

Kapitel 2

Das allgemeine Lebesgue-Integral: erste Eigenschaften

Worum geht's? Wir wiederholen den Begriff des allgemeinen Lebesgue-Integrals. In diesem Abschnitt werden die Begriffe messbare Funktion und Integral kurz wiederholt, die klassischen Konvergenzsätze bewiesen sowie Maße mit Dichten betrachtet.

2.1 Messbare Abbildungen und das Lebesgue-Integral

Wiederholung: Seien (X, \mathcal{A}) und (S, \mathcal{S}) Messräume.

$f: X \rightarrow S$ heißt messbar (genauer: \mathcal{A} - \mathcal{S} -messbar) $:\Leftrightarrow f^{-1}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{A} \Leftrightarrow \sigma(f) \subset \mathcal{A}$ (vgl. Bemerkung 1.2 (ii)).

Häufig ist $(S, \mathcal{S}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ oder $(S, \mathcal{S}) = (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$. Falls X topologischer Raum ist, wählt man kanonisch $\mathcal{A} := \mathcal{B}(X)$ (Borel- σ -Algebra).

Stochastische Sprechweise: Sei (Ω, \mathcal{A}, P) Wahrscheinlichkeitsraum. Dann heißt $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ „Zufallsvariable“ $:\Leftrightarrow X$ messbar.

Für $\mathcal{S} = \sigma(\mathcal{E})$ gilt $f: X \rightarrow S$ \mathcal{A} - \mathcal{S} -messbar $\Leftrightarrow f^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$.

Speziell für $S = \mathbb{R}$: f messbar $\Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R} : \{x \in X : f(x) \leq a\} \in \mathcal{A}$.

Im Folgenden sei (X, \mathcal{A}) ein Messraum.

Satz 2.1. (i) Seien X topologischer Raum, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f messbar.

(ii) Seien $f_n: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann sind auch $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$, $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$, $\liminf_{n \in \mathbb{N}} f_n$ und $\limsup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ messbar.

(iii) Seien $f_n: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar für alle $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \rightarrow f(x)$ ($x \in X$). Dann ist f messbar.

(iv) Seien $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ messbar und $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $h: X \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) := F(f(x), g(x))$ messbar.

Speziell: f, g messbar $\Rightarrow \max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$, $f \pm g$ und $f \cdot g$ messbar, ebenso $|f|^r$ für $r > 0$ und f^r für $r \in \mathbb{N}$.

Beweis: Dies wird wörtlich wie im Fall $X = \mathbb{R}^n$ bewiesen (Satz 13.18 in Band 1). \square

Im Folgenden sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum.

Wir erinnern an die Definition des allgemeinen Lebesgue-Integrals:

f Stufenfunktion $:\Leftrightarrow f = \sum_{i=1}^k c_i \chi_{A_i}$ mit $c_i \in \mathbb{R}$ und $A_i \in \mathcal{A}$ (χ_A : charakteristische Funktion von A).

Für f Stufenfunktion, $f \geq 0$, definiert man $\int f d\mu := \sum_{i=1}^k c_i \mu(A_i) \in [0, \infty]$.

Für f messbar, $f \geq 0$, setzt man

$$\int f d\mu := \sup \left\{ \int s d\mu \mid s \text{ Stufenfunktion mit } 0 \leq s \leq f \right\} \in [0, \infty].$$

Für $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, f messbar, zerlegt man $f = f_+ - f_-$ mit $f_+ := \max\{f, 0\}$ und $f_- := -\min\{0, f\}$ und definiert das Integral von f bzgl. μ durch

$$\int f d\mu := \int f_+ d\mu - \int f_- d\mu,$$

falls beide Integrale auf der rechten Seite endlich sind. In diesem Fall heißt f μ -integrierbar. Für $A \in \mathcal{A}$ setzt man $\int_A f d\mu := \int \chi_A f d\mu$.

