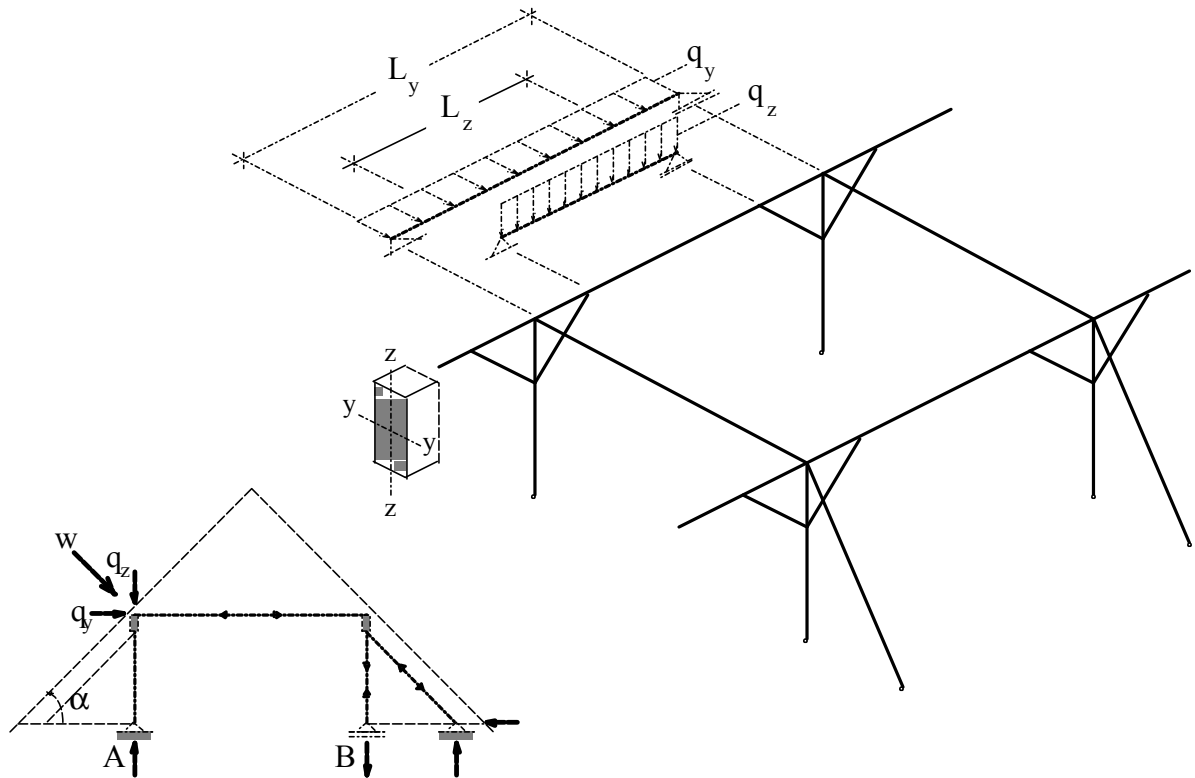


Beispiel 1: Mittelpfette

Annahme:

Der Biegebalken aus Nadelholz steht unter einer Last aus ständiger und nicht ständiger Einwirkung mit ungünstiger Auswirkung. Der Feuchtegehalt in dem Baustoff, der einer Temperatur von $20 \pm 2^\circ \text{C}$ und einer relativen Luftfeuchte der umgebenden Luft entspricht, übersteigt nur einige Wochen pro Jahr einen Wert von 65 %. Daraus folgt [nach ENV1995, 3.1.5] die Nutzungsklasse 1. Die Festigkeitsklasse ist NH S10 und entspricht der Festigkeitsklasse von NH II [nach DIN 1052].



$$\alpha := 45^\circ = \text{Dachneigung} \Rightarrow \sin \alpha := 0.71 \quad \cos \alpha := 0.71$$

