

# Umwandlung eines NEA in einen DEA

nach dem Verfahren aus dem Buch

Sebastian Wild und Markus E. Nebel

13. März 2012

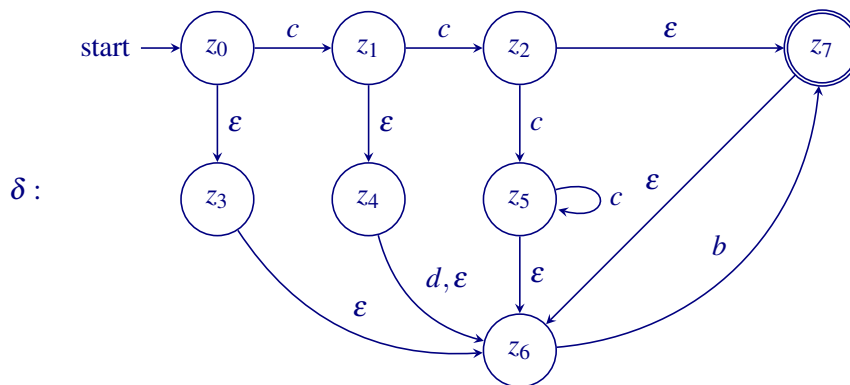
Gegeben ist ein NEA [evtl. mit  $\varepsilon$ -Übergängen]  $A = (Z, T, \delta, z_0, E)$ . Mit folgendem Verfahren konstruiert man einen äquivalenten DEA

$$B = (Q, \Sigma, \phi, q_0, F) = (\wp(Z), T, \phi, q_0, \{M \in \wp(Z) \mid M \cap E \neq \emptyset\}),$$

d. h. es gilt  $T(A) = T(B)$ .

[Der Beweis für die Korrektheit des Verfahrens steckt im Beweis zu Satz 2.2.]

Zur Veranschaulichung haben wir einen Beispielautomaten mit dem Verfahren umgewandelt. Der Automat  $A = (\{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7\}, \{b, c, d\}, \delta, z_0, \{z_7\})$  habe folgenden Übergangsgraph:



## 1 Das Verfahren

### (1) Bestimmung von $\mathcal{E}_0$

Dazu kopiert man aus der Übergangstabelle die Zustände und die  $\varepsilon$ -Spalte oder schreibt für jeden Zustand die Ziele der  $\varepsilon$ -Übergänge auf.  $\mathcal{E}_0$  gibt also an, zu welchen Zuständen ein gegebener Zustand einen  $\varepsilon$ -Übergang hat.

Die Tabelle schreiben wir in zwei Hälften nebeneinander ... das spart Platz.

		$\varepsilon$		$\varepsilon$
	$z_0$	$z_3$	$z_4$	$z_6$
$\mathcal{E}_0 :$	$z_1$	$z_4$	$z_5$	$z_6$
	$z_2$	$z_7$	$z_6$	
	$z_3$	$z_6$	$z_7$	$z_6$

(2) Bilden der reflexiv-transitiven Hülle  $\mathcal{E}$

Man beginnt mit der Starttabelle  $\mathcal{E}^{(0)}$ , in der einfach jeder Zustand eine Zeile bekommt und dort zweimal hintereinander geschrieben wird.

		$\varepsilon$		$\varepsilon$
	$z_0$	$z_0$	$z_4$	$z_4$
$\mathcal{E}^{(0)} :$	$z_1$	$z_1$	$z_5$	$z_5$
	$z_2$	$z_2$	$z_6$	$z_6$
	$z_3$	$z_3$	$z_7$	$z_7$

Dann wiederhole folgendes Vorgehen, bis keine Änderung mehr vorgenommen wird:

Bilde  $\mathcal{E}^{(n+1)}$ ,  $n \geq 0$ , indem in  $\mathcal{E}^{(n)}$  jedes  $z_j$  in der rechten Spalte durch  $z_j, \mathcal{E}_0(z_j)$  ersetzt wird, wobei  $\mathcal{E}_0(z_j)$  den Inhalt der rechten Spalte der Zeile in  $\mathcal{E}_0$  bezeichnet, in der links  $z_j$  steht. [man stelle sich  $\mathcal{E}_0$  als Abbildung  $\mathcal{E}_0 : Z \rightarrow \wp(Z)$  vor]

		$\varepsilon$		$\varepsilon$
	$z_0$	$z_0, z_3$	$z_4$	$z_4, z_6$
$\mathcal{E}^{(1)} :$	$z_1$	$z_1, z_4$	$z_5$	$z_5, z_6$
	$z_2$	$z_2, z_7$	$z_6$	$z_6$
	$z_3$	$z_3, z_6$	$z_7$	$z_7, z_6$