$\mathcal{L}^1(\mu) := \mathcal{L}(X) := \mathcal{L}^1(X, \mu) := \{f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \mid f \text{ ist } \mu\text{-integrierbar}\}$.

Für festes $G \in \mathcal{A}$ setzt man

$$\mathcal{A} \cap G := \{A \cap G \mid A \in \mathcal{A}\} \quad (\text{Spur-}\sigma\text{-Algebra über } G),$$

$$\mu|_G := \mu|_{\mathcal{A} \cap G} \quad (\text{Spurmaß}),$$

$$\mathcal{L}^1(G) := \mathcal{L}^1(G, \mu|_G).$$

Speziell für $\mu = \lambda$ und $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ erhält man den Raum $\mathcal{L}^1(G)$ aller über G Lebesgue-integrierbaren Funktionen.

Elementare Eigenschaften des Lebesgue-Integrals (siehe Satz 13.22 in Band 1):

$\mathcal{L}^1(\mu) \rightarrow \mathbb{R}$, $f \mapsto \int f d\mu$ ist monoton (d. h. $f \leq g \Rightarrow \int f d\mu \leq \int g d\mu$) und homogen (d. h. $\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)).

Bemerkung 2.2 (Nullmengen und Integrale). Seien $f, g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Dann gilt:

(i) N μ -Nullmenge $\Rightarrow \int_N f d\mu = 0$.

(ii) $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $A, N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0 \Rightarrow \int_{A \cup N} f d\mu = \int_A f d\mu$.

(iii) $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $f = g$ μ -fast überall $\Rightarrow g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und $\int f d\mu = \int g d\mu$.

(iv) $f \geq 0$ und $\int f d\mu = 0 \Rightarrow f = 0$ μ -fast überall.

(v) $f \in \mathcal{L}^1(\mu) \Rightarrow \mu(\{x \in X \mid f(x) \in \{+\infty, -\infty\}\}) = 0$.

Beweis: (i)-(iv): siehe Band 1, Satz 13.22 und Hilfssatz 13.23.

(v): Angenommen $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) > 0$ und $f(x) = \infty$ ($x \in A$). Zu $r > 0$ betrachte die Stufenfunktion $s_r := r\chi_A$. Dann gilt $0 \leq s_r \leq f_+$ und somit $\int f_+ d\mu \geq \int s_r d\mu = r\mu(A) \rightarrow \infty$ ($r \rightarrow \infty$). Also ist f nicht integrierbar, Widerspruch. \square

Bemerkung 2.3. (i) $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar $\Rightarrow (f \in \mathcal{L}^1(\mu) \Leftrightarrow |f| \in \mathcal{L}^1(\mu))$.

(ii) $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar, $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ mit $|f| \leq g$ μ -fast überall $\Rightarrow f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und $\int |f| d\mu \leq \int g d\mu$ (Majorantenkriterium).

Satz 2.4 (Maße durch Dichten). Sei $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar mit $f \geq 0$. Definiere $\phi_f: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ durch

$$\phi_f(A) := \int_A f d\mu \quad (A \in \mathcal{A}).$$

Dann ist ϕ_f ein Maß.

In diesem Fall heißt f eine „Dichte“ von ϕ_f bzgl. μ .

Beweis: Wir zeigen nur die σ -Additivität.

1. $f = \chi_B$ mit $B \in \mathcal{A}$: $\phi_f(A) = \int_A \chi_B d\mu = \mu(A \cap B)$. Da μ σ -additiv ist, ist auch ϕ_f σ -additiv.
2. f Stufenfunktion: σ -Additivität folgt aus Schritt 1 und der Linearität des Integrals.
3. $f: X \rightarrow [0, \infty]$ messbar: Für Stufenfunktion s mit $0 \leq s \leq f$ und $A := \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, $A_j \in \mathcal{A}$, gilt

$$\phi_s(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_s(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_j} s d\mu \leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_j} f d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_f(A_j).$$

Supremum über alle Stufenfunktionen \Rightarrow

$$\phi_f(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \phi_f(A_j). \quad (2.1)$$

1. Fall: $\exists j \in \mathbb{N} : \phi_f(A_j) = \infty$:

$\phi_f(A) = \infty$ wegen $A \supset A_j \Rightarrow$ in (2.1) gilt „ \Rightarrow “.