Klasse der LastEinwirkungsDauer (KLED):

$$g_{z,k} := 2.25 \frac{\text{kN}}{\text{m}} = \text{Charakteristischer Wert für ständige Einwirkungen} \quad \text{ständig}$$

$$s_{z,k} := 3.75 \frac{\text{kN}}{\text{m}} = \text{Charakteristischer Wert für nicht ständige Einwirkungen (Schnee)} \quad \text{mittel}$$

$$w := 1.20 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \Rightarrow$$

$$w_{z,k} := \cos \alpha \cdot w = \text{Charakteristischer Wert für nicht ständige Einwirkungen (Wind)} \quad \text{kurz}$$

$$w_{y,k} := \sin \alpha \cdot w = \text{Charakteristischer Wert für nicht ständige Einwirkungen (Wind)} \quad \text{kurz}$$

vereinfachte Kombinationsgleichungen für Hochbautragwerke nach [ENV1995, 2.3.3.1]

$$\gamma_G \cdot \gamma_{Q,1} \cdot \gamma_{Q,2} = \text{Teilsicherheitsbeiwerte [ENV1995, Tab. 2.3.3.1]}$$

abhängig von der Art der Einwirkung und Auswirkung

$$\text{hier: ständige Einwirkung + ungünstige Auswirkung} \Rightarrow \gamma_G := 1.35$$

$$\text{hier: veränderliche Einwirkung + ungünstigste Auswirkung} \Rightarrow \gamma_{Q,1} := 1.50$$

$$\text{hier: veränderliche Einwirkung + ungünstige Auswirkung} \Rightarrow \gamma_{Q,2} := 1.35$$

Nachweis der Tragfähigkeit

Bemessungswerte der Einwirkungen [ENV1995, 2.2.2.4]

1. Einwirkungskombination:	$q_{z,1,d} := \gamma_G \cdot g_{z,k} + \gamma_{Q,1} \cdot s_{z,k}$	$q_{y,1,d} := 0 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}}$
2. Einwirkungskombination:	$q_{z,2,d} := \gamma_G \cdot g_{z,k} + \gamma_{Q,1} \cdot w_{z,k}$	$q_{y,2,d} := \gamma_{Q,1} \cdot w_{y,k}$
3. Einwirkungskombination:	$q_{z,3,d} := \gamma_G \cdot g_{z,k} + \gamma_{Q,2} \cdot s_{z,k} + \gamma_{Q,2} \cdot w_{z,k}$	$q_{y,3,d} := \gamma_{Q,2} \cdot w_{y,k}$

Schnittgrößen: $L_z := 2.50 \cdot \text{m}$ $L_y := 4.30 \cdot \text{m}$

1. EK:	$M_{y,1,d} := q_{z,1,d} \cdot \frac{L_z^2}{8} \Rightarrow M_{y,1,d} = 6.77 \text{ kN} \cdot \text{m}$	$M_{z,1,d} := q_{y,1,d} \cdot \frac{L_y^2}{8} \Rightarrow M_{z,1,d} = 0 \text{ kN} \cdot \text{m}$
	$V_{z,1,d} := \frac{1}{2} \cdot q_{z,1,d} \cdot L_z \Rightarrow V_{z,1,d} = 10.83 \text{ kN}$	$V_{y,1,d} := \frac{1}{2} \cdot q_{y,1,d} \cdot L_y \Rightarrow V_{y,1,d} = 0 \text{ kN}$
2. EK:	$M_{y,2,d} := q_{z,2,d} \cdot \frac{L_z^2}{8} \Rightarrow M_{y,2,d} = 3.37 \text{ kN} \cdot \text{m}$	$M_{z,2,d} := q_{y,2,d} \cdot \frac{L_y^2}{8} \Rightarrow M_{z,2,d} = 2.95 \text{ kN} \cdot \text{m}$
	$V_{z,2,d} := \frac{1}{2} \cdot q_{z,2,d} \cdot L_z \Rightarrow V_{z,2,d} = 5.39 \text{ kN}$	$V_{y,2,d} := \frac{1}{2} \cdot q_{y,2,d} \cdot L_y \Rightarrow V_{y,2,d} = 2.75 \text{ kN}$
3. EK:	$M_{y,3,d} := q_{z,3,d} \cdot \frac{L_z^2}{8} \Rightarrow M_{y,3,d} = 7.23 \text{ kN} \cdot \text{m}$	$M_{z,3,d} := q_{y,3,d} \cdot \frac{L_y^2}{8} \Rightarrow M_{z,3,d} = 2.66 \text{ kN} \cdot \text{m}$
	$V_{z,3,d} := \frac{1}{2} \cdot q_{z,3,d} \cdot L_z \Rightarrow V_{z,3,d} = 11.56 \text{ kN}$	$V_{y,3,d} := \frac{1}{2} \cdot q_{y,3,d} \cdot L_y \Rightarrow V_{y,3,d} = 2.75 \text{ kN}$