		$\varepsilon$		$\varepsilon$
	$z_0$	$z_0, z_3, z_6$	$z_4$	$z_4, z_6$
$\mathcal{E}^{(2)} :$	$z_1$	$z_1, z_4, z_6$	$z_5$	$z_5, z_6$
	$z_2$	$z_2, z_7, z_6$	$z_6$	$z_6$
	$z_3$	$z_3, z_6$	$z_7$	$z_7, z_6$

Ein weiterer Schritt ändert nichts mehr, d. h.  $\mathcal{E}^{(2)} = \mathcal{E}^{(3)} = \mathcal{E}^{(4)} \dots$

Die letzte Tabelle, die man so erhält ist das gewünschte  $\mathcal{E}$ . Diese gibt nun für jeden Zustand an, welche Zustände durch Verfolgen von beliebig vielen – d. h. auch gar keinen! –  $\varepsilon$ -Übergängen erreichbar sind.

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^{(2)} :$$

	$\mathcal{E}$		$\mathcal{E}$
$z_0$	$z_0, z_3, z_6$	$z_4$	$z_4, z_6$
$z_1$	$z_1, z_4, z_6$	$z_5$	$z_5, z_6$
$z_2$	$z_2, z_7, z_6$	$z_6$	$z_6$
$z_3$	$z_3, z_6$	$z_7$	$z_7, z_6$

(3) Bestimmen des Startzustandes  $q_0$

Der Startzustand von  $B$  ist  $\mathcal{E}(z_0)$ . Schließlich kann der Automat  $A$  beliebig viele  $\varepsilon$ -Übergänge benutzen, bevor er das erste Eingabesymbol liest.

$$q_0 = \mathcal{E}(z_0) = \{z_0, z_3, z_6\}$$

(4) Sukzessives Bestimmen von  $\phi$

Nach Definition ist  $\phi$  eine Abbildung  $\phi : \wp(Z) \times T \rightarrow \wp(Z)$ , die also streng genommen auf *allen* Teilmengen von  $Z$  definiert sein muss. Oft sind aber viele dieser  $2^{|Z|}$  formalen Zustände vom Startzustand überhaupt nicht erreichbar. Deshalb erlaubt man sich die Bequemlichkeit,  $\phi$  nur auf den Zuständen zu definieren, die tatsächlich erreichbar sind.

*Woher weiß ich nun, ob ein Zustand erreichbar ist?*

A priori wissen wir das nicht; mit dem folgenden Verfahren kann man  $\phi$  aber so bestimmen, dass man nur genau die notwendigen Teilmengen betrachtet:

- Wir beginnen die Tabelle für  $\phi$  mit dem Startzustand in der linken Spalte und je einer leeren Spalten für jedes  $a \in T$  rechts davon.
- Suche eine Teilmenge von  $Z$ , die in der Tabelle vorkommt, aber noch keine vollständig gefüllte Zeile hat. [Dies ist zu Beginn der Startzustand, später kommen evtl. neue dazu.]
  - Gibt es keine weitere Teilmenge mehr, so ist  $\phi$  komplett. Alle weiteren Teilmengen sind nicht erreichbar.  $\curvearrowright$  STOP!
  - Wenn es eine weitere Teilmenge  $M$  gibt, so fülle die Zeile für  $M$ , indem (c) für jede Spalte, d. h. für alle Symbole  $a \in T$ , [einmal] ausgeführt wird. Anschließend beginne wieder bei (b).
- Schreibe in die Zelle der Teilmenge  $M$  und des Symbols  $a$  die Menge

$$M' = \{z' \mid \exists z \in M \text{ mit } ((z, a), z') \in \delta\},$$

also anschaulich alle Zustände, die man erreichen kann, wenn  $A$  in *einem beliebigen* Zustand  $z \in M$  das Symbol  $a$  liest.

