

Formeln für den Einfeldträger



$$\text{kN} \equiv 1000 \cdot \text{N} \quad \text{MN} \equiv 1000 \cdot \text{kN}$$



Systemkennwerte:

$$l := 6\text{m}$$

$$E := 210000 \cdot \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$I := 18000\text{cm}^4$$

Lagerung: gelenkig-gelenkig

Trapezlast

$$M_{\text{Trap_gg}}(x, q_i, q_k) := \frac{\left[\left(\frac{l-x}{l} \right) - \left(\frac{l-x}{l} \right)^3 \right] \cdot q_i + \left[\left(\frac{x}{l} \right) - \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right] \cdot q_k}{6} \cdot l^2$$

$$w_{\text{Trap_gg}}(x, q_i, q_k) := \left[\left[\left[\left(\frac{l-x}{l} \right) - \left(\frac{l-x}{l} \right)^3 \right] \cdot \left[7 - 3 \cdot \left(\frac{l-x}{l} \right)^2 \right] \cdot q_i \right] + \left[\left(\frac{x}{l} \right) - \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right] \cdot \left[7 - 3 \cdot \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] \cdot q_k \right] \cdot \frac{l^4}{360 \cdot E \cdot I}$$

Einzellast

$$M_{\text{F_gg}}(x, F, a) := \begin{cases} \left(\frac{x}{l} \cdot \frac{l-a}{l} \cdot F \cdot l \right) & \text{if } \frac{x}{l} \leq \frac{a}{l} \\ \left[\left(\frac{l-x}{l} \right) \cdot \frac{a}{l} \cdot F \cdot l \right] & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$w_{\text{F_gg}}(x, F, a) := \begin{cases} \left[1 - \left(\frac{l-a}{l} \right)^2 - \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] \cdot \frac{l-a}{l} \cdot \left(\frac{x}{l} \right) \cdot \frac{F \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot I} & \text{if } \frac{x}{l} \leq \frac{a}{l} \\ \left[1 - \left(\frac{a}{l} \right)^2 - \left(\frac{l-x}{l} \right)^2 \right] \cdot \frac{a}{l} \cdot \left(\frac{l-x}{l} \right) \cdot \frac{F \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot I} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Einzelmomente bei i und k

$$M_{\text{M_gg}}(x, M_i, M_k) := M_i \cdot \left(\frac{l-x}{l} \right) + M_k \cdot \frac{x}{l}$$

$$w_{\text{M_gg}}(x, M_i, M_k) := \frac{l^2}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \left[M_i \cdot \left[\frac{l-x}{l} - \left(\frac{l-x}{l} \right)^3 \right] + M_k \cdot \left[\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right] \right]$$

Lagerung: gelenkig-eingespannt

Trapezlast

$$M_{\text{Trap_ge}}(x, q_i, q_k) := \begin{cases} M_E \leftarrow \frac{-(7 \cdot q_i + 8 \cdot q_k)}{120} \cdot l^2 \\ M_{\text{Trap_gg}}(x, q_i, q_k) + M_{\text{M_gg}}(x, 0 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}, M_E) \end{cases}$$

$$w_{\text{Trap_ge}}(x, q_i, q_k) := \begin{cases} M_E \leftarrow \frac{-(7 \cdot q_i + 8 \cdot q_k)}{120} \cdot l^2 \\ w_{\text{Trap_gg}}(x, q_i, q_k) + w_{\text{M_gg}}(x, 0 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}, M_E) \end{cases}$$

Einzellast

$$M_{\text{F_ge}}(x, F, a) := \begin{cases} M_E \leftarrow \frac{-\left[1 - \left(\frac{a}{l}\right)^2\right]}{2} \cdot a \cdot F \\ M_{\text{F_gg}}(x, F, a) + M_{\text{M_gg}}(x, 0 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}, M_E) \end{cases}$$

$$w_{\text{F_ge}}(x, F, a) := \begin{cases} M_E \leftarrow \frac{-\left[1 - \left(\frac{a}{l}\right)^2\right]}{2} \cdot a \cdot F \\ w_{\text{F_gg}}(x, F, a) + w_{\text{M_gg}}(x, 0 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}, M_E) \end{cases}$$

Lagerung: eingespannt-eingespannt

Trapezlast

$$M_{\text{Trap_ee}}(x, q_i, q_k) := \begin{cases} M_{Ei} \leftarrow \frac{-(1.5 \cdot q_i + q_k)}{30} \cdot l^2 \\ M_{Ek} \leftarrow \frac{-(q_i + 1.5 \cdot q_k)}{30} \cdot l^2 \\ M_{\text{Trap_gg}}(x, q_i, q_k) + M_{\text{M_gg}}(x, M_{Ei}, M_{Ek}) \end{cases}$$

$$w_{\text{Trap_ee}}(x, q_i, q_k) := \begin{cases} M_{Ei} \leftarrow \frac{-(1.5 \cdot q_i + q_k)}{30} \cdot l^2 \\ M_{Ek} \leftarrow \frac{-(q_i + 1.5 \cdot q_k)}{30} \cdot l^2 \\ w_{\text{Trap_gg}}(x, q_i, q_k) + w_{\text{M_gg}}(x, M_{Ei}, M_{Ek}) \end{cases}$$