gewählt:

$$b := 14 \cdot \text{cm} \quad h := 20 \cdot \text{cm} \quad A := h \cdot b \Rightarrow A = 280 \text{ cm}^2$$

$$W_y := \frac{b \cdot h^2}{6} \Rightarrow W_y = 933.33 \text{ cm}^3 \quad W_z := \frac{h \cdot b^2}{6} \Rightarrow W_z = 653.33 \text{ cm}^3$$

$$I_y := \frac{b \cdot h^3}{12} \Rightarrow I_y = 9.33 \times 10^3 \text{ cm}^4 \quad I_z := \frac{b^3 \cdot h}{12} \Rightarrow I_z = 4.57 \times 10^3 \text{ cm}^4$$

$$E_{0,\text{mean}} := 11000 \cdot \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad G_{\text{mean}} := 690 \cdot \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

γ_M = Teilsicherheitsfaktor für die Baustoffeigenschaften [ENV1995, Tab. 2.3.3.2]
abhängig vom Material, hier: Holz

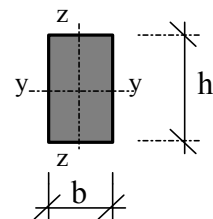
$$\gamma_M := 1.3$$

$k_{1,\text{mod}}$ = Modifikationsfaktor für Vollholz für 1. **EK** [ENV1995, Tab. 3.1.7]
abhängig von der Nutzungsklasse, hier: 1
der Lasteinwirkungsdauer, hier: ständig + mittel
(bei unterschiedlichen Lasteinwirkungsdauern ist die kürzeste maßgebend)
und dem Material, hier: Holz,

$$k_{1,\text{mod}} := 0.80$$

$k_{2,\text{mod}}$ = Modifikationsfaktor für Vollholz für 2. **EK** [ENV1995, Tab. 3.1.7]
abhängig von der Nutzungsklasse, hier: 1
der Lasteinwirkungsdauer, hier: ständig + kurz
und dem Material, hier: Holz,

$$k_{2,\text{mod}} := 0.90$$



$k_{3.mod}$ = Modifikationsfaktor für Vollholz für 3.EK [ENV1995, Tab. 3.1.7]

abhängig von der Nutzungsklasse, hier: 1
der Lasteinwirkungsdauer, hier: ständig + mittel + kurz
und dem Material, hier: Holz,

$$k_{3.mod} := 0.90$$

Bemessungswerte der Festigkeit für Biegung und Schub für NH S10

$$f_{m.k} := 24 \cdot \frac{N}{mm^2} = \text{charakteristischer Wert der Biegefestigkeit [NAD, Tab. 3.2-1]}$$

