

Beispiel 3: Genagelter Hohlkastenbiegeträger

Annahme:

Der zusammengegenagelte Biegeträger aus Nadelholz steht unter einer Last aus ständiger und nicht ständiger Einwirkung mit ungünstiger Auswirkung. Der Feuchtegehalt in dem Baustoff, der einer Temperatur von 20 +/- 2° C und einer relativen Luftfeuchte der umgebenden Luft entspricht, übersteigt nur einige Wochen pro Jahr einen Wert von 65 %. Daraus folgt [nach ENV1995, 3.1.5] die Nutzungsklasse 1. Die Festigkeitsklasse ist NH S10 und entspricht der Festigkeitsklasse von NH II [nach DIN 1052].

$$g := 1.40 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad g_k := g \quad = \text{Charakteristischer Wert für ständige Einwirkungen}$$

$$s := 1.60 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad q_k := s \quad = \text{Charakteristischer Wert für nicht ständige Einwirkungen}$$

$$\gamma_G, \gamma_Q = \text{Teilsicherheitsbeiwerte [ENV1995, Tab. 2.3.3.1]}$$

abhängig von der Art der Einwirkung und Auswirkung

hier: ständige Einwirkung + ungünstige Auswirkung \Rightarrow

$$\gamma_G := 1.35$$

hier: nicht ständige Einwirkung + ungünstige Auswirkung \Rightarrow

$$\gamma_Q := 1.50$$

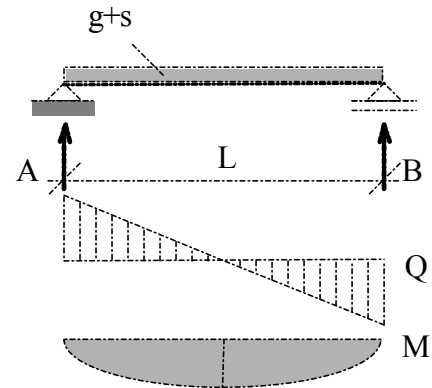
$$g_d := \gamma_G \cdot g_k \quad = \text{Bemessungswert der ständigen Einwirkung [ENV1995, 2.2.2.4]}$$

$$q_d := \gamma_Q \cdot q_k \quad = \text{Bemessungswert der nicht ständigen Einwirkung}$$

$$g_d = 1.89 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad q_d = 2.4 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$L := 4.50 \cdot \text{m}$$

$$G_{\text{mean}} := 690 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$



Nachweis der Tragfähigkeit

Lagerreaktionen und Schnittgrößen:

$$A = B := g_d \cdot \frac{L}{2} + q_d \cdot \frac{L}{2} \quad \Rightarrow \quad A = B = 9.65 \text{ kN}$$

$$V_d := B \quad \Rightarrow \quad V_d = 9.65 \text{ kN}$$

$$M_d := (g_d + q_d) \cdot \frac{L^2}{8} \quad \Rightarrow \quad M_d = 10.86 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

gewählt:

$$h_1 := 4 \cdot \text{cm} \quad b_1 := 13 \cdot \text{cm} \quad A_1 := h_1 \cdot b_1 \quad \Rightarrow \quad A_1 = 52 \text{ cm}^2$$

$$h_2 := 24 \cdot \text{cm} \quad b_2 := 2.6 \cdot \text{cm} \quad A_2 := h_2 \cdot b_2 \quad \Rightarrow \quad A_2 = 62.4 \text{ cm}^2$$

$$h_3 := 4 \cdot \text{cm} \quad b_3 := 13 \cdot \text{cm} \quad A_3 := h_3 \cdot b_3 \quad \Rightarrow \quad A_3 = 52 \text{ cm}^2$$

