 + (529 + 121 + 1 + 169) \cdot 2 + 625 \cdot 3) / 1728 = \\ &= 4740/1728 = 395/144 \end{aligned}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} = \frac{\sqrt{395}}{12} = \frac{19,87}{12} = 1,66$$

5. Berechnen Sie die Standardisierung X^* von X und überprüfen Sie, dass hier Erwartungswert und Varianz die von der Theorie behaupteten Werte haben.

$$\text{Es ist: } X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)} = \frac{X - \frac{47}{12}}{\frac{\sqrt{395}}{12}} = \frac{12 \cdot X - 47}{\sqrt{395}}, \text{ also hat}$$

X^* die Werte:

- $\frac{-35}{\sqrt{395}}$ mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{12}$
- $\frac{-23}{\sqrt{395}}$ mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{12}$
- $\frac{-11}{\sqrt{395}}$ mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{12}$
- $\frac{1}{\sqrt{395}}$ mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{12}$
- $\frac{13}{\sqrt{395}}$ mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{12}$
- $\frac{25}{\sqrt{395}}$ mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{12}$

Das ergibt den Erwartungswert

$$E(X^*) = (-35 + (-23 - 11 + 1 + 13) \cdot 2 + 25 \cdot 3) \cdot \frac{1}{12 \cdot \sqrt{395}} = 0$$

wie erwartet.

Die Varianz wird:

$$\text{Var}(X^*) = \frac{1225 + (529 + 121 + 1 + 169) \cdot 2 + 625 \cdot 3}{12 \cdot 395} = \frac{4740}{4740} = 1$$

ebenfalls wie erwartet.

8. Aufgabe

Beim Roulettespiel kann man auf die verschiedensten Teilmengen der Zahlen von 0 bis 36 setzen. Beispielsweise haben 18 dieser 37 Zahlen die zusätzliche Eigenschaft „rot“ und wenn man auf „rot“ (beispielsweise) 100 Euro setzt, erhält man 200 Euro ausgezahlt, man macht also einen Reingewinn von 100 Euro, falls eine der „roten“ Zahlen ausgespielt wird.

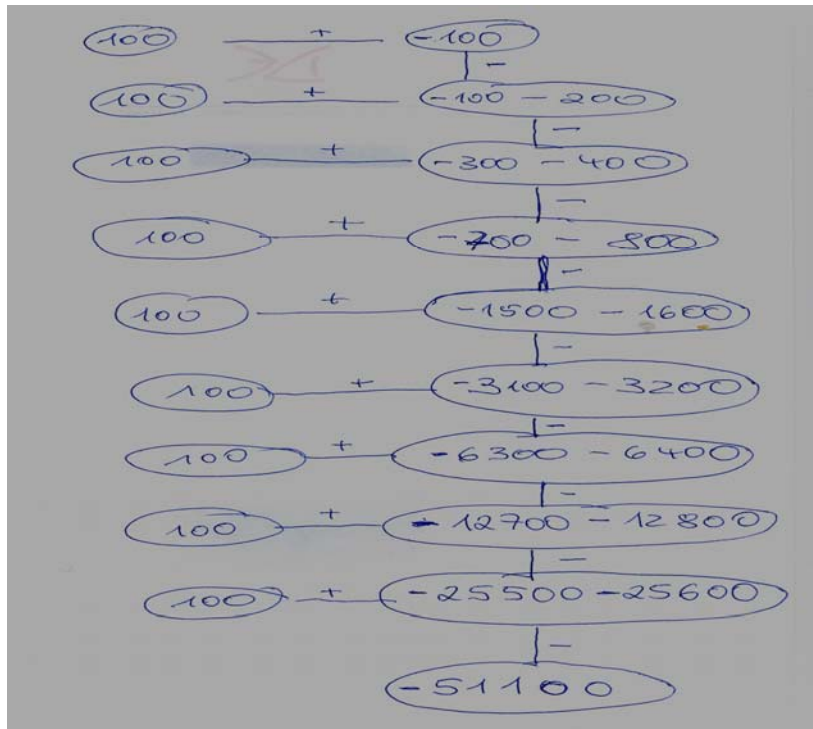
Ein Bekannter von mir, Herr Clever, hat sich nun die folgende Strategie ausgedacht:

Er setzt 100 Euro auf „rot“. Falls er gewinnt, streicht er seinen Gewinn ein und verlässt das Spielkasino. Falls er verliert er, verdoppelt er seinen Einsatz, solange bis er gewinnt oder bis das Einsatzlimit der Bank von 40000 Euro erreicht ist.