Einzellast

$$M_{\text{F_ee}}(x, F, a) := \begin{cases} M_{Ei} \leftarrow \frac{-a}{l} \cdot \left(\frac{l-a}{l}\right)^2 \cdot F \cdot l \\ M_{Ek} \leftarrow \frac{-(l-a)}{l} \cdot \left(\frac{a}{l}\right)^2 \cdot F \cdot l \\ M_{\text{F_gg}}(x, F, a) + M_{\text{M_gg}}(x, M_{Ei}, M_{Ek}) \end{cases}$$

$$w_{F_ee}(x, F, a) := \begin{cases} M_{Ei} \leftarrow \frac{-a}{l} \cdot \left(\frac{l-a}{l} \right)^2 \cdot F \cdot l \\ M_{Ek} \leftarrow \frac{-(l-a)}{l} \cdot \left(\frac{a}{l} \right)^2 \cdot F \cdot l \\ w_{F_gg}(x, F, a) + w_{M_gg}(x, M_{Ei}, M_{Ek}) \end{cases}$$

Beispiele

Momente und Durchbiegungen in Trägermitte für eine Einzellast
bei verschiedenen Lagerungsbedingungen

$$P := 20 \cdot \text{kN} \quad a := 2 \text{ m}$$

gelenkig - gelenkig

$$M_{F_gg}\left(\frac{l}{2}, P, a\right) = 20 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad w_{F_gg}\left(\frac{l}{2}, P, a\right) = 2.03 \text{ mm}$$

gelenkig - eingespannt

$$M_{F_ge}\left(\frac{l}{2}, P, a\right) = 11.11 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad w_{F_ge}\left(\frac{l}{2}, P, a\right) = 0.97 \text{ mm}$$

eingespannt - eingespannt

$$M_{F_ee}\left(\frac{l}{2}, P, a\right) = 6.67 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad w_{F_ee}\left(\frac{l}{2}, P, a\right) = 0.44 \text{ mm}$$

Momente und Durchbiegungen in Trägermitte für eine Trapezlast
bei verschiedenen Lagerungsbedingungen

$$q_a := 5 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad q_b := 15 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

gelenkig - gelenkig

$$M_{\text{Trap_gg}}\left(\frac{l}{2}, q_a, q_b\right) = 45 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad w_{\text{Trap_gg}}\left(\frac{l}{2}, q_a, q_b\right) = 4.46 \text{ mm}$$

gelenkig - eingespannt

$$M_{\text{Trap_ge}}\left(\frac{l}{2}, q_a, q_b\right) = 21.75 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad w_{\text{Trap_ge}}\left(\frac{l}{2}, q_a, q_b\right) = 1.7 \text{ mm}$$

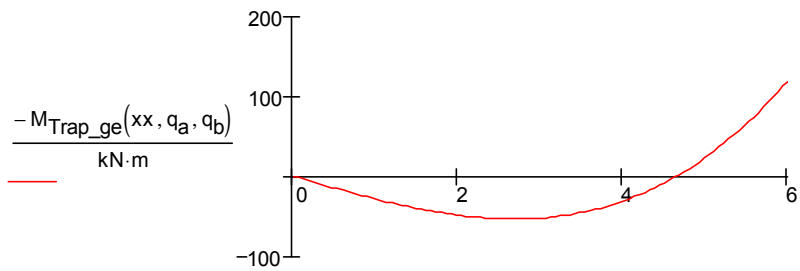
eingespannt - eingespannt

$$M_{\text{Trap_ee}}\left(\frac{l}{2}, q_a, q_b\right) = 15 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad w_{\text{Trap_ee}}\left(\frac{l}{2}, q_a, q_b\right) = 0.89 \text{ mm}$$

Momenten- und Biegelinien

$$xx := 0, \frac{l}{100} \dots l \quad q_a := 0 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad q_b := 50 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Momentenlinie in [kNm]



xx

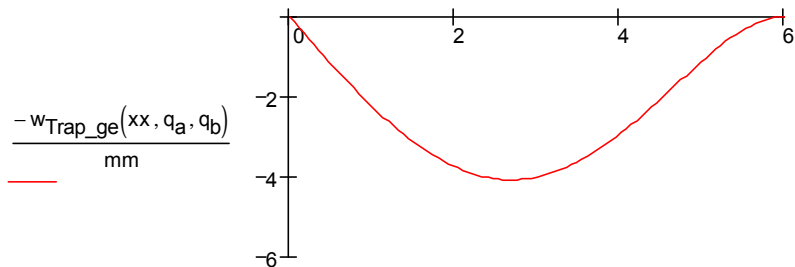
$i := 0, 1 \dots 100$

$$MT_i := M_{\text{Trap_ee}}\left(i \cdot \frac{l}{100}, q_a, q_b\right)$$

$\max(MT) = 38.59 \text{ kN} \cdot \text{m}$

$\min(MT) = -90 \text{ kN} \cdot \text{m}$

Biegelinie in [mm]



xx

$$wt_i := w_{\text{Trap_ee}}\left(i \cdot \frac{l}{100}, q_a, q_b\right)$$

$\max(wt) = 2.24 \text{ mm}$

$\min(wt) = 0 \text{ mm}$