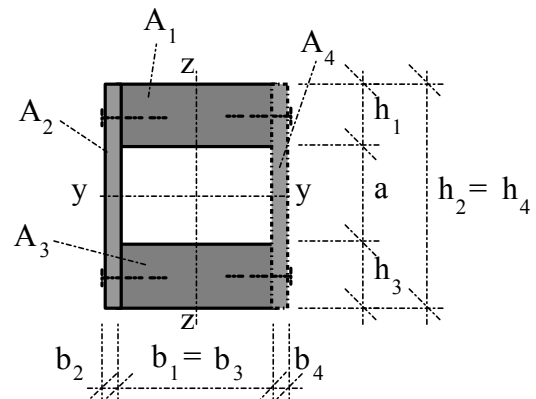
$$h_4 := 24 \cdot \text{cm} \quad b_4 := 2.6 \cdot \text{cm} \quad A_4 := h_4 \cdot b_4 \quad \Rightarrow \quad A_4 = 62.4 \text{ cm}^2$$

$$b := b_1 + b_2 + b_4 \quad \Rightarrow \quad b = 18.2 \text{ cm}$$

$$\text{für } i := 1..4 \quad A_{\text{ges}} := \sum_i A_i \quad \Rightarrow \quad A_{\text{ges}} = 228.8 \text{ cm}^2$$

$$E_{0.05} := 7400 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad = \text{E-Modul, parallel, 5\% Fraktile des Holzes [NAD, Tab. 3.2-1]}$$

$$E_{0.\text{mean}} := 11000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad = \text{E-Modul, parallel, 50\% Fraktile des Holzes [NAD, Tab. 3.2-1]}$$



$$E_1 := E_{0.\text{mean}} \quad E_2 := E_{0.\text{mean}} \quad E_3 := E_{0.\text{mean}} \quad E_4 := E_{0.\text{mean}}$$

Biegeachse y-y:

$$s := 6 \cdot \text{cm} \quad = \text{geschätzter Nagelabstand, zweireihig} \Rightarrow \quad s_1 := \frac{s}{2} \Rightarrow \quad s_1 = 3 \text{ cm}$$

$$d := 3.8 \cdot \text{mm} \quad = \text{Nageldurchmesser}$$

$$\rho_K := 380 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad = \text{Rohdichte für NH S10 [NAD, Tab.3.2-1]}$$

K_{ser} = Anfangsverschiebungsmodul einer Verbindung mit stiftförmigen Verbindungsmittel

$$K_{\text{ser}} := \left(\rho_K^{1.5} \cdot \frac{d^{0.8}}{25} \right) \quad \text{hier: Nägel ohne Vorbohrung}$$

$$K_i := \frac{2}{3} \cdot K_{\text{ser}} \Rightarrow K_i = 574.74 \frac{\text{N}}{\text{mm}} \quad \text{Verschiebungsmodul für Nachweis der Tragfähigkeit [ENV1995, 5.3.3a]}$$

$$\gamma_i = \text{Abminderungszahl} \quad \gamma_1 := \frac{1}{\pi^2 \cdot E_1 \cdot A_1 \cdot s_1 + \frac{K_i \cdot L^2}{1}} \Rightarrow \gamma_1 = 0.41 \quad \gamma_2 := 1 \quad \gamma_3 := \gamma_1 \quad \gamma_4 := 1$$

a_{z_i} = Abstand der Schwerachse des Gesamtquerschnitts zu denen der Einzelquerschnitte

$$a_{z1} := -10 \cdot \text{cm} \quad a_{z2} := 0 \cdot \text{cm} \quad a_{z3} := 10 \cdot \text{cm} \quad a_{z4} := 0 \cdot \text{cm}$$

$$I_{y_i} := \frac{b_i \cdot (h_i)^3}{12} \quad ef_Ely := \sum_i \left[E_i \cdot I_{y_i} + E_i \cdot \gamma_i \cdot A_i \cdot (a_{z_i})^2 \right] \quad [\text{ENV19955, B2}]$$

$$ef_Iy := \frac{ef_Ely}{E_{0.\text{mean}}} \Rightarrow ef_Iy = 1.04 \times 10^4 \text{ cm}^4$$

k_{mod} = Modifikationsfaktor für Vollholz [ENV1995, Tab. 3.1.7]

abhängig von der Nutzungsklasse, hier: 1
der Lasteinwirkungsdauer,

hier: ständig + kurz

(bei unterschiedlichen

Lasteinwirkungsdauern ist die kürzeste maßgebend)
und dem Material,

hier: Vollholz

$$k_{\text{mod}} := 0.90$$

γ_M = Teilsicherheitsfaktor für die Baustoffeigenschaften [ENV1995, Tab. 2.3.3.2]

abhängig vom Material,

hier: Holz $\Rightarrow \gamma_M := 1.3$

Spannungsnachweise:

Festigkeiten:

$$f_{1.t.k} := 14 \cdot \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad = \text{charakteristische Zugfestigkeit [NAD, Tab. 3.2-1]}$$

$$f_{1.c.k} := 21 \cdot \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad = \text{charakteristische Druckfestigkeit [NAD, Tab. 3.2-1]}$$

$$f_{m.k} := 24 \cdot \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad = \text{charakteristische Biegefestigkeit [NAD, Tab. 3.2-1]}$$

$$f_{1.t.d} := \frac{k_{\text{mod}}}{\gamma_M} \cdot f_{1.t.k} \Rightarrow f_{1.t.d} = 9.69 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad = \text{Bemessungswert der Zugfestigkeit}$$

$$f_{1.c.d} := \frac{k_{\text{mod}}}{\gamma_M} \cdot f_{1.c.k} \Rightarrow f_{1.c.d} = 14.54 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad = \text{Bemessungswert der Druckfestigkeit}$$

$$f_{m.d} := \frac{k_{mod}}{\gamma_M} \cdot f_{m.k} \quad \Rightarrow \quad f_{m.d} = 16.62 \frac{N}{mm^2} \quad = \text{ Bemessungswert der Biegefestigkeit}$$

$$f_{2.c.d} := f_{1.c.d}$$

$$f_{2.t.d} := f_{1.t.d}$$

in den Gurten:

Beanspruchungen

$$\sigma_{1.d} := \frac{\gamma_1 \cdot E_1 \cdot a_{z1} \cdot M_d}{e_{f_Ely}} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{1.d} = 4.27 \frac{N}{mm^2} \quad = \text{ Normalspannung im Schwerpunkt [ENV1995, B3a]}$$

$$\sigma_{m.1.d} := \frac{0.5 \cdot E_1 \cdot h_1 \cdot M_d}{e_{f_Ely}} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{m.1.d} = 2.1 \frac{N}{mm^2} \quad = \text{ maximale Randspannung [ENV1995, B3b]}$$

$$\sigma_{1.m.d} := \sigma_{1.d} + \sigma_{m.1.d}$$

Nachweise:

$$\frac{\sigma_{1.d}}{f_{1.c.d}} = 0.29 \quad < \quad 1$$

$$\frac{\sigma_{1.m.d}}{f_{m.d}} = 0.38 \quad < \quad 1$$

in den Stegen:

Beanspruchungen

$$\sigma_{2.d} := \frac{\gamma_2 \cdot E_2 \cdot a_{z2} \cdot M_d}{e_{f_Ely}} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{2.d} = 0 \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_{m.2.d} := \frac{0.5 \cdot E_2 \cdot h_2 \cdot M_d}{e_{f_Ely}} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{m.2.d} = 12.57 \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_{2.m.d} := \sigma_{2.d} + \sigma_{m.2.d}$$

Nachweise:

$$\frac{\sigma_{2.d}}{f_{2.c.d}} = 0 \quad < \quad 1$$

$$\frac{\sigma_{2.m.d}}{f_{m.d}} = 0.76 \quad < \quad 1$$

Nachweis der Schubspannungen

$$f_{2.v.k} := 2.5 \cdot \frac{N}{mm^2} \quad = \text{ charakteristische Schubfestigkeit [NAD, Tab. 3.2.-1]}$$

$$f_{2.v.d} := \frac{k_{mod}}{\gamma_M} \cdot f_{2.v.k} \quad \Rightarrow \quad f_{2.v.d} = 1.73 \frac{N}{mm^2} \quad = \text{ Bemessungswert der Schubfestigkeit}$$

$$\tau_{2.max.d} := \left[\gamma_3 \cdot E_3 \cdot A_3 \cdot a_{z3} + 0.5 \cdot E_2 \cdot (b_2 + b_4) \cdot \left(\frac{h_2}{2} \right)^2 \right] \cdot \frac{V_d}{(b_2 + b_4) \cdot e_{f_Ely}} \quad \Rightarrow \quad \tau_{2.max.d} = 1.05 \frac{N}{mm^2} \quad [\text{ENV1995, B4}]$$