Es sei X die Zufallsvariable, die den Reingewinn bei dieser Strategie beschreibt. Errechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X .

Wird Herr Clever mit dieser Strategie ein reicher Mann?

Betrachten Sie dazu den folgenden Ereignisbaum, der alle möglichen Ereignisabläufe wiedergibt:



Die Wahrscheinlichkeit für das Verlieren eines Spiels ist $19/37$. Die Zufallsvariable X = Reingewinn hat zwei Werte:

- -51100 Euro, $p(-51100) = (19/37)^9$.
- 100 Euro, $p(100) = 1 - (19/37)^9$

Es ist $E(X) = 100 - 51200 \cdot (19/37)^9 = -27,13$, d.h. Herr Clever wird mit dieser Strategie auf die Dauer ein armer Mann

$$\begin{aligned}
 \text{Es ist } \text{Var}(X) &= (-51100 + 27,13)^2 \cdot (19/37)^9 + (100 + 27,13)^2 \cdot (1 - (19/37)^9) = \\
 &= (-51100 + 27,13)^2 \cdot (19/37)^9 + (100 + 27,13)^2 \cdot (1 - (19/37)^9) = \\
 &= 2608438050,0369 \cdot (19/37)^9 + 16162,0369 \cdot (1 - (19/37)^9) = \\
 &= 16162,0369 + 2608421888 \cdot (19/37)^9 = \\
 &= 16162,0369 + 6476564,99 = 6492727,03
 \end{aligned}$$

Also enorm groß.

9. Aufgabe

Bei dem alten deutschen Kartenspiel Skat (wer das nicht kennt, findet bei Wikipedia ausführliche Informationen) wird mit 32 Spielkarten gespielt. Es spielen grundsätzlich drei Spieler, jeder bekommt 10 Karten, zwei Karten werden verdeckt in die Mitte gelegt, sie sind der so genannte Skat. Außerdem sind die vier Spielkarten, die man Buben nennt, im Skatspiel von größter Wichtigkeit. Es sei X die Zufallsvariable, die die Anzahl der Buben zählt, die sich im Skat befinden.

1. Geben Sie die Dichtefunktion, die Verteilungsfunktion und den Erwartungswert von X an.

X hat drei Werte: 0, 1 und 2. Es ist:

$$p(0) = \frac{\binom{28}{2}}{\binom{32}{2}} = \frac{28 \cdot 27}{32 \cdot 31} = 0,7621$$

$$p(1) = \frac{\binom{28}{1} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{32}{2}} = \frac{28 \cdot 4 \cdot 2}{32 \cdot 31} = 0,2258$$

$$p(2) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{32}{2}} = \frac{4 \cdot 3}{32 \cdot 31} = 0,0121$$

$F: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ mit

- $F(x) = 0$ für $x < 0$
- $F(x) = 0,7621$ für $0 \leq x < 1$
- $F(x) = 0,9879$ für $1 \leq x < 2$
- $F(x) = 1$ für $2 \leq x$

ist die Verteilungsfunktion.

Der Erwartungswert für X wird:

$$E(X) = 0,2258 + 2 \cdot 0,0121 = 0,2258 + 0,0242 = 0,25$$

2. Sie seien selber einer der drei Skatspieler und Sie hätten genau einen Buben unter Ihren 10 Karten. Geben Sie jetzt die Dichtefunktion, die Verteilungsfunktion und den Erwartungswert von X für diese Situation an.

Wieder hat X die drei Werte: 0, 1 und 2. Es ist:

$$p(0) = \frac{\binom{19}{2}}{\binom{22}{2}} = \frac{19 \cdot 18}{22 \cdot 21} = \frac{19 \cdot 3}{11 \cdot 7} = \frac{57}{77} = 0,7403$$

$$p(1) = \frac{\binom{19}{1} \cdot \binom{3}{1}}{\binom{22}{2}} = \frac{19 \cdot 3 \cdot 2}{22 \cdot 21} = \frac{19}{11 \cdot 7} = \frac{19}{77} = 0,2468$$

$$p(2) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{22}{2}} = \frac{3 \cdot 2}{22 \cdot 21} = \frac{1}{11 \cdot 7} = \frac{1}{77} = 0,0129$$

$F: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ mit

- $F(x) = 0$ für $x < 0$
- $F(x) = 0,7403$ für $0 \leq x < 1$
- $F(x) = 0,9871$ für $1 \leq x < 2$
- $F(x) = 1$ für $2 \leq x$

ist die Verteilungsfunktion.

