FEM-Berechnung einer rechteckförmigen Scheibe

$ORIGIN := 1$

Länge in x-Richtung: $l_x := 13$ Anzahl der Elemente in x-Richtung: $n_x := 4$

Länge in y-Richtung: $l_y := 10$ Anzahl der Elemente in y-Richtung: $n_y := 4$

Anzahl der Elemente: $n_{el} := n_x \cdot n_y$ $n_{el} = 16$

Anzahl der Knotenpunkte: $n_{kn} := (n_x + 1)\cdot(n_y + 1)$ $n_{kn} = 25$

FE-Netzgenerierung

Freiheitsgrade je Knotenpunkt: $nfk := 2$

$$N_{kn}(i,j) := \begin{cases} j + 1 & \text{if } i = 2 \\ \left(\dfrac{l_y}{n_y}\cdot \operatorname{trunc}\left(\dfrac{j}{n_x + 1}\right)\right) & \text{if } i = 1 \\ \left[\dfrac{l_x}{n_x}\cdot\left[j - \left[\operatorname{trunc}\left[\dfrac{j}{(n_x+1)}\right]\right]\cdot(n_x + 1)\right]\right] & \text{if } i = 0 \end{cases}$$

<u>Knotenpunktskoordinaten:</u> $Knoten := matrix(3, n_{kn}, N_{kn})$

x-Koordinate:
y-Koordiante:
Nummer:

$$Knoten = \begin{pmatrix} 0 & 3.25 & 6.5 & 9.75 & 13 & 0 & 3.25 & 6.5 & 9.75 & 13 & 0 & 3.25 & 6.5 & 9.75 & 13 & 0 & 3.25 & 6.5 & 9.75 & 13 & 0 & 3.25 & 6.5 & 9.75 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.5 & 2.5 & 2.5 & 2.5 & 2.5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 7.5 & 7.5 & 7.5 & 7.5 & 7.5 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{pmatrix}$$

$$N_{el}(i,j) := \begin{cases} \mathrm{trunc}\left[\dfrac{i}{(n_x)}\right] + i + 1 & \text{if } j = 0 \\ \left[\mathrm{trunc}\left[\dfrac{i}{(n_x)}\right] + i + 2\right] & \text{if } j = 1 \\ \left[\mathrm{trunc}\left[\dfrac{i}{(n_x)}\right] + i + 3 + n_x\right] & \text{if } j = 2 \\ \left[\mathrm{trunc}\left[\dfrac{i}{(n_x)}\right] + i + 2 + n_x\right] & \text{if } j = 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Elementtopologie: $Top := \mathrm{matrix}(n_{el}, 4, N_{el})$

$$Top^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 7 & 8 & 9 & 11 & 12 & 13 & 14 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & 8 & 9 & 10 & 12 & 13 & 14 & 15 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 12 & 13 & 14 & 15 & 17 & 18 & 19 & 20 & 22 & 23 & 24 & 25 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 11 & 12 & 13 & 14 & 16 & 17 & 18 & 19 & 21 & 22 & 23 & 24 \end{pmatrix}$$

Elementeigenschaften

Elastizitätsmodul : $E := 3 \cdot 10^7$ Querdehnzahl: $\nu := 0$

Dicke der Wandscheibe: $t := 0.5$

Material-nummer	Elastizitäts-modul	Platten-dicke	Querdehn-zahl

$$material := (1 \quad E \quad t \quad \nu)$$

Zuordnung der Elementeigenschaften zu den Elementen:

Materialnummern aller Elemente

$N_{ei}(i,j) := 1$ $\qquad$ $matnr := matrix(n_{el}, 1, N_{ei})$

$matnr^T = (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1)$

$iel := 1 .. n_{el}$

$Em(iel) := material_{matnr_{iel}, 2}$ $\qquad$ $t(iel) := material_{matnr_{iel}, 3}$

$mue(iel) := material_{matnr_{iel}, 4}$

<u>Festhaltungen:</u>

Knoten Flag-x Flag-y

$$Fest := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ n_x + 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Fest = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Flag-Werte:
1 - festgehaltener Freiheitsgrad
0 - frei

Knotenummern müssen in aufsteigender Reihenfolge sein!!!