2. Fall: $\forall j \in \mathbb{N} : \phi_f(A_j) < \infty$:

Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ existiert eine Stufenfunktion s mit $0 \leq s \leq f$ und

$$\int_{A_i} s d\mu \geq \int_{A_i} f d\mu - \varepsilon \quad (i = 1, 2).$$

Damit

$$\begin{aligned} \phi_f(A_1 \dot{\cup} A_2) &\geq \int_{A_1 \dot{\cup} A_2} s d\mu = \int_{A_1} s d\mu + \int_{A_2} s d\mu \\ &\geq \int_{A_1} f d\mu + \int_{A_2} f d\mu - 2\varepsilon = \phi_f(A_1) + \phi_f(A_2) - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

ε beliebig $\Rightarrow \phi_f(A_1 \dot{\cup} A_2) \geq \phi_f(A_1) + \phi_f(A_2)$. Iterativ:

$$\phi_f(A_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} A_n) \geq \sum_{i=1}^n \phi_f(A_i).$$

Wegen $A \supset A_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} A_n$ folgt

$$\phi_f(A) \geq \sum_{i=1}^n \phi_f(A_i) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

$n \rightarrow \infty \Rightarrow$ in (2.1) gilt „ $=$ “.

□

Folgerung 2.5. $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ disjunkt, $A := \dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} A_n \Rightarrow$

$$\int_A f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu.$$

Beweis: Seien ϕ_{\pm} Maße zu f_{\pm} laut Satz 2.4. Wegen $\int_X f_{\pm} d\mu < \infty$ sind beide Maße endlich. Damit

$$\begin{aligned} \phi_f(A) &= \int_A f d\mu = \int_A f_+ d\mu - \int_A f_- d\mu = \phi_+(A) - \phi_-(A) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \phi_+(A_n) - \sum_{n=1}^{\infty} \phi_-(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (\phi_+(A_n) - \phi_-(A_n)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu. \end{aligned}$$

□

2.2 Konvergenzsätze

Im Folgenden sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum.

Satz 2.6 (von B. Levi¹ über monotone Konvergenz). $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge messbarer Funktionen mit $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$, $f: X \rightarrow [0, \infty]$ definiert durch $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ ($x \in X$) \Rightarrow

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu.$$

Beweis: $f = \sup f_n$ messbar (Satz 2.1 (ii)) $\Rightarrow \int f d\mu \in [0, \infty]$ existiert.

Sei $\alpha := \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \in [0, \infty]$. Wegen $\int f_n d\mu \leq \int f d\mu$ folgt $\alpha \leq \int f d\mu$.

Sei $0 < c < 1$ und s Stufenfunktion mit $0 \leq s \leq f$. Definiere $A_n := \{x \in X \mid f_n(x) \geq cs(x)\}$. Da $(f_n)_n$ monoton ist, folgt $A_1 \subset A_2 \subset \dots$.

Wegen $cs \leq f_n$ auf A_n gilt

$$\int f_n d\mu \geq \int_{A_n} f_n d\mu \geq c \int_{A_n} s d\mu.$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$, $c < 1 \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = X$.