Der Erwartungswert für X wird:

$$E(X) = 0,2468 + 2 \cdot 0,0129 = 0,2468 + 0,0258 = 0,2726$$

10. Aufgabe

Wann ist eine Binomialverteilung zu erwarten?

Eine Binomialverteilung ist bei einer Folge von gleichartigen und voneinander unabhängigen Versuchen zu erwarten, die jeweils nur zwei mögliche Resultate haben. Solche Versuche nennt man Bernoulliexperimente. Wenn p die Wahrscheinlichkeit des positiven Ausgangs dieser Bernoulliexperimente ist und wenn insgesamt n Experimente gemacht werden, dann gibt die Binomialverteilung

$$B(k|p, n) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

die Wahrscheinlichkeit von k positiven Resultaten wieder.

11. Aufgabe

Zeigen Sie: Wenn X gemäß $P(X = k) = B(k|p, n) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$ binomial verteilt ist, dann ist auch $Y = n - X$ binomial verteilt.

$$\begin{aligned} \text{Es ist } P(Y = k) &= P(n - X = k) = P(X = n - k) = \\ &= B(n - k|p, n) = \binom{n}{n - k} \cdot p^{n-k} \cdot (1 - p)^k = \\ &= \binom{n}{k} \cdot (1 - p)^k \cdot (1 - (1 - p))^{n-k} = B(k|(1 - p), n) \end{aligned}$$

Mit anderen Worten: Auch der negative Ausgang einer unabhängigen Folge von gleichartigen Bernoulliexperimenten ist binomial verteilt.

12. Aufgabe

Eine faire Münze wird fünfmal hintereinander geworfen. Es sei X die Zufallsvariable, deren Werte gleich der Anzahl der geworfenen Köpfe ist.

1. Geben Sie die Dichte- und die Verteilungsfunktion von X an.

$$\text{Sei } 0 \leq k \leq 5. \text{ Dann ist } P(X = k) = B\left(k \mid \frac{1}{2}, 5\right) = \binom{5}{k} \cdot \frac{1}{32}$$

$F: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ mit

- $F(x) = 0$ für $x < 0$
- $F(x) = 1/32 = 0,03125$ für $0 \leq x < 1$
- $F(x) = 6/32 = 3/16 = 0,1875$ für $1 \leq x < 2$
- $F(x) = 16/32 = 1/2 = 0,5$ für $2 \leq x < 3$
- $F(x) = 26/32 = 13/16 = 0,8125$ für $3 \leq x < 4$
- $F(x) = 31/32 = 0,96875$ für $4 \leq x < 5$
- $F(x) = 1$ für $5 \leq x$

ist die Verteilungsfunktion.

2. Berechnen Sie Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung von X .

Der Erwartungswert für X wird (wie nicht anders zu erwarten war):

$$\begin{aligned} E(X) &= (1 \cdot \binom{5}{1} + 2 \cdot \binom{5}{2} + 3 \cdot \binom{5}{3} + 4 \cdot \binom{5}{4} + 5 \cdot \binom{5}{5}) (1/32) = \\ &= (5 + 20 + 30 + 20 + 5)/32 = 80/32 = 2,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= (0 - 2,5)^2 \cdot \frac{1}{32} + (1 - 2,5)^2 \cdot \frac{5}{32} + (2 - 2,5)^2 \cdot \frac{10}{32} + \\ &\quad + (3 - 2,5)^2 \cdot \frac{10}{32} + (4 - 2,5)^2 \cdot \frac{5}{32} + (5 - 2,5)^2 \cdot \frac{1}{32} = \\ &= \frac{12,5 + 2,25 \cdot 10 + 0,25 \cdot 20}{32} = \frac{40}{32} = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} = \frac{\sqrt{5}}{2} = 1,118$$

3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einmal „Kopf“ geworfen wurde?