<u>Plot des Elementnetzes</u> $\qquad$ $fak\_max := 0.05$

$$N_{x\_el}(i,j) := \left| \begin{array}{l} i\_el \leftarrow \mathrm{trunc}\left(\frac{i+1}{6}\right)+1 \\ \text{if } \; i\_el \neq (n_{el}+1) \\ \quad \left| \begin{array}{ll} -10^{12} & \text{if } \left(\mathrm{trunc}\left(\frac{i+1}{6}\right) = \frac{i+1}{6}\right) \\ Knoten_{1,Top_{i\_el,1}} & \text{if } \; i = (i\_el-1)\cdot 6+4 \\ Knoten_{1,Top_{i\_el,\,i-(i\_el-1)\cdot 6+1}} & \text{otherwise} \\ \text{return } -10^{12} \text{ if } [(Em(i\_el) = 0) + (t(i\_el) = 0)] & \end{array} \right. \\ -10^{12} \quad \text{otherwise} \end{array} \right.$$

$$N_{y\_el}(i,j) := \left| \begin{array}{l} i\_el \leftarrow \mathrm{trunc}\left(\frac{i+1}{6}\right)+1 \\ \text{if } \; i\_el \neq (n_{el}+1) \\ \quad \left| \begin{array}{ll} -10^{12} & \text{if } \left(\mathrm{trunc}\left(\frac{i+1}{6}\right) = \frac{i+1}{6}\right) \\ Knoten_{2,Top_{i\_el,1}} & \text{if } \; i = (i\_el-1)\cdot 6+4 \\ Knoten_{2,Top_{i\_el,\,i-(i\_el-1)\cdot 6+1}} & \text{otherwise} \\ \text{return } -10^{12} \text{ if } [(Em(i\_el) = 0) + (t(i\_el) = 0)] & \end{array} \right. \\ -10^{12} \quad \text{otherwise} \end{array} \right.$$

$$x_{el} := \mathrm{matrix}(6\cdot n_{el}, 1, N_{x\_el}) \qquad y_{el} := \mathrm{matrix}(6\cdot n_{el}, 1, N_{y\_el})$$

$$x_{nm} := \left(Knoten^T\right)^{\langle 1\rangle} \qquad y_{nm} := \left(Knoten^T\right)^{\langle 2\rangle}$$

$$\begin{pmatrix} x_{max} & x_{min} \\ y_{max} & y_{min} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \max(x_{nm}) & \min(x_{nm}) \\ \max(y_{nm}) & \min(y_{nm}) \end{pmatrix}$$

$$max\_tot := \max\left(\left(|x_{max}| \;\; |y_{max}| \;\; |x_{min}| \;\; |y_{min}|\right)\right)$$

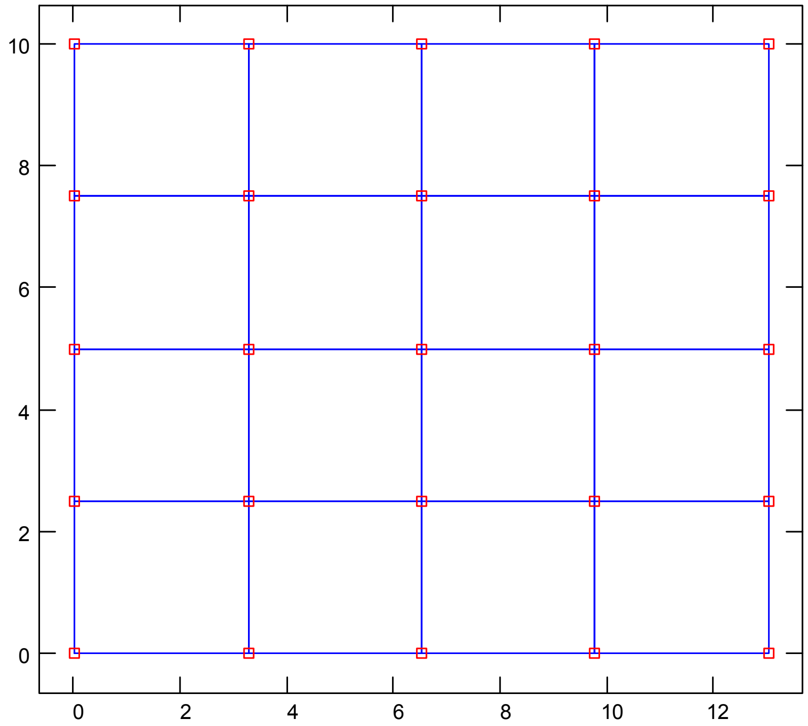
$$x_{max} := x_{max} + fak\_max\cdot max\_tot$$