Jetzt ersetze in der Menge  $M'$  jeden Zustand  $z_j$  durch  $\mathcal{E}(z_j)$ . Da die (neuen) zu bestimmenden Zustände Menge sind, müssen doppelt vorkommende (alte) Zustände  $z_i$  nicht mehrmals notiert werden. [Diese letzten beiden Schritte sind im Buch zu einem einzigen zusammengefasst.]

$$(a) \quad \phi : \begin{array}{c|ccc} & b & c & d \\ \hline \{z_0, z_3, z_6\} & & & \end{array}$$

$$(b) \quad M = \{z_0, z_3, z_6\}$$

$$(c) \quad a = b$$

$$\phi : \begin{array}{c|ccc} & b & c & d \\ \hline \{z_0, z_3, z_6\} & & & \\ & & & \{z_7\} \end{array}$$

Jetzt müssen wir in  $\{z_7\}$  alle Zustände durch die entsprechenden  $\mathcal{E}$ -Zustände ersetzen. In diesem Fall kommt dadurch  $z_6$  hinzu, denn:

$$\mathcal{E}(z_7) = \{z_7, z_6\}$$

$$(c) \quad a = c$$

$$\phi : \begin{array}{c|ccc} & b & c & d \\ \hline \{z_0, z_3, z_6\} & & & \\ & \{z_6, z_7\} & \{z_1\} & \end{array}$$

Es ist  $\mathcal{E}(z_1) = \{z_1, z_4, z_6\}$ , d. h. wir müssen die Menge  $M'$  um  $z_4, z_6$  ergänzen:

$$\phi : \begin{array}{c|ccc} & b & c & d \\ \hline \{z_0, z_3, z_6\} & & & \\ & \{z_6, z_7\} & \{z_1, z_4, z_6\} & \end{array}$$

$$(c) \quad a = d$$

$$\phi : \begin{array}{c|ccc} & b & c & d \\ \hline \{z_0, z_3, z_6\} & & & \\ & \{z_6, z_7\} & \{z_1, z_4, z_6\} & \{\} \end{array}$$

(b) Wir haben zwei neue Teilmengen bekommen, die abgearbeitet werden müssen. Beginnen wir mit  $M = \{z_6, z_7\}$ .

$$(c) \quad a = b$$

$$\phi : \begin{array}{c|ccc} & b & c & d \\ \hline \{z_0, z_3, z_6\} & \{z_6, z_7\} & \{z_1, z_4, z_6\} & \{\} \\ & \{z_6, z_7\} & \{z_7\} & \end{array}$$

$$z \rightarrow \mathcal{E}(z)$$

$$\phi : \begin{array}{c|ccc} & b & c & d \\ \hline \{z_0, z_3, z_6\} & \{z_6, z_7\} & \{z_1, z_4, z_6\} & \{\} \\ & \{z_6, z_7\} & \{z_7, z_6\} & \end{array}$$

$$(c) \quad a = c$$

$$\phi : \begin{array}{c|ccc} & b & c & d \\ \hline \{z_0, z_3, z_6\} & \{z_6, z_7\} & \{z_1, z_4, z_6\} & \{\} \\ & \{z_6, z_7\} & \{z_7, z_6\} & \{\} \end{array}$$

(c)  $a = d$

	$b$	$c$	$d$
$\phi :$	$\{z_0, z_3, z_6\}$	$\{z_6, z_7\}$	$\{z_1, z_4, z_6\}$
	$\{z_6, z_7\}$	$\{z_7, z_6\}$	$\{\}$

(b)  $M = \{z_1, z_4, z_6\}$

(c)  $a = b$

	$b$	$c$	$d$
$\phi :$	$\{z_0, z_3, z_6\}$	$\{z_6, z_7\}$	$\{z_1, z_4, z_6\}$
	$\{z_6, z_7\}$	$\{z_6, z_7\}$	$\{\}$
	$\{z_1, z_4, z_6\}$	$\{z_7\}$	$\{\}$

$z \rightarrow \mathcal{E}(z)$

	$b$	$c$	$d$
$\phi :$	$\{z_0, z_3, z_6\}$	$\{z_6, z_7\}$	$\{z_1, z_4, z_6\}$
	$\{z_6, z_7\}$	$\{z_6, z_7\}$	$\{\}$
	$\{z_1, z_4, z_6\}$	$\{z_7, z_6\}$	$\{\}$

(c)  $a = c$

	$b$	$c$	$d$
$\phi :$	$\{z_0, z_3, z_6\}$	$\{z_6, z_7\}$	$\{z_1, z_4, z_6\}$
	$\{z_6, z_7\}$	$\{z_6, z_7\}$	$\{\}$
	$\{z_1, z_4, z_6\}$	$\{z_7, z_6\}$	$\{z_2\}$

$z \rightarrow \mathcal{E}(z)$

	$b$	$c$	$d$
$\phi :$	$\{z_0, z_3, z_6\}$	$\{z_6, z_7\}$	$\{z_1, z_4, z_6\}$
	$\{z_6, z_7\}$	$\{z_6, z_7\}$	$\{\}$
	$\{z_1, z_4, z_6\}$	$\{z_7, z_6\}$	$\{z_2, z_7, z_6\}$