$A \mapsto \int_A s d\mu$ σ -additiv (siehe Satz 2.4) \Rightarrow

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \geq c \int s d\mu.$$

Supremum über alle Stufenfunktionen s mit $0 \leq s \leq f \Rightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \geq c \int f d\mu.$$

$c < 1$ beliebig $\Rightarrow \alpha \geq \int f d\mu \Rightarrow$ Behauptung. \square

Satz 2.7 (Additivität des Integrals). $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^1(\mu) \Rightarrow f_1 + f_2 \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und

$$\int (f_1 + f_2) d\mu = \int f_1 d\mu + \int f_2 d\mu.$$

Beweis:

1. $f_1, f_2 \geq 0$: Da f_i messbar, existieren Stufenfunktionen $(s_n^{(i)})_{n \in \mathbb{N}}$ für $i = 1, 2$ mit $0 \leq s_n^{(i)}$ und $s_n^{(i)}(x) \nearrow f_i(x)$ (Konvergenz monoton wachsend, $x \in X$). Für $s_n := s_n^{(1)} + s_n^{(2)}$ gilt $s_n(x) \nearrow f(x) := f_1(x) + f_2(x)$ ($x \in X$). Da das Integral über Stufenfunktionen linear ist, folgt mit dem Satz über monotone Konvergenz:

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int s_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int s_n^{(1)} d\mu + \int s_n^{(2)} d\mu \right) = \int f_1 d\mu + \int f_2 d\mu.$$

¹Beppo Levi, 14.5.1875 – 28.8.1961

2. $f_1 \geq 0$ und $f_2 \leq 0$: Setze $A := \{x \in X \mid f_1(x) + f_2(x) \geq 0\}$ und $B := \{x \in X \mid f_1(x) + f_2(x) < 0\}$. Nach Schritt 1 gilt

$$\int_A (f_1 + f_2) d\mu + \int_A (-f_2) d\mu = \int_A [(f_1 + f_2) + (-f_2)] d\mu = \int_A f_1 d\mu.$$

Unter Verwendung der Homogenität folgt $\int_A f d\mu = \int_A f_1 d\mu + \int_A f_2 d\mu$.

Analog für $\int_B \dots$ mit der Darstellung $-f_2 = f_1 + [-(f_1 + f_2)]$.

3. Allgemeiner Fall: Man zerlegt $X = \bigcup_{i=1}^4 A_i$ mit

$$A_1 := \{x \in X \mid f_1(x) \geq 0, f_2(x) \geq 0\},$$

$$A_2 := \{x \in X \mid f_1(x) \geq 0, f_2(x) < 0\},$$

$$A_3 := \{x \in X \mid f_1(x) < 0, f_2(x) \geq 0\},$$

$$A_4 := \{x \in X \mid f_1(x) < 0, f_2(x) < 0\}.$$

Nach den Schritten 1 und 2 gilt $\int_{A_i} f d\mu = \int_{A_i} f_1 d\mu + \int_{A_i} f_2 d\mu$. Summation über i liefert die Behauptung. \square

Hilfssatz 2.8. Sei $f_n \geq 0$ messbar für alle $n \in \mathbb{N}$, $f: X \rightarrow [0, \infty]$ definiert durch $f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Dann gilt

$$\int f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu.$$

Falls $f_n \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ($n \in \mathbb{N}$) und die Summe auf der rechten Seite konvergiert, so gilt $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergiert für μ -fast alle $x \in X$.

Beweis: Wende monotone Konvergenz auf die Partialsummen an. Die letzte Aussage folgt aus Bemerkung 2.2 (v). \square

Satz 2.9 (Lemma von Fatou). Sei $f_n \geq 0$ messbar für alle $n \in \mathbb{N}$, $f: X \rightarrow [0, \infty]$ definiert durch $f := \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$. Dann gilt

$$\int f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

Beweis: Definiere $g_n: X \rightarrow [0, \infty]$,

$$g_n(x) := \inf\{f_k(x) : k \geq n\} \quad (x \in X, n \in \mathbb{N}).$$

$\Rightarrow g_n$ messbar (Satz 2.1), $(g_n)_n$ monoton wachsend mit $g_n(x) \nearrow f(x)$ ($x \in X$). Satz von der monotonen Konvergenz \Rightarrow

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu = \int f d\mu.$$

Mit $g_n \leq f_n$ folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$$

und damit die Behauptung. \square

Der folgende Satz ist einer der wichtigsten Sätze der Integrationstheorie.