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 31/32 = 0,96875$$

13. Aufgabe

Jetzt wird ein Würfel 5 mal geworfen.

1. Geben Sie die gesamte Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen $X =$ Anzahl der geworfenen Sechsen an.

$$\text{Sei } 0 \leq k \leq 5. \text{ Dann ist } P(X = k) = B\left(k \mid \frac{1}{6}, 5\right) = \binom{5}{k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{5-k}$$

Im Einzelnen:

$$P(X=0) = \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{3125}{7776} = 0,4019$$

$$P(X=1) = 5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{5^5}{6^5} = 0,4019$$

$$P(X=2) = 2 \cdot 5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{2 \cdot 5^4}{6^5} = \frac{1250}{7776} = 0,1608$$

$$P(X=3) = 2 \cdot 5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{2 \cdot 5^3}{6^5} = \frac{250}{7776} = 0,0321$$

$$P(X=4) = 5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right) = \frac{5^2}{6^5} = \frac{25}{7776} = 0,0032$$

$$P(X=5) = \left(\frac{1}{6}\right)^5 = \frac{1}{7776} = 0,0001$$

$F: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ mit

- $F(x) = 0$ für $x < 0$
- $F(x) = 5^5/6^5 = 3125/7776 = 0,4019$ für $0 \leq x < 1$
- $F(x) = 2 \cdot 5^5/6^5 = 6250/7776 = 0,8038$ für $1 \leq x < 2$
- $F(x) = 2 \cdot (5^4 + 5^5)/6^5 = 7500/7776 = 0,9645$ für $2 \leq x < 3$
- $F(x) = 2 \cdot (5^3 + 5^4 + 5^5)/6^5 = 7750/7776 = 0,9967$ für $3 \leq x < 4$
- $F(x) = (5^2 + 2 \cdot (5^3 + 5^4 + 5^5))/6^5 = 7775/7776 = 0,9999$ für $4 \leq x < 5$
- $F(x) = (1 + 5^2 + 2 \cdot (5^3 + 5^4 + 5^5))/6^5 = 7776/7776 = 1$ für $5 \leq x$

ist die Verteilungsfunktion.

2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens einmal eine „sechs“ zu würfeln?

$$P(X > 0) = 1 - P(X = 0) = (6^5 - 5^5)/6^5 = 4651/7776 = 0,5981$$

3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens zweimal eine „sechs“ zu würfeln?

$$P(X > 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = (6^5 - 2 \cdot 5^5)/6^5 = 1526/7776 = 0,1962$$

4. Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

Es ist erwartungsgemäß:

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \cdot \frac{5^5}{6^5} + 2 \cdot \frac{2 \cdot 5^4}{6^5} + 3 \cdot \frac{2 \cdot 5^3}{6^5} + 4 \cdot \frac{5^2}{6^5} + 5 \cdot \frac{1}{6^5} = \\ &= \frac{3125 + 2500 + 750 + 100 + 5}{7776} = \frac{6480}{7776} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

14. Aufgabe

In Mitteleuropa besitzen 45 % der Menschen die Blutgruppe A. Es liegen die Blutspenden von 10 zufälligen Blutspendern vor. Es sei X die Zufallsvariable, die angibt, wie viele Spenden der Blutgruppe A darunter sind.

1. Geben Sie die allgemeine Formel für die Dichtefunktion von X an.

$$\text{Es sei } 0 \leq k \leq 10. \text{ Dann ist } P(X = k) = \binom{10}{k} \cdot 0,45^k \cdot 0,55^{10-k}$$

Für alle anderen k gilt: $P(X = k) = 0$.

2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, unter diesen 10 zufälligen Blutspendern mindestens einen mit der Blutgruppe A vorzufinden?

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,55^{10} = 1 - 0,0025 = 0,9975 = 99,75\%$$

15. Aufgabe

Eine Fluggesellschaft weiß aus empirischen Untersuchungen, dass im Durchschnitt 10 % der gebuchten Flugplätze storniert werden. Daher verkauft sie für eine Maschine mit 100 Sitzplätzen von vorn herein 5 % mehr Flugtickets.