$$y_{max} := y_{max} + fak\_max\cdot max\_tot$$

$$x_{min} := x_{min} - fak\_max\cdot max\_tot$$

$$y_{min} := y_{min} - fak\_max\cdot max\_tot$$

Schleife über Knoten: $ik := 1, 2 .. n_{kn}$ Schleife über Elemente: $ie := 1, 2 .. 6 \cdot n_{el}$



Punktkoordinaten:

$$x_{nm}^{T} = (0\ \ 3.25\ \ 6.5\ \ 9.75\ \ 13\ \ 0\ \ 3.25\ \ 6.5\ \ 9.75\ \ 13\ \ 0\ \ 3.25\ \ 6.5\ \ 9.75\ \ 13\ \ 0\ \ 3.25\ \ 6.5\ \ 9.75\ \ 13\ \ 0\ \ 3.25\ \ 6.5\ \ 9.75\ \ 13)$$

$$y_{nm}^{T} = (0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 2.5\ \ 2.5\ \ 2.5\ \ 2.5\ \ 2.5\ \ 5\ \ 5\ \ 5\ \ 5\ \ 5\ \ 7.5\ \ 7.5\ \ 7.5\ \ 7.5\ \ 7.5\ \ 10\ \ 10\ \ 10\ \ 10\ \ 10)$$

Knotenlasten

Linienlast am oberen Rand: $w := -1000$

$$N_{last}(i,j) := \begin{cases} (n_x + 1)\cdot(n_y) + i + 1 & \text{if } j = 0 \\ 0 & \text{if } j = 1 \\ \dfrac{w \cdot l_x}{2 \cdot n_x} & \text{if } \left[(j = 2)\cdot(i = 0) + (j = 2)\cdot(i = n_x)\right] \\ \dfrac{w \cdot l_x}{n_x} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$Lasten := matrix(n_x + 1, 3, N_{last})$$

LastenT:
- Knotennr
- Fx
- Fy

$$Lasten^T = \begin{pmatrix} 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.625\times 10^3 & -3.25\times 10^3 & -3.25\times 10^3 & -3.25\times 10^3 & -1.625\times 10^3 \end{pmatrix}$$

Elementsteifigkeitsmatrizen

Elementsteifigkeitsmatrix des QUAD4-Scheibenelements (Finites Rechteckelement)

$k_{11}(a,b,\mu) := 4\cdot\frac{b}{a} + 2\cdot(1-\mu)\cdot\frac{a}{b}$ $\quad$ $k_{33}(a,b,\mu) := k_{11}(a,b,\mu)$

$k_{55}(a,b,\mu) := k_{11}(a,b,\mu)$ $\quad$ $k_{77}(a,b,\mu) := k_{11}(a,b,\mu)$

$k_{22}(a,b,\mu) := 4\cdot\frac{a}{b} + 2\cdot(1-\mu)\cdot\frac{b}{a}$ $\quad$ $k_{44}(a,b,\mu) := k_{22}(a,b,\mu)$

$k_{66}(a,b,\mu) := k_{22}(a,b,\mu)$ $\quad$ $k_{88}(a,b,\mu) := k_{22}(a,b,\mu)$

$k_{12}(a,b,\mu) := \frac{3}{2}\cdot(1+\mu)$ $\quad$ $k_{47}(a,b,\mu) := k_{12}(a,b,\mu)$

$k_{38}(a,b,\mu) := k_{12}(a,b,\mu)$ $\quad$ $k_{56}(a,b,\mu) := k_{12}(a,b,\mu)$

$k_{13}(a,b,\mu) := -4\cdot\frac{b}{a} + (1-\mu)\cdot\frac{a}{b}$ $\quad$ $k_{57}(a,b,\mu) := k_{13}(a,b,\mu)$

