Übertragungsmatrizenverfahren

Matrizen und Operationen

ORIGIN := 1

ABSCHNITT

$$A(l, EI) := \begin{pmatrix} 1 & l & -\frac{l^2}{2\cdot EI} & -\frac{l^3}{6\cdot EI} \\ 0 & 1 & -\frac{l}{EI} & -\frac{l^2}{2\cdot EI} \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_q(q_l, q_r, l, EI) := \begin{bmatrix} \frac{(4\cdot q_l + q_r)\cdot l^4}{120\cdot EI} \\ \frac{(3\cdot q_l + q_r)\cdot l^3}{24\cdot EI} \\ \frac{-(2\cdot q_l + q_r)\cdot l^2}{6} \\ \frac{-(q_l + q_r)\cdot l}{2} \end{bmatrix} \qquad L_{null} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

PUNKT

$$P(k_w, k_\phi) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -k_\phi & 1 & 0 \\ k_w & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_F(F, M) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -M \\ -F \end{pmatrix}$$

ÜBERTRAGUNG

$$Z_r(ÜB\_MATRIX, Z_l) := ÜB\_MATRIX\cdot Z_l$$

$$L_r(ÜB\_MATRIX, LA\_VEKTOR, L_l) := ÜB\_MATRIX\cdot L_l + LA\_VEKTOR$$

ANFANGSVEKTOREN

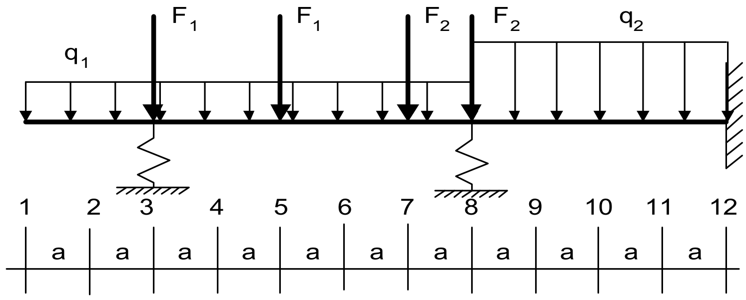
$$Z_{frei} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Z_{gelenk} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Z_{einspann} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

LÖSUNG

$$UNBEK\_LI(Z_{ende}, Z, L) := \text{submatrix}\left[\text{erweitern}(Z, -Z_{ende})^{-1}\cdot(-L), 1, 2, 1, 1\right]$$

$$UNBEK\_RE(Z_{ende}, Z, L) := \text{submatrix}\left[\text{erweitern}(Z, -Z_{ende})^{-1}\cdot(-L), 3, 4, 1, 1\right]$$

Beispiel



$a := 1$ $E := 1$ $I := 1$ $q_1 := 4$ $F_1 := 20$

$k_w := 3$ $q_2 := 8$ $F_2 := 50$

Übertragungsmatrizen:

Abschnitt mit Länge a:

$A_a := A(a, I)$ $\quad L_{a1} := L_q(q_1, q_1, a, E\cdot I)$ $\quad L_{a2} := L_q(q_2, q_2, a, E\cdot I)$

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -0.5 & -0.167 \\ 0 & 1 & -1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_{a1} = \begin{pmatrix} 0.167 \\ 0.667 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \quad L_{a2} = \begin{pmatrix} 0.333 \\ 1.333 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Punkt mit Feder und Punkte mit Einzellasten:

$Fed := P(k_w, 0)$ $\quad L_{F1} := P_F(F_1, 0)$ $\quad L_{F2} := P_F(F_2, 0)$

$$Fed = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_{F1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix} \quad L_{F2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -50 \end{pmatrix}$$

Erste Übertragung mit Unbekannten im Zustandsvektor

Anfangsvektor

$$Z_1 := Z_{frei} \qquad Z_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Übertragung