1. Sei X die Anzahl der Passagiere, die zum Abflug kommen und mitfliegen wollen. Geben Sie die allgemeine Formel für die Dichtefunktion von X an.

$$P(X = k) = \binom{105}{k} \cdot 0,9^k \cdot 0,1^{105-k}$$

2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Maschine überbucht ist, dass also mehr Passagiere zum Abflug kommen, als Sitzplätze vorhanden sind?

Ich nenne diese Wahrscheinlichkeit P . Dann gilt:

$$\begin{aligned} P &= P(X=101) + P(X=102) + P(X=103) + P(X=104) + P(X=105) = \\ &= \binom{105}{101} \cdot 0,9^{101} \cdot 0,1^4 + \binom{105}{102} \cdot 0,9^{102} \cdot 0,1^3 + \binom{105}{103} \cdot 0,9^{103} \cdot 0,1^2 + \\ &\quad + 105 \cdot 0,9^{104} \cdot 0,1 + 0,9^{105} = \\ &= (4780230 \cdot 0,1^4 + 187460 \cdot 0,9 \cdot 0,1^3 + 5460 \cdot 0,9^2 \cdot 0,1^2 + \\ &\quad + 105 \cdot 0,9^3 \cdot 0,1 + 0,9^4) \cdot 0,9^{101} = \\ &= (478,023 + 168,714 + 44,226 + 7,6545 + 0,6561) \cdot 0,9^{101} = \\ &= 699,2736 \cdot 0,9^{101} = 0,0167, \text{ also } 1,67 \% \end{aligned}$$

16. Aufgabe

Bei der Herstellung eines gewissen Bauteils ergibt sich ein durchgehender Anteil fehlerhafter Bauteile von 3 %. Es wird eine Stichprobe von 100 Stück entnommen, die vollständig überprüft wird. Es sei X die Zufallsvariable, die angibt, wie viele fehlerhafte Bauteile bei dieser Überprüfung gefunden werden.

1. Geben Sie die allgemeine Formel für die Dichtefunktion von X an.

$$P(X = k) = \binom{100}{k} \cdot 0,03^k \cdot 0,97^{100 - k}$$

2. Wie groß ist der Erwartungswert von X ? (Jetzt werden auch die, die es nicht sofort gesehen haben, sagen, dass man sich das auch ohne irgendwelche Theorie sofort hätte überlegen können. Recht haben sie! Aber für die folgenden Fragen brauchen wir wieder unserer Theorie)

Nach Satz 23.10 folgt: $E(X) = 100 \cdot 0,03 = 3$.

3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Stichprobe überhaupt kein fehlerhaftes Bauteil enthält?

$$P(X = 0) = \binom{100}{0} \cdot 0,03^0 \cdot 0,97^{100} = 0,0476 = 4,76 \%$$

4. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Stichprobe genau ein fehlerhaftes Bauteil enthält?

$$P(X = 1) = \binom{100}{1} \cdot 0,03^1 \cdot 0,97^{99} = 0,1471 = 14,71 \%$$

5. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Stichprobe mehr als ein fehlerhaftes Bauteil enthält?

$$1 - 0,0476 - 0,1471 = 0,8053 = 80,53 \%$$

17. Aufgabe

In einer Lieferung von 200 Computern sind 35 Geräte fehlerhaft.. Man entnimmt eine zufällige Stichprobe von 15 Rechnern. Es sei X die Zufallsvariable, die die Anzahl der fehlerhaften Rechner in der Stichprobe angibt.

1. Geben Sie die allgemeine Formel für die Dichtefunktion von X an. (Achtung, dies ist ein anderer Funktionstyp als die Dichtefunktion in der vorherigen Aufgabe!)

$$P(X=k) = \frac{\binom{35}{k} \cdot \binom{165}{15-k}}{\binom{200}{15}}$$

2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mehr als einen defekten Rechner in der Stichprobe vorzufinden?

$$P(X=0) = \frac{\binom{35}{0} \cdot \binom{165}{15}}{\binom{200}{15}} = 0,0496 = 4,96 \%$$

$$P(X=1) = \frac{\binom{35}{1} \cdot \binom{165}{14}}{\binom{200}{15}} = 0,1725 = 17,25 \%$$

$$P(X > 1) = 1 - 0,0496 - 0,1725 = 0,7779 = 77,79 \%$$

18. Aufgabe

Wann ist eine hypergeometrische Verteilung zu erwarten?