$k_{14}(a,b,\mu) := -\frac{3}{2}\cdot(1-3\cdot\mu)$ $\quad$ $k_{27}(a,b,\mu) := k_{14}(a,b,\mu)$

$k_{58}(a,b,\mu) := k_{14}(a,b,\mu)$ $\quad$ $k_{36}(a,b,\mu) := k_{14}(a,b,\mu)$

$k_{15}(a,b,\mu) := -2\cdot\frac{b}{a} - (1-\mu)\cdot\frac{a}{b}$ $\quad$ $k_{37}(a,b,\mu) := k_{15}(a,b,\mu)$

$k_{16}(a,b,\mu) := \frac{-3}{2}(1+\mu)$ $\quad$ $k_{25}(a,b,\mu) := k_{16}(a,b,\mu)$

$k_{78}(a,b,\mu) := k_{16}(a,b,\mu)$ $\qquad$ $k_{34}(a,b,\mu) := k_{16}(a,b,\mu)$

$k_{17}(a,b,\mu) := 2\cdot\frac{b}{a} - 2\cdot(1-\mu)\cdot\frac{a}{b}$ $\qquad$ $k_{35}(a,b,\mu) := k_{17}(a,b,\mu)$

$k_{18}(a,b,\mu) := \frac{3}{2}\cdot(1-3\cdot\mu)$ $\qquad$ $k_{23}(a,b,\mu) := k_{18}(a,b,\mu)$

$k_{67}(a,b,\mu) := k_{18}(a,b,\mu)$ $\qquad$ $k_{45}(a,b,\mu) := k_{18}(a,b,\mu)$

$k_{24}(a,b,\mu) := 2\cdot\frac{a}{b} - 2\cdot(1-\mu)\cdot\frac{b}{a}$ $\qquad$ $k_{68}(a,b,\mu) := k_{24}(a,b,\mu)$

$k_{26}(a,b,\mu) := -2\cdot\frac{a}{b} - (1-\mu)\cdot\frac{b}{a}$ $\qquad$ $k_{48}(a,b,\mu) := k_{26}(a,b,\mu)$

$k_{28}(a,b,\mu) := -4\cdot\frac{a}{b} + (1-\mu)\cdot\frac{b}{a}$ $\qquad$ $k_{46}(a,b,\mu) := k_{28}(a,b,\mu)$

$k_{66}(a,b,\mu) := k_{22}(a,b,\mu)$ $\qquad$ $N_{Null}(i,j) := 0$

$$K_{quad}(a,b,t,E,\mu) := \left| \begin{array}{ll} \text{matrix}(8,8,N_{Null}) & \text{if } [(t=0)+(E=0)] \\ \dfrac{E\cdot t}{12\cdot\left(1-\mu^2\right)}\cdot\begin{pmatrix} k_{11}(a,b,\mu) & k_{12}(a,b,\mu) & k_{13}(a,b,\mu) & k_{14}(a,b,\mu) & k_{15}(a,b,\mu) & k_{16}(a,b,\mu) & k_{17}(a,b,\mu) & k_{18}(a,b,\mu) \\ k_{12}(a,b,\mu) & k_{22}(a,b,\mu) & k_{23}(a,b,\mu) & k_{24}(a,b,\mu) & k_{25}(a,b,\mu) & k_{26}(a,b,\mu) & k_{27}(a,b,\mu) & k_{28}(a,b,\mu) \\ k_{13}(a,b,\mu) & k_{23}(a,b,\mu) & k_{33}(a,b,\mu) & k_{34}(a,b,\mu) & k_{35}(a,b,\mu) & k_{36}(a,b,\mu) & k_{37}(a,b,\mu) & k_{38}(a,b,\mu) \\ k_{14}(a,b,\mu) & k_{24}(a,b,\mu) & k_{34}(a,b,\mu) & k_{44}(a,b,\mu) & k_{45}(a,b,\mu) & k_{46}(a,b,\mu) & k_{47}(a,b,\mu) & k_{48}(a,b,\mu) \\ k_{15}(a,b,\mu) & k_{25}(a,b,\mu) & k_{35}(a,b,\mu) & k_{45}(a,b,\mu) & k_{55}(a,b,\mu) & k_{56}(a,b,\mu) & k_{57}(a,b,\mu) & k_{58}(a,b,\mu) \\ k_{16}(a,b,\mu) & k_{26}(a,b,\mu) & k_{36}(a,b,\mu) & k_{46}(a,b,\mu) & k_{56}(a,b,\mu) & k_{66}(a,b,\mu) & k_{67}(a,b,\mu) & k_{68}(a,b,\mu) \\ k_{17}(a,b,\mu) & k_{27}(a,b,\mu) & k_{37}(a,b,\mu) & k_{47}(a,b,\mu) & k_{57}(a,b,\mu) & k_{67}(a,b,\mu) & k_{77}(a,b,\mu) & k_{78}(a,b,\mu) \\ k_{18}(a,b,\mu) & k_{28}(a,b,\mu) & k_{38}(a,b,\mu) & k_{48}(a,b,\mu) & k_{58}(a,b,\mu) & k_{68}(a,b,\mu) & k_{78}(a,b,\mu) & k_{88}(a,b,\mu) \end{pmatrix} & \text{otherwise} \end{array} \right.$$