Nachweis:

$$\frac{\tau_{2,max,d}}{f_{2,v,d}} = 0.61 < 1$$

Berechnung der Verbindungsmittel: Nä 38 x 100

$d := 3.8 \text{ mm}$ = Nageldurchmesser

$l_N := 100 \text{ mm}$ = Nagellänge

t_1 bei einschnittigen Verbindungen: Holzdicke auf der dem Nagelkopf zugewandten Seite [ENV1995, 6.3.1 (1)]

$t_1 := 2.6 \text{ cm}$

t_2 bei einschnittigen Verbindungen: Einschlagtiefe des Nagels abzüglich Nagelspitze [ENV1995, 6.3.1 (1)]

$l_{Na} := 2 \cdot d \Rightarrow l_{Na} = 0.76 \text{ cm}$ = Länge der Nagelspitze [BK92, T2, 5.2.2.1]

$t_2 := l_N - t_1 - l_{Na} \Rightarrow t_2 = 6.64 \text{ cm}$ [ENV1995, 6.3.1.2 (11)]

$f_{h,1,k}$ = Lochleibungsfestigkeit in t_1 [ENV1995, 6.3.1.2a]

hier: Holz- Holz/Nagel- verbindungen mit Nägeln $d < 8 \text{ mm}$, nicht vorgebohrt.

$f_{h,1,k} := 0.082 \cdot \rho_K \cdot d^{-0.3}$ [N/mm²] ρ_K in [kg/m³] d in [mm]

$$\Rightarrow f_{h,1,k} = 22.19 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$f_{h,1,d}$ = Bemessungswert der Lochleibungsfestigkeit in

t_1

$$f_{h,1,d} := \frac{k_{mod}}{\gamma_M} \cdot f_{h,1,k} \Rightarrow f_{h,1,d} = 15.36 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad [\text{ENV1995, 6.2.1 I}]$$

M_{yk} = charakteristisches Fließmoment des Nagels [ENV1995, 6.3.1.2c]
hier: runde Nägel

$\gamma_{M,St.}$ = Teilsicherheitsfaktor für die Baustoffeigenschaften [ENV1995, Tab. 2.3.3.2]
abhängig vom Material, hier: Stahl

$\gamma_{M,St.} := 1.1$

$$M_{yk} := 180 \cdot d^{2.6} \Rightarrow M_{yk} = 5.79 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{mm} \quad M_{yd} := \frac{M_{yk}}{\gamma_{M,St.}} \Rightarrow M_{yd} = 5.26 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$f_{h,2,d} := f_{h,1,d}$, da die Stege und die Gurte aus dem selben Material sind

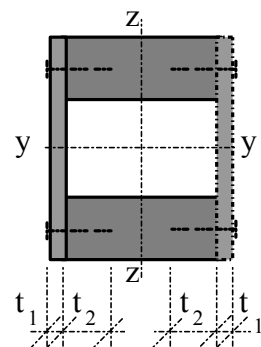
$$\beta := \frac{f_{h,2,d}}{f_{h,1,d}} \Rightarrow \beta = 1$$

Der Bemessungswert der Tragfähigkeit eines Verbindungsmittels einer einschnittigen Verbindung berechnet sich nach [ENV1995, 6.2.1 a-f] zu:

$$R_{d,a} := f_{h,1,d} \cdot t_1 \cdot d \Rightarrow R_{d,a} = 1.52 \times 10^3 \text{ N}$$

$$R_{d,b} := f_{h,2,d} \cdot t_2 \cdot d \cdot \beta \Rightarrow R_{d,b} = 3.88 \times 10^3 \text{ N}$$

$$R_{d,c} := \frac{f_{h,1,d} \cdot t_1 \cdot d}{1 + \beta} \cdot \left[\sqrt{\beta + 2 \cdot \beta^2 \cdot \left[1 + \frac{t_2}{t_1} + \left(\frac{t_2}{t_1} \right)^2 \right]} + \beta^3 \cdot \left(\frac{t_2}{t_1} \right)^2 - \beta \cdot \left(1 + \frac{t_2}{t_1} \right) \right] \Rightarrow R_{d,c} = 1.3 \times 10^3 \text{ N}$$



$$R_{d,d} := \frac{1.1 \cdot f_{h,1,d} \cdot d \cdot t_1 \cdot d}{2 + \beta} \cdot \left[\sqrt{2 \cdot \beta \cdot (1 + \beta) + \frac{4 \cdot \beta \cdot (2 + \beta) \cdot M_{yd}}{f_{h,1,d} \cdot d \cdot t_1^2}} - \beta \right] \Rightarrow R_{d,d} = 760.58 \text{ N}$$