$Z_2 := A_a \cdot Z_1$ $\quad L_2 := L_{a1}$

$Z_3 := A_a \cdot Z_2$ $\quad L_3 := A_a \cdot L_2 + L_{a1}$

$Z_{3re} := Fed \cdot Z_3$ $\quad$ $L_{3re} := Fed \cdot L_3 + L_{F1}$

$Z_4 := A_a \cdot Z_{3re}$ $\quad$ $L_4 := A_a \cdot L_{3re} + L_{a1}$

$Z_5 := A_a \cdot Z_4$ $\quad$ $L_5 := A_a \cdot L_4 + L_{a1}$

$Z_{5re} := Z_5$ $\quad$ $L_{5re} := L_5 + L_{F1}$

$Z_6 := A_a \cdot Z_{5re}$ $\quad$ $L_6 := A_a \cdot L_{5re} + L_{a1}$

$Z_7 := A_a \cdot Z_6$ $\quad$ $L_7 := A_a \cdot L_6 + L_{a1}$

$Z_{7re} := Z_7$ $\quad$ $L_{7re} := L_7 + L_{F2}$

$Z_8 := A_a \cdot Z_{7re}$ $\quad$ $L_8 := A_a \cdot L_{7re} + L_{a1}$

$Z_{8re} := Fed \cdot Z_8$ $\quad$ $L_{8re} := Fed \cdot L_8 + L_{F2}$

$Z_9 := A_a \cdot Z_{8re}$ $\quad$ $L_9 := A_a \cdot L_{8re} + L_{a2}$

$Z_{10} := A_a \cdot Z_9$ $\quad$ $L_{10} := A_a \cdot L_9 + L_{a2}$

$Z_{11} := A_a \cdot Z_{10}$ $\quad$ $L_{11} := A_a \cdot L_{10} + L_{a2}$

$Z_{12} := A_a \cdot Z_{11}$ $\quad$ $L_{12} := A_a \cdot L_{11} + L_{a2}$

Rechter Rand

$X := \mathrm{UNBEK\_LI}(Z_{einspann}, Z_{12}, L_{12})$ $\quad$ $X = \begin{pmatrix} -86.985 \\ 51.295 \end{pmatrix}$ $\quad$ $eps := 10^{-5}$

$$\mathrm{UNBEK\_RE}(Z_{einspann}, Z_{12}, L_{12}) = \begin{pmatrix} -7.525 \\ -9.4 \end{pmatrix}$$

Zweite Übertragung mit bekanntem Zustandsvektor

Anfangsvektor

$Z_1 := Z_{frei} \cdot X$ $\quad$ $Z_1 = \begin{pmatrix} -86.985 \\ 51.295 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Übertragung

$Z_2 := A_a \cdot Z_1 + L_{a1}$ $\quad$ $Z_2 = \begin{pmatrix} -35.523 \\ 51.962 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

$Z_3 := A_a \cdot Z_2 + L_{a1}$

$Z_{3re} := Fed \cdot Z_3 + L_{F1}$ $\quad Z_3 = \begin{pmatrix} 18.272 \\ 56.628 \\ -8 \\ -8 \end{pmatrix} \quad Z_{3re} = \begin{pmatrix} 18.272 \\ 56.628 \\ -8 \\ 26.815 \end{pmatrix}$

$Z_4 := A_a \cdot Z_{3re} + L_{a1}$ $\quad Z_4 = \begin{pmatrix} 74.598 \\ 51.887 \\ 16.815 \\ 22.815 \end{pmatrix}$

$Z_5 := A_a \cdot Z_4 + L_{a1} \qquad Z_{5re} := Z_5 + L_{F1}$ $\quad Z_5 = \begin{pmatrix} 114.442 \\ 24.331 \\ 37.631 \\ 18.815 \end{pmatrix} \quad Z_{5re} = \begin{pmatrix} 114.442 \\ 24.331 \\ 37.631 \\ -1.185 \end{pmatrix}$

$Z_6 := A_a \cdot Z_{5re} + L_{a1}$ $\quad Z_6 = \begin{pmatrix} 120.321 \\ -12.041 \\ 34.446 \\ -5.185 \end{pmatrix}$

$Z_7 := A_a \cdot Z_6 + L_{a1} \qquad Z_{7re} := Z_7 + L_{F2}$ $\quad Z_7 = \begin{pmatrix} 92.089 \\ -43.227 \\ 27.261 \\ -9.185 \end{pmatrix} \quad Z_{7re} = \begin{pmatrix} 92.089 \\ -43.227 \\ 27.261 \\ -59.185 \end{pmatrix}$

$Z_8 := A_a \cdot Z_{7re} + L_{a1}$

$Z_{8re} := Fed \cdot Z_8 + L_{F2}$ $\quad Z_8 = \begin{pmatrix} 45.261 \\ -40.23 \\ -33.923 \\ -63.185 \end{pmatrix} \quad Z_{8re} = \begin{pmatrix} 45.261 \\ -40.23 \\ -33.923 \\ 22.6 \end{pmatrix}$

$Z_9 := A_a \cdot Z_{8re} + L_{a2}$ $\quad Z_9 = \begin{pmatrix} 18.56 \\ -16.273 \\ -15.324 \\ 14.6 \end{pmatrix}$

$Z_{10} := A_a \cdot Z_9 + L_{a2}$ $\quad Z_{10} = \begin{pmatrix} 7.849 \\ -6.916 \\ -4.724 \\ 6.6 \end{pmatrix}$

$Z_{11} := A_a \cdot Z_{10} + L_{a2}$ $\quad Z_{11} = \begin{pmatrix} 2.53 \\ -4.16 \\ -2.12 \\ -1.4 \end{pmatrix}$

$Z_{12} := A_a \cdot Z_{11} + L_{a2}$

$$Z_{12} = \begin{pmatrix} -6.459 \times 10^{-11} \\ -5.295 \times 10^{-11} \\ -7.525 \\ -9.4 \end{pmatrix}$$

Grafische Darstellung der Ergebnisse