$f_{m.d}$ = Bemessungswert der Biegefestigkeit:

$$f_{m.1.d} := \frac{k_{1.mod}}{\gamma_M} \cdot f_{m.k} \Rightarrow f_{m.1.d} = 14.77 \frac{N}{mm^2}$$

$$f_{m.2.d} := \frac{k_{2.mod}}{\gamma_M} \cdot f_{m.k} \Rightarrow f_{m.2.d} = 16.62 \frac{N}{mm^2}$$

$$f_{m.3.d} := \frac{k_{3.mod}}{\gamma_M} \cdot f_{m.k} \Rightarrow f_{m.3.d} = 16.62 \frac{N}{mm^2}$$

$$f_{v.k} := 2.5 \cdot \frac{N}{mm^2} = \text{charakteristischer Wert der Schubfestigkeit [NAD, Tab. 3.2-1]}$$

$f_{v.d}$ = Bemessungswert der Schubfestigkeit:

$$f_{v.1.d} := \frac{k_{1.mod}}{\gamma_M} \cdot f_{v.k} \Rightarrow f_{v.1.d} = 1.54 \frac{N}{mm^2}$$

$$f_{v.2.d} := \frac{k_{2.mod}}{\gamma_M} \cdot f_{v.k} \Rightarrow f_{v.2.d} = 1.73 \frac{N}{mm^2}$$

$$f_{v.3.d} := \frac{k_{3.mod}}{\gamma_M} \cdot f_{v.k} \Rightarrow f_{v.3.d} = 1.73 \frac{N}{mm^2}$$

Spannungsnachweis auf Biegung 1.EK: [ENV1995, 5.1.6]

$$\sigma_{m.y.1.d} := \frac{M_{y.1.d}}{W_y} \Rightarrow \sigma_{m.y.1.d} = 7.25 \frac{N}{mm^2}$$

$$\frac{\sigma_{m.y.1.d}}{f_{m.1.d}} = 0.49 < 1 \Rightarrow \text{Nachweis erfüllt}$$

auf Schub:

$$\tau_{z.1.d} := 1.5 \cdot \frac{V_{z.1.d}}{A} \Rightarrow \tau_{z.1.d} = 0.58 \frac{N}{mm^2}$$

$$\frac{\tau_{z.1.d}}{f_{v.1.d}} = 0.38 < 1 \Rightarrow \text{Nachweis erfüllt [ENV1995, 5.1.7.1]}$$

Spannungsnachweis auf Biegung (Doppelbiegung) 2.EK: [ENV1995, 5.1.6]

$$\sigma_{m.y.2.d} := \frac{M_{y.2.d}}{W_y} \Rightarrow \sigma_{m.y.2.d} = 3.61 \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_{m.z.2.d} := \frac{M_{z.2.d}}{W_z} \Rightarrow \sigma_{m.z.2.d} = 4.52 \frac{N}{mm^2}$$

$$k_m := 0.7 = \text{Abminderungsfaktor für Rechteckquerschnitte [ENV1995, 5.1.6 (2)]}$$

$$k_m \cdot \frac{\sigma_{m.y.2.d}}{f_{m.2.d}} + \frac{\sigma_{m.z.2.d}}{f_{m.2.d}} = 0.42 < 1 \Rightarrow \text{Nachweis erfüllt} \quad [\text{ENV1995, 5.1.6a+b}]$$

$$\frac{\sigma_{m.y.2.d}}{f_{m.2.d}} + k_m \cdot \frac{\sigma_{m.z.2.d}}{f_{m.2.d}} = 0.41 < 1 \Rightarrow \text{Nachweis erfüllt}$$

auf Schub

$$\tau_{z.2.d} := 1.5 \cdot \frac{V_{z.2.d}}{A} \Rightarrow \tau_{z.2.d} = 0.29 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\tau_{y.2.d} := 1.5 \cdot \frac{V_{y.2.d}}{A} \Rightarrow \tau_{y.2.d} = 0.15 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\frac{\sqrt{\tau_{z.2.d}^2 + \tau_{y.2.d}^2}}{f_{v.2.d}} = 0.19 < 1 \Rightarrow \text{Nachweis erfüllt} [\text{ENV1995, 5.1.7.1}]$$