$$R_{d,e} := \frac{1.1 \cdot f_{h,1,d} \cdot d \cdot t_2 \cdot d}{1 + 2 \cdot \beta} \cdot \left[\sqrt{2 \cdot \beta^2 \cdot (1 + \beta) + \frac{4 \cdot \beta \cdot (1 + 2 \cdot \beta) \cdot M_{yd}}{f_{h,1,d} \cdot d \cdot t_2^2}} - \beta \right] \Rightarrow R_{d,e} = 1.51 \times 10^3 \text{ N}$$

$$R_{d,f} := 1.1 \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{\beta}{1 + \beta}} \cdot \sqrt{2 \cdot M_{yd} \cdot f_{h,1,d} \cdot d} \Rightarrow R_{d,f} = 862.39 \text{ N}$$

damit ergibt sich: $R_{d,min} := \min((R_{d,a} \ R_{d,b} \ R_{d,c} \ R_{d,d} \ R_{d,e} \ R_{d,f})) \Rightarrow R_{d,min} = 760.58 \text{ N}$

F_{y_i} = größte Kraft auf einen Nagel in der Anschlußfuge [ENV1995, B 5]

$$F_{y_i} := \frac{\gamma_i \cdot E_i \cdot A_i \cdot a_{z1} \cdot s_1 \cdot V_d}{e f_{Ely}} \Rightarrow F_{y1} = 591.71 \text{ N}$$

Nachweis :

$$\frac{F_{y1}}{R_{d,min}} = 0.78 < 1 \Rightarrow \text{Nachweis erbracht}$$

Nachweis der Gebrauchsfähigkeit

$$g := 1.40 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad g_k := g \quad = \text{Charakteristischer Wert für ständige Einwirkungen}$$

$$s := 1.60 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad q_k := s \quad = \text{Charakteristischer Wert für nicht ständige Einwirkungen}$$

u_{inst} : elastische Anfangverformungen

u_{fin} : Endverformungen, wobei

$$u_{fin} = u_{inst} (1 + k_{def})$$

Bei Biegeträgern unterscheidet man die Durchbiegungsanteile

u_1 : Durchbiegung infolge ständiger Einwirkungen

u_2 : Durchbiegung infolge veränderlicher Einwirkungen

u_{net} : Gesamtdurchbiegung bezogen auf eine die Auflager verbindende Gerade

u_0 : Überhöhung (falls vorhanden) im lastfreien Zustand

hier: nur eine veränderliche Einwirkung, daher kein Kombinationsbeiwert

Bestimmung der Bauteildurchbiegung [ENV1995, 4]

k_{def} = Faktor zur Berücksichtigung des Kriechens und Schwindens [ENV1995, Tab. 4.1]
abhängig vom Material hier: Vollholz
der Nutzungsklasse hier: NK 1
und der Einwirkungsdauer hier: ständig + kurz

$k_{def,1} := 0.60$ für ständige Lasteinwirkungsdauer

$k_{def,2} := 0.0$ für kurze Lasteinwirkungsdauer

Biegeverformung:

$$u_{1,m} := \frac{5 \cdot g_k \cdot L^4}{384 \cdot E_{0,mean} \cdot e f_{ly}} \Rightarrow u_{1,m} = 0.66 \text{ cm} \quad \text{infolge ständ.Last, Biegeanteil (t=0)}$$

$$u_{2,m} := \frac{5 \cdot q_k \cdot L^4}{384 \cdot E_{0,mean} \cdot e f_{ly}} \Rightarrow u_{2,m} = 0.75 \text{ cm} \quad \text{infolge nichtständ.Last, Biegeanteil (t=0)}$$

