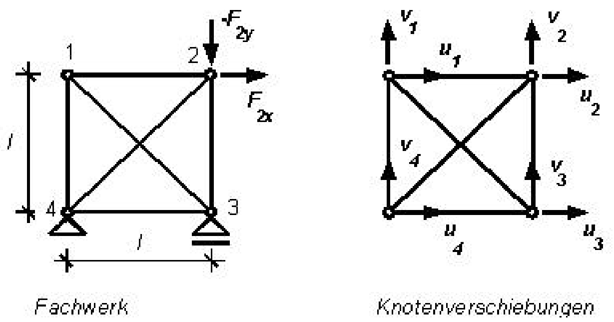
Lösung von Gleichungen - Lineare Gleichungssysteme

Beispiel: Fachwerk nach der Finite-Element-Methode



Systemkennwerte: $E := 2.1 \cdot 10^{8}$ $A := 0.004$ $l := 3$

$F_{2x} := 10$ $F_{2y} := -10$

Gleichungssystem:

Nach der Finite-Element-Methode erhält man folgendes symmetrisches Gleichungssystem mit den Knotenverschiebungen als Unbekannten:

$$K := \frac{E \cdot A}{l} \cdot \begin{pmatrix} 1.35355 & -0.35355 & -1 & 0 & -0.35355 \\ -0.35355 & 1.35355 & 0 & 0 & 0.35355 \\ -1 & 0 & 1.35355 & 0.35355 & 0 \\ 0 & 0 & 0.35355 & 1.35355 & 0 \\ -0.35355 & 0.35355 & 0 & 0 & 1.35355 \end{pmatrix} \qquad f := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 3.79 & -0.99 & -2.8 & 0 & -0.99 \\ -0.99 & 3.79 & 0 & 0 & 0.99 \\ -2.8 & 0 & 3.79 & 0.99 & 0 \\ 0 & 0 & 0.99 & 3.79 & 0 \\ -0.99 & 0.99 & 0 & 0 & 3.79 \end{pmatrix} 10^{5} \qquad f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung durch Matrizeninversion

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \end{pmatrix} := K^{-1} \cdot f \qquad \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.862 \\ 0.179 \\ 1.041 \\ -0.536 \\ 0.179 \end{pmatrix} 10^{-4}$$

Lösung mit der Funktion llösen:

$u := \text{llösen}(K, f) \qquad u = \begin{pmatrix} 0.862 \\ 0.179 \\ 1.041 \\ -0.536 \\ 0.179 \end{pmatrix} 10^{-4}$

Lösung mit Cholesky-Verfahren:

Dreieckzerlegung: $L_S := \text{cholesky}(K)$

$$L_S = \begin{pmatrix} 615.625 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -160.802 & 594.253 & 0 & 0 & 0 \\ -454.822 & -123.073 & 396.212 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 249.851 & 562.644 & 0 \\ -160.802 & 123.073 & -146.36 & 64.994 & 558.878 \end{pmatrix}$$

Vorwärtseinsetzen: $y := \text{llösen}(L_S, f)$

Rückwärtseinsetzen: $u := \text{llösen}\left(L_S^{T}, y\right)$

$$u = \begin{pmatrix} 0.862 \\ 0.179 \\ 1.041 \\ -0.536 \\ 0.179 \end{pmatrix} 10^{-4}$$