Spannungsnachweis auf Biegung (Doppelbiegung) 3.Ek: [ENV1995, 5.1.6]

$$\sigma_{m.y.3.d} := \frac{M_{y.3.d}}{W_y} \Rightarrow \sigma_{m.y.3.d} = 7.74 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_{m.z.3.d} := \frac{M_{z.3.d}}{W_z} \Rightarrow \sigma_{m.z.3.d} = 4.07 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$k_m := 0.7$ = Abminderungsfaktor für Rechteckquerschnitte [ENV1995, 5.1.6 (2)]

$$k_m \cdot \frac{\sigma_{m.y.3.d}}{f_{m.3.d}} + \frac{\sigma_{m.z.3.d}}{f_{m.3.d}} = 0.57 < 1 \Rightarrow \text{Nachweis erfüllt} \quad [\text{ENV1995, 5.1.6a+b}]$$

$$\frac{\sigma_{m.y.3.d}}{f_{m.3.d}} + k_m \cdot \frac{\sigma_{m.z.3.d}}{f_{m.3.d}} = 0.64 < 1 \Rightarrow \text{Nachweis erfüllt}$$

auf Schub

$$\tau_{z.3.d} := 1.5 \cdot \frac{V_{z.3.d}}{A} \Rightarrow \tau_{z.3.d} = 0.62 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\tau_{y.3.d} := 1.5 \cdot \frac{V_{y.3.d}}{A} \Rightarrow \tau_{y.3.d} = 0.15 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\frac{\sqrt{\tau_{z.3.d}^2 + \tau_{y.3.d}^2}}{f_{v.3.d}} = 0.37 < 1 \Rightarrow \text{Nachweis erfüllt} [\text{ENV1995, 5.1.7.1}]$$

Nachweis der Gebrauchsfähigkeit

Schnittgrößen

$$g_{z.k} := 2.25 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}} = \text{Charakteristischer Wert für ständige Einwirkungen}$$

$$s_{z.k} := 3.75 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}} = \text{Charakteristischer Wert für nicht ständige Einwirkungen (Schnee)}$$

$$w := 1.20 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}} \Rightarrow$$

$$w_{z.k} := \cos \alpha \cdot w = \text{Charakteristischer Wert für nicht ständige Einwirkungen (Wind)}$$

$$w_{y.k} := \sin \alpha \cdot w = \text{Charakteristischer Wert für nicht ständige Einwirkungen (Wind)}$$

u_{inst} : elastische Anfangsverformungen

u_{fin} : Endverformungen, wobei

$$u_{fin} = u_{inst}(1+k_{def})$$

Bei Biegeträgern unterscheidet man die Durchbiegungsanteile

u_1 : Durchbiegung infolge ständiger Einwirkungen

u_2 : Durchbiegung infolge veränderlicher Einwirkungen

u_{net} : Gesamtdurchbiegung bezogen auf eine die Auflager verbindende Gerade

u_0 : Überhöhung (falls vorhanden) im lastfreien Zustand

Bestimmung der Bauteildurchbiegung [ENV1995, 4]

$k_{def,i}$ = Faktor zur Berücksichtigung des Kriechens und Schwindens [ENV1995, Tab. 4.1]
abhängig vom Material hier: Vollholz
der Nutzungsklasse hier: NK 1
und der Einwirkungsdauer hier: ständig + mittel + kurz

$k_{def,g} := 0.60$ = ständige Lasteinwirkungsdauer

$k_{def,s} := 0.25$ = mittlere Lasteinwirkungsdauer

$k_{def,w} := 0.0$ = kurze Lasteinwirkungsdauer

Anfangsdurchbiegungen:

Lastfall g:

$$u_{1,z,g,m} := \frac{5 \cdot g_z \cdot k \cdot L_z^4}{384 \cdot E_{0,mean} \cdot I_y} \Rightarrow u_{1,z,g,m} = 0.11 \text{ cm} \quad \text{infolge ständ.Last, Biegeanteil (t=0)}$$

$$A_v := \frac{A}{1.2} \quad \text{für Rechteckquerschnitt}$$

$$u_{1,z,g,v} := \frac{g_z \cdot k \cdot \left(\frac{L_z^2}{8} \right)}{G_{mean} \cdot A_v} \Rightarrow u_{1,z,g,v} = 0.01 \text{ cm} \quad \text{infolge ständ.Last, Schubanteil (t=0)}$$

$$u_{1,z,g,inst} := u_{1,z,g,m} + u_{1,z,g,v} \Rightarrow u_{1,z,g,inst} = 0.12 \text{ cm}$$

Lastfall s:

$$u_{2,z,s,m} := \frac{5 \cdot s_z \cdot k \cdot L_z^4}{384 \cdot E_{0,mean} \cdot I_y} \Rightarrow u_{2,z,s,m} = 0.19 \text{ cm} \quad \text{infolge nichtständ.Last, Biegeanteil (t=0)}$$

$$u_{2,z,s,v} := \frac{s_z \cdot k \cdot \left(\frac{L_z^2}{8} \right)}{G_{mean} \cdot A_v} \Rightarrow u_{2,z,s,v} = 0.02 \text{ cm} \quad \text{infolge nichtständ.Last, Schubanteil (t=0)}$$

$$u_{2,z,s,inst} := u_{2,z,s,m} + u_{2,z,s,v} \Rightarrow u_{2,z,s,inst} = 0.2 \text{ cm}$$

Lastfall w:

in z-Richtung:

$$u_{2,z,w,m} := \frac{5 \cdot w_z \cdot k \cdot L_z^4}{384 \cdot E_{0,mean} \cdot I_y} \Rightarrow u_{2,z,w,m} = 0.04 \text{ cm} \quad \text{infolge nichtständ.Last, Biegeanteil (t=0)}$$

$$u_{2,z,w,v} := \frac{w_z \cdot k \cdot \left(\frac{L_z^2}{8} \right)}{G_{mean} \cdot A_v} \Rightarrow u_{2,z,w,v} = 4.13 \times 10^{-3} \text{ cm} \quad \text{infolge nichtständ.Last, Schubanteil (t=0)}$$

$$u_{2.z.w.inst} := u_{2.z.w.m} + u_{2.z.w.v} \quad \Rightarrow \quad u_{2.z.w.inst} = 0.05 \text{ cm}$$

in y-Richtung:

$$u_{2.y.w.m} := \frac{5 \cdot w_y \cdot k \cdot L_y^4}{384 \cdot E_0 \cdot I_{mean} \cdot I_z} \quad \Rightarrow \quad u_{2.y.w.m} = 0.75 \text{ cm} \quad \text{infolge nichtständ. Last, Biegeanteil (t=0)}$$

$$u_{2.y.w.v} := \frac{w_y \cdot k \cdot \left(\frac{L_y^2}{8} \right)}{G_{mean} \cdot A_v} \quad \Rightarrow \quad u_{2.y.w.v} = 0.01 \text{ cm} \quad \text{infolge nichtständ. Last, Schubanteil (t=0)}$$

$$u_{2.y.w.inst} := u_{2.y.w.m} + u_{2.y.w.v} \quad \Rightarrow \quad u_{2.y.w.inst} = 0.77 \text{ cm} \quad \text{Anfangsdurchbiegung in y-Richtung}$$

Enddurchbiegungen mit k_{def} -Werten:

Lastfall g:

$$u_{1.z.g.fin} := u_{1.z.g.inst} \cdot (1 + k_{def.g}) \quad \Rightarrow \quad u_{1.z.g.fin} = 0.2 \text{ cm} \quad \text{Enddurchbiegung infolge ständ. Last}$$

Lastfall s:

$$u_{2.z.s.fin} := u_{2.z.s.inst} \cdot (1 + k_{def.s}) \quad \Rightarrow \quad u_{2.z.s.fin} = 0.25 \text{ cm} \quad \text{Enddurchbiegung infolge nichtständ. Last}$$