Satz 2.10 (von Lebesgue über majorisierte (dominierte) Konvergenz). *Sei f_n messbar für alle $n \in \mathbb{N}$, der Grenzwert $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ existiere μ -fast überall, und sei $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ mit $|f_n(x)| \leq g(x)$ für μ -fast alle $x \in X$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu.$$

Beweis: O. B. d. A. existiere $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ überall und $|f_n| \leq g$ überall (evtl. Änderung auf Nullmenge).

f punktwiser Limes messbarer Funktionen $\Rightarrow f$ messbar.

Majorantenkriterium (Bemerkung 2.3) $\Rightarrow f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Wende Lemma von Fatou auf $f_n + g \geq 0$ an:

$$\int (f + g) d\mu = \int (\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n + g) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int (f_n + g) d\mu.$$

Wegen Additivität (Satz 2.7) folgt $\int f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$.

Wende Lemma von Fatou auf $g - f_n \geq 0$ an:

$$\int (g - f) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int (g - f_n) d\mu$$

$\Rightarrow -\int f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int (-f_n) d\mu$, d. h.

$$\int f d\mu \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

Insgesamt:

$$\int f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \leq \int f d\mu.$$

Also gilt überall „=“, d. h., $\int f_n d\mu$ konvergiert gegen $\int f d\mu$. \square

Satz 2.11 (Parameterabhängige Integrale). *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a \in U$, $f: X \times U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(\cdot, y): X \rightarrow \mathbb{R}$ μ -integrierbar für alle $y \in U$. Definiere*

$$g: U \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(y) := \int f(\cdot, y) d\mu = \int f(x, y) d\mu(x).$$

- (i) Für alle $x \in X$ sei $f(x, \cdot): U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig an der Stelle a , und es existiere $h \in \mathcal{L}^1(\mu)$ mit

$$|f(x, y)| \leq h(x) \quad ((x, y) \in X \times U).$$

Dann ist g stetig an der Stelle a .

- (ii) Für alle $x \in X$ sei $f(x, \cdot): U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar in U , und es existiere $h \in \mathcal{L}^1(\mu)$ mit

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y_i}(x, y) \right| \leq h(x) \quad ((x, y) \in X \times U, i = 1, \dots, n).$$

Dann ist g stetig differenzierbar an der Stelle a , und

$$\frac{\partial g}{\partial y_i}(a) = \int \frac{\partial f}{\partial y_i}(x, y) d\mu(x) \quad (i = 1, \dots, n).$$

Beweis:

- (i) Für $(y_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset U$ mit $y_k \rightarrow a$ gilt $f(\cdot, y_k) \rightarrow f(\cdot, a)$ punktweise (bzgl. $x \in X$). Nach Voraussetzung ist h eine integrierbare Majorante von $(f(\cdot, y_k))_{k \in \mathbb{N}}$, und die Aussage folgt aus dem Satz über majorisierte Konvergenz 2.10.

- (ii) $1 \leq i \leq n$, $(t_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit $t_n \rightarrow 0$, $t_n \neq 0 \Rightarrow$

$$\frac{f(\cdot, a + t_n e_i) - f(\cdot, a)}{t_n} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y_i}(\cdot, a)$$

(punktweise Konvergenz bzgl. $x \in X$).

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung besitzt die linke Seite die Majorante h . Der Satz von der majorisierten Konvergenz liefert die Differenzierbarkeit von g , Teil (i) die Stetigkeit von g' . \square

Kompendium der ANALYSIS - Ein kompletter
Bachelor-Kurs von Reellen Zahlen zu Partiellen
Differentialgleichungen
Band 2: Maß- und Integrationstheorie,
Funktionentheorie, Funktionalanalysis, Partielle
Differentialgleichungen
Denk, R.; Racke, R.
2012, XII, 305 S. 10 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-8348-1566-8