Schubverformung:

$$A_v := \frac{A_2 + A_4}{1.2} \quad \text{für Rechteckquerschnitt}$$

$$u_{1.v} := \frac{g_k \cdot \frac{L^2}{8}}{G_{\text{mean}} \cdot A_v} \quad \Rightarrow \quad u_{1.v} = 0.05 \text{ cm} \quad \text{infolge ständ.Last, Schubanteil (t=0)}$$

$$u_{2.v} := \frac{q_k \cdot \left(\frac{L^2}{8} \right)}{G_{\text{mean}} \cdot A_v} \quad \Rightarrow \quad u_{2.v} = 0.06 \text{ cm} \quad \text{infolge nichtständ.Last, Schubanteil (t=0)}$$

$$u_{1.\text{inst}} := u_{1.m} + u_{1.v} \quad \Rightarrow \quad u_{1.\text{inst}} = 0.71 \text{ cm}$$

$$u_{2.\text{inst}} := u_{2.m} + u_{2.v} \quad \Rightarrow \quad u_{2.\text{inst}} = 0.81 \text{ cm}$$

$$u_{1.\text{fin}} := u_{1.\text{inst}} \cdot (1 + k_{\text{def.1}}) \quad \Rightarrow \quad u_{1.\text{fin}} = 1.13 \text{ cm} \quad \text{Enddurchbiegung infolge ständ. Last}$$

$$u_{2.\text{fin}} := u_{2.\text{inst}} \cdot (1 + k_{\text{def.2}}) \quad \Rightarrow \quad u_{2.\text{fin}} = 0.81 \text{ cm} \quad \text{Enddurchbiegung infolge nichtständ. Last}$$

$$u_{\text{net.fin}} := u_{1.\text{fin}} + u_{2.\text{fin}} \quad \Rightarrow \quad u_{\text{net.fin}} = 1.93 \text{ cm} \quad \text{Gesamtenddurchbiegung}$$

zulässige Durchbiegungen:

$$zul_{u_{2.\text{inst}}} := \frac{L}{300} \quad \Rightarrow \quad zul_{u_{2.\text{inst}}} = 1.5 \text{ cm} \quad [\text{ENV1995, 4.3.1 (2)}]$$

$$zul_{u_{2.\text{fin}}} := \frac{L}{200} \quad \Rightarrow \quad zul_{u_{2.\text{fin}}} = 2.25 \text{ cm} \quad [\text{ENV1995, 4.3.1 (3)}]$$

$$zul_{u_{\text{net.fin}}} := \frac{L}{200} \quad \Rightarrow \quad zul_{u_{\text{net.fin}}} = 2.25 \text{ cm} \quad [\text{ENV1995, 4.3.1 (3)}]$$

Nachweise:

$$\frac{u_{2.\text{inst}}}{zul_{u_{2.\text{inst}}}} = 0.54 \quad < 1 \quad \Rightarrow \text{Nachweis erbracht}$$

$$\frac{u_{2.\text{fin}}}{zul_{u_{2.\text{fin}}}} = 0.36 \quad < 1 \quad \Rightarrow \text{Nachweis erbracht}$$

$$\frac{u_{\text{net.fin}}}{zul_{u_{\text{net.fin}}}} = 0.86 \quad < 1 \quad \Rightarrow \text{Nachweis erbracht}$$

$\text{kN} \equiv 1000 \cdot \text{N}$
 $\text{MN} \equiv 1000 \cdot \text{kN}$

$$\rho_K := 380 \cdot \left(\frac{N}{\text{mm}} \right)^{\frac{1}{1.5}}$$
$$d := 3.8$$

$$b_1 := 13 \cdot \text{cm}$$

$$b_2 := 2.6 \cdot \text{cm}$$

$$b_3 := 13 \cdot \text{cm}$$

$$b_4 := 2.6 \cdot \text{cm}$$

$$h := 240$$

$$\rho_K := 380 \cdot \frac{N}{\text{mm}^2}$$

$$a_{z_1} := 10 \cdot \text{cm}$$

$$\begin{array}{ll} h_1 := 4 \cdot \text{cm} & h_3 := 4 \cdot \text{cm} \\ h_2 := 24 \cdot \text{cm} & h_4 := 24 \cdot \text{cm} \end{array}$$

$$\rho_K := 380 \cdot \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad d := 3.1$$

$$d := 3.8 \cdot (\text{N} \cdot \text{mm})^{\frac{1}{2.6}}$$

$$d := 3.8 \cdot \text{mm}$$

$$t_1 := 2.6 \cdot \text{cm}$$

$$t_2 := 6.64 \cdot \text{cm}$$

$$a_{z_1} := 10 \cdot \text{cm}$$