Lastfall w:

in z-Richtung:

$$u_{2.z.w.fin} := u_{2.z.w.inst} \cdot (1 + k_{def.w}) \quad \Rightarrow \quad u_{2.z.w.fin} = 0.05 \text{ cm} \quad \text{Enddurchbiegung infolge nichtständ. Last}$$

in y-Richtung:

$$u_{2.y.w.fin} := u_{2.y.w.inst} \cdot (1 + k_{def.w}) \quad \Rightarrow \quad u_{2.y.w.fin} = 0.77 \text{ cm} \quad \text{Enddurchbiegung infolge nichtständ. Last}$$

3. EK (g+s+w); hier maßgebend, weil Gebrauchstauglichkeitsnachweis ohne Teilsicherheitsbeiwerte:

Anfangsdurchbiegungen:

$$\text{in z-Richtung:} \quad u_{2.z.inst} := u_{2.z.s.inst} + u_{2.z.w.inst} \quad \Rightarrow \quad u_{2.z.inst} = 0.25 \text{ cm}$$

$$\text{in y-Richtung:} \quad u_{2.y.inst} := u_{2.y.w.inst} \quad \Rightarrow \quad u_{2.y.inst} = 0.77 \text{ cm}$$

$$\text{resultierend:} \quad u_{2.inst} := \sqrt{u_{2.z.inst}^2 + u_{2.y.inst}^2} \quad \Rightarrow \quad u_{2.inst} = 0.81 \text{ cm}$$

Enddurchbiegungen:

$$\text{in z-Richtung:} \quad u_{2.z.fin} := u_{2.z.s.fin} + u_{2.z.w.fin} \quad \Rightarrow \quad u_{2.z.fin} = 0.3 \text{ cm}$$

$$\text{in y-Richtung:} \quad u_{2.y.fin} := u_{2.y.w.fin} \quad \Rightarrow \quad u_{2.y.fin} = 0.77 \text{ cm}$$

$$\text{resultierend:} \quad u_{2.fin} := \sqrt{u_{2.z.fin}^2 + u_{2.y.fin}^2} \quad \Rightarrow \quad u_{2.fin} = 0.82 \text{ cm}$$

$$\text{in z-Richtung:} \quad u_{net.z.fin} := u_{1.z.g.fin} + u_{2.z.s.fin} + u_{2.z.w.fin} \quad \Rightarrow \quad u_{net.z.fin} = 0.5 \text{ cm}$$

$$\text{in y-Richtung:} \quad u_{net.y.fin} := u_{2.y.w.fin} \quad \Rightarrow \quad u_{net.y.fin} = 0.77 \text{ cm}$$

$$\text{resultierend:} \quad u_{net.fin} := \sqrt{u_{net.z.fin}^2 + u_{net.y.fin}^2} \quad \Rightarrow \quad u_{net.fin} = 0.82 \text{ cm}$$

zulässige Durchbiegungen (maßgebend L_z , weil $L_z < L_y$):

$$\text{zul_u2.inst} := \frac{L_z}{300} \quad \Rightarrow \quad \text{zul_u2.inst} = 0.83 \text{ cm}$$

$$\text{zul_u2.fin} := \frac{L_z}{200} \quad \Rightarrow \quad \text{zul_u2.fin} = 1.25 \text{ cm}$$

$$\text{zul_u_{net}.fin} := \frac{L_z}{200} \quad \Rightarrow \quad \text{zul_u_{net}.fin} = 1.25 \text{ cm}$$

Nachweise:

$$\frac{u_{2.\text{inst}}}{\text{zul_u2.inst}} = 0.97 \quad < 1 \quad \Rightarrow \text{Nachweis erbracht}$$

$$\frac{u_{2.\text{fin}}}{\text{zul_u2.fin}} = 0.66 \quad < 1 \quad \Rightarrow \text{Nachweis erbracht}$$

$$\frac{u_{\text{net}.fin}}{\text{zul_u_{net}.fin}} = 0.66 \quad < 1 \quad \Rightarrow \text{Nachweis erbracht}$$