Unsere Aufgabe 17 war ein Beispiel für eine hypergeometrische Verteilung:

Gegeben sei eine Menge von N Elementen. Davon besitzen genau M Elemente eine bestimmte Eigenschaft. Die hypergeometrische Verteilung beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer zufälligen Auswahl von n Elementen aus dieser Menge genau k Elemente die erwähnte Eigenschaft besitzen.

Hierbei sind N , M und n fest vorgegeben, k kann alle Werte zwischen 0 und n annehmen.

19. Aufgabe

Sie spielen Lotto 6 aus 49. Es sei X die Zufallsvariable, die angibt, wie viele richtige Ziffern Sie getippt haben.

1. Geben Sie die allgemeine Formel für die Dichtefunktion von X an.

$$P(X = k) = \frac{\binom{6}{k} \cdot \binom{43}{6-k}}{\binom{49}{6}}$$

2. Was ist der Erwartungswert von X ?

Nach Satz 23.12 ist $E(X) = 6 \cdot (6/49) = 0,73$

3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, wenigstens eine richtige Zahl getippt zu haben?

$$P(X=0) = \frac{\binom{6}{0} \cdot \binom{43}{6}}{\binom{49}{6}} = 0,4360$$

Also ist $P(X > 0) = 1 - 0,4360 = 0,564 = 56,4 \%$

20. Aufgabe

Averell Dalton zahlt in einer Bank 70 Tausend-Dollar-Scheine ein, von denen 15 gefälscht sind, sein Bruder Joe hat sie persönlich hergestellt. Der Bankdirektor prüft 5 der eingezahlten Scheine auf Echtheit. Es sei X die Zufallsvariable, die angibt, wie viele gefälschte Scheine der Bankdirektor findet.

1. Geben Sie die allgemeine Formel für die Dichtefunktion von X an.

$$P(X=k) = \frac{\binom{15}{k} \cdot \binom{55}{5-k}}{\binom{70}{5}}$$

2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fliegt Averell auf?

$$P(X=0) = \frac{\binom{15}{0} \cdot \binom{55}{5}}{\binom{70}{5}} = 0,2874$$

Also ist $P(X > 0) = 1 - 0,2874 = 0,7126 = 71,26 \%$

21. Aufgabe

Eine Urne enthält 5 rote Kugeln, drei gelbe Kugeln und 2 blaue Kugeln. 2 Kugeln werden zufällig herausgenommen.

1. Wie lautet der Ereignisraum dieses Zufallsexperiments?

Er lautet: $\{ \{ \text{rot, rot} \} ; \{ \text{rot, gelb} \} ; \{ \text{rot, blau} \} ; \{ \text{gelb, gelb} \} ; \{ \text{gelb, blau} \} ; \{ \text{blau, blau} \} \}$

2. Es sei X die Anzahl der gezogenen gelben Kugeln. Welche Werte kann X annehmen?

0, 1 und 2

3. Bestimmen Sie die Dichte, die Verteilungsfunktion, den Erwartungswert und die Varianz von X .

$$P(X = k) = \frac{\binom{3}{k} \cdot \binom{7}{2-k}}{\binom{10}{2}}$$

$$P(X = 0) = 21/45$$

$$P(X = 1) = 21/45$$

$$P(X = 2) = 3/45$$

$F: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ mit

- $F(x) = 0$ für $x < 0$
- $F(x) = 21/45$ für $0 \leq x < 1$
- $F(x) = 42/45$ für $1 \leq x < 2$
- $F(x) = 1$ für $2 \leq x$

ist die Verteilungsfunktion.

Nach Satz 23.12 ist $E(X) = 2 \cdot (3/10) = 3/5$. Das können Sie natürlich auch sofort direkt berechnen: $21/45 + 2 \cdot (3/45) = 27/45 = 3/5$

Nach Satz 23.12 ist $\text{Var}(X) = 2 \cdot (8/9)(3/10)(7/10) = 2 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 7 / 900 = 28/75$.
Auch das können Sie sofort direkt berechnen:

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= (-3/5)^2 \cdot (21/45) + (2/5)^2 \cdot (21/45) + (7/5)^2 \cdot (3/45) = \\ &= (189 + 84 + 147) / (45 \cdot 25) = 420 / (45 \cdot 25) = 28/75\end{aligned}$$