(c)  $a = d$

	$b$	$c$	$d$
$\phi :$	$\{z_0, z_3, z_6\}$	$\{z_6, z_7\}$	$\{z_1, z_4, z_6\}$
	$\{z_6, z_7\}$	$\{z_6, z_7\}$	$\{\}$
	$\{z_1, z_4, z_6\}$	$\{z_7, z_6\}$	$\{z_2, z_7, z_6\}$

Das Verfahren sollte damit hinreichend klar geworden sein. Daher geben wir hier gleich die vollständige Tabelle an, die entsteht, wenn man das Verfahren konsequent fortsetzt:

	$b$	$c$	$d$
$\phi :$	$\{z_0, z_3, z_6\}$	$\{z_6, z_7\}$	$\{z_1, z_4, z_6\}$
	$\{z_6, z_7\}$	$\{z_6, z_7\}$	$\{z_6, z_7\}$
	$\{z_1, z_4, z_6\}$	$\{z_6, z_7\}$	$\{z_2, z_6, z_7\}$
	$\{z_2, z_6, z_7\}$	$\{z_6, z_7\}$	$\{z_5, z_6\}$
	$\{z_6\}$	$\{z_6, z_7\}$	$\{z_6\}$
	$\{z_5, z_6\}$	$\{z_6, z_7\}$	$\{z_5, z_6\}$

Man beachte, dass von den  $2^8 = 256$  formalen Zuständen von  $B$  nur 6 verwendet werden!

(5) Bestimmen der Endzustände  $F$

Wie bereits ganz zu Beginn erwähnt, sind genau all jene Teilmengen akzeptierende Zustände, die mindestens einen akzeptierenden Zustand von  $A$  enthalten.

Für unseren Automaten geben wir wieder nur diejenigen Zustände an, die vom Startzustand auch erreichbar sind. Das sind genau die 6 Zustände, die in der Tabelle für  $\phi$  auftauchen:

	akzeptierend?
$\{z_0, z_3, z_6\}$	
$\{z_6, z_7\}$	✓
$\{z_1, z_4, z_6\}$	
$\{z_2, z_6, z_7\}$	✓
$\{z_6\}$	
$\{z_5, z_6\}$	

$$\cap F = \{ \{z_6, z_7\}, \{z_2, z_6, z_7\} \}$$

Damit sind alle Teile von  $B$  bestimmt.

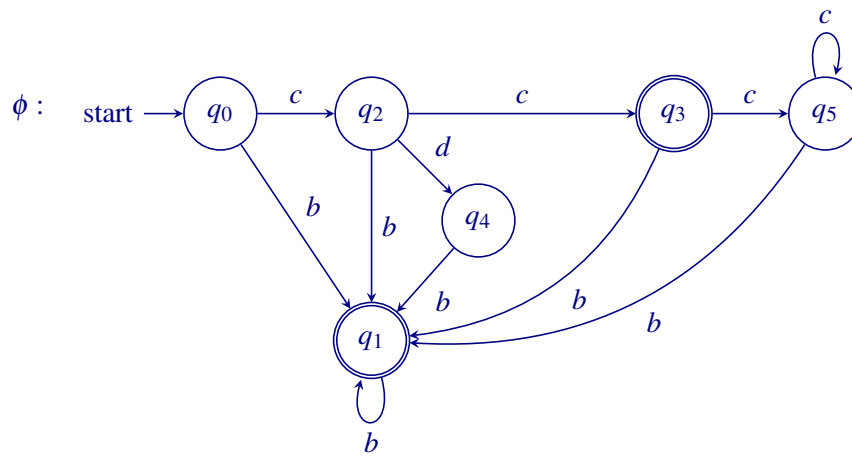
□

Benenne hier die Zustände noch um, damit sie kürzer zu schreiben sind. Die  $q_j$  entsprechen den Teilmengen in der Reihenfolge, in der sie in den Tabellen auftauchen.

Damit sieht unser DEA wie folgt aus:

$$B = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{a, b\}, \phi, q_0, \{q_1, q_3\})$$

mit



P. S.

Der Automat aus dem Beispiel akzeptiert die Sprache

$$T(A) = T(B) = \{c\}^2 \{b\}^* \cup \{c\}^* \{b\}^+ \cup \{c\} \{d\} \{b\}^+.$$



<http://www.springer.com/978-3-8348-1889-8>

Formale Grundlagen der Programmierung

Nebel, M.

2012, VIII, 194 S., Softcover

ISBN: 978-3-8348-1889-8