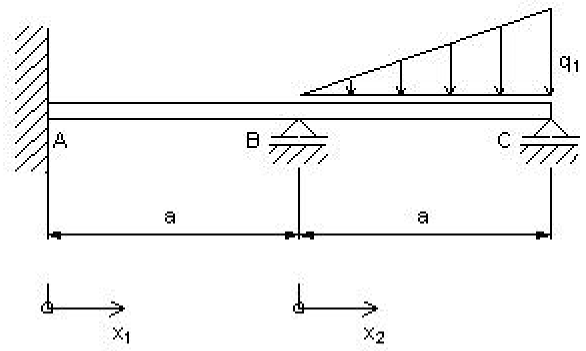
Extremwertaufgabe

Beispiel: Berechnung der Stellen mit maximaler Durchbiegung der Biegelinie eines Zweifeldträgers (vgl. [4-6])

Die Biegelinie des zweifach statisch unbestimmt gelagerten Trägers der Länge l = 2a



ist gegeben durch die Gleichungen

$$w_1(x_1, a, E, I, q_1) := \frac{q_1 \cdot a^4}{120 \cdot E \cdot I} \cdot \left[\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 \cdot \left(\frac{x_1}{a} - 1\right)\right] \qquad 0 \le x_1 \le a$$

$$w_2(x_2, a, E, I, q_1) := \frac{q_1 \cdot a^4}{120 \cdot E \cdot I} \cdot \left(\frac{x_2}{a}\right) \cdot \left[\left(\frac{x_2}{a}\right)^4 - 4 \cdot \left(\frac{x_2}{a}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{x_2}{a}\right) + 1\right] \qquad 0 \le x_2 \le a$$

Zunächst wird versucht, die Stellen mit maximaler Durchbiegung symbolisch zu berechnen. Dazu werden die ersten beiden Ableitungen der Funktionen w_1 und w_2 benötigt.

$$\frac{d}{dx_1} w_1(x_1, a, E, I, q_1) \text{ vereinfachen } \rightarrow \frac{-1}{120} \cdot q_1 \cdot a \cdot x_1 \cdot \frac{(-3 \cdot x_1 + 2 \cdot a)}{E \cdot I}$$

$$\frac{d}{dx_2} w_2(x_2, a, E, I, q_1) \text{ vereinfachen } \rightarrow \frac{1}{120} \cdot \frac{q_1}{a} \cdot \frac{\left(5 \cdot x_2^4 - 12 \cdot x_2^2 \cdot a^2 + 4 \cdot x_2 \cdot a^3 + a^4\right)}{E \cdot I}$$

$$\frac{d^2}{dx_1^2} w_1(x_1, a, E, I, q_1) \text{ vereinfachen } \rightarrow \frac{-1}{60} \cdot q_1 \cdot a \cdot \frac{(-3 \cdot x_1 + a)}{E \cdot I}$$

$$\frac{d^2}{dx_2^2} w_2(x_2, a, E, I, q_1) \text{ vereinfachen } \rightarrow \frac{1}{30} \cdot \frac{q_1}{a} \cdot \frac{\left(5 \cdot x_2^3 - 6 \cdot x_2 \cdot a^2 + a^3\right)}{E \cdot I}$$

Notwendige Bedingung für ein Extremum:

Vorgabe

$$\frac{d}{dx_1} w_1(x_1, a, E, I, q_1) = 0$$

$$\text{suchen}(x_1) \rightarrow \left(0 \quad \frac{2}{3} \cdot a\right)$$

Während die Nullstellen der ersten Ableitung von w_1 symbolisch ermittelt werden, kann Mathcad die Nullstellen der ersten Ableitung von w_2 nur numerisch berechnen. Da w_2 ein Polynom ist, bietet sich die Funktion *nullstellen()* an, die keine Startwerte benötigt. Mithilfe des Schlüsselwortes koeff wird ein Vektor erzeugt, der die Koeffizienten des Polynoms enthält. Für den Parameter a muss jedoch ein Wert angegeben werden:

$$w_{2\_hilf}(x_2, a) := 5 \cdot x_2^4 - 12 \cdot x_2^2 \cdot a^2 + 4 \cdot x_2 \cdot a^3 + a^4$$

$$v(a) := w_{2\_hilf}(x_2, a) \text{ koeff}, x_2 \rightarrow \begin{pmatrix} a^4 \\ 4 \cdot a^3 \\ -12 \cdot a^2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$a := 1\text{m}$

$$v\_lös(a) := \text{nullstellen}(v(a)) \qquad v\_lös\left(\frac{a}{m}\right) = \begin{pmatrix} -1.68 \\ -0.17 \\ 0.55 \\ 1.29 \end{pmatrix}$$

Wegen $0 \le x_2 \le a$ ist nur $v\_lös\left(\frac{a}{m}\right)_2 = 0.55$ relevant.

Hinreichende Bedingung für ein Extremum:

$$w_{1\_2}(x_1, a, E, I, q_1) := \frac{d^2}{dx_1^2} w_1(x_1, a, E, I, q_1)$$

$$w_{1\_2}(0, a, E, I, q_1) \rightarrow \frac{-1}{60} \cdot q_1 \cdot \frac{m^2}{E \cdot I} \qquad \text{(Maximum)}$$

$$w_{1\_2}\left(\frac{2}{3} \cdot a, a, E, I, q_1\right) \rightarrow \frac{1}{60} \cdot q_1 \cdot \frac{m^2}{E \cdot I} \qquad \text{(Minimum)}$$

$$w_{2\_2}(x_2, a, E, I, q_1) := \frac{d^2}{dx_2^2} w_2(x_2, a, E, I, q_1)$$

$$w_{2\_2}(0.555\text{m}, a, E, I, q_1) \text{ vereinfachen } \rightarrow -4.9174354166666666667 \cdot 10^{-2} \cdot q_1 \cdot \frac{m^2}{E \cdot I} \qquad \text{(Maximum)}$$

Die Berechnung der Extrema gestaltet sich weniger aufwendig, wenn die Numerikfunktionen *minimieren()* und *maximieren()* verwendet werden. Die Funktionen werden analog zu der Funktion *suchen()* innerhalb eines Lösungsblockes aufgerufen, der durch das Wort Vorgabe eingeleitet wird. Für x_1 bzw. x_2 sind Schätzwerte vorzugeben.

$$w_{1\_spez}(x_1) := \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 \cdot \left(\frac{x_1}{a} - 1\right)$$

$$x_1 := \frac{a}{2}$$

Vorgabe

$x_1 \geq 0$ $\quad$ $x_1 \leq a$

$\text{maximieren}(w_{1\_spez}, x_1) = 0.00\,m$

$$w_{2\_spez}(x_2) := \left(\frac{x_2}{a}\right) \cdot \left[\left(\frac{x_2}{a}\right)^4 - 4\cdot\left(\frac{x_2}{a}\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{x_2}{a}\right) + 1\right]$$

$$x_2 := \frac{a}{2}$$

Vorgabe

$x_2 \geq 0$ $\quad$ $x_2 \leq a$

$\text{maximieren}(w_{2\_spez}, x_2) = 0.55\,m$

Da die Durchbiegung in den Randpunkten gleich Null ist, ist nur das Maximum im Inneren des Intervalls [0 , 2a] von Interesse. Die maximale Durchbiegung wird also an der Stelle x_{2_max}

$x_{2\_max} := v\_lös(a)_2\, m$ $\qquad$ $w_2(0.555m, a, E, I, q_1) \rightarrow 4.4991047278906250000\cdot 10^{-3} \cdot q_1 \cdot \frac{m^4}{E \cdot I}$

im Intervall (a , 2a) erreicht.

Für $\quad KN := 1000N$

$E := 2.1\cdot 10^5 \frac{N}{mm^2}$ $\qquad$ $I := 1940cm^4$ $\qquad$ $q_1 := 100000KN$

ergibt sich:

$x_1 := 0, 0.0001m .. a$ $\qquad$ $x_2 := a, a + 0.0001m .. 2a$