$a(iel) := Knoten_{1, Top_{iel, 3}} - Knoten_{1, Top_{iel, 1}}$

$b(iel) := Knoten_{2, Top_{iel, 3}} - Knoten_{2, Top_{iel, 1}}$

$K_{el}(iel) := K_{quad}(a(iel), b(iel), t(iel), Em(iel), mue(iel))$

Systemsteifigkeitsmatrix und -lastvektor

Addition der Elementsteifigkeitsmatrizen zur Systemsteifigkeitsmatrix

$$
\begin{aligned}
K_{sys} := \; & K \leftarrow matrix(nfk \cdot n_{kn}, nfk \cdot n_{kn}, N_{Null}) \\
& \text{for } iee \in 1 .. n_{el} \\
& \quad \text{for } izei \in 1 .. 4 \\
& \quad\quad frz \leftarrow Top_{iee, izei} \cdot nfk - 1 \\
& \quad\quad \text{for } ispa \in 1 .. 4 \\
& \quad\quad\quad frs \leftarrow Top_{iee, ispa} \cdot nfk - 1 \\
& \quad\quad\quad K_{frz, frs} \leftarrow K_{frz, frs} + K_{el}(iee)_{izei \cdot 2-1, ispa \cdot 2-1} \\
& \quad\quad\quad K_{frz+1, frs} \leftarrow K_{frz+1, frs} + K_{el}(iee)_{izei \cdot 2, ispa \cdot 2-1} \\
& \quad\quad\quad K_{frz, frs+1} \leftarrow K_{frz, frs+1} + K_{el}(iee)_{izei \cdot 2-1, ispa \cdot 2} \\
& \quad\quad\quad K_{frz+1, frs+1} \leftarrow K_{frz+1, frs+1} + K_{el}(iee)_{izei \cdot 2, ispa \cdot 2} \\
& K
\end{aligned}
$$

Freiheitsgrade auf der Diagonalen, die = 0 sind werden mit Feder 10^20 besetzt

$$K_{sys\_1} := \left| \begin{array}{l} nzk \leftarrow zeilen(K_{sys}) \\ K \leftarrow matrix(nzk, nzk, N_{Null}) \\ \text{for } izk \in 1..nzk \\ \quad K_{izk,izk} \leftarrow 10^{20} \text{ if } K_{sys_{izk,izk}} = 0 \\ K \end{array} \right.$$

$zeilen(K_{sys}) = 50$

Addition der Lasten zum Systemlastvektor

$$Last_{sys} := \left| \begin{array}{l} L \leftarrow matrix(nfk \cdot n_{kn}, 1, N_{Null}) \\ \text{for } ila \in 1..zeilen(Lasten) \\ \quad \left| \begin{array}{l} frg \leftarrow Lasten_{ila,1} \cdot 2 - 1 \\ L_{frg} \leftarrow L_{frg} + Lasten_{ila,2} \\ L_{frg+1} \leftarrow L_{frg+1} + Lasten_{ila,3} \end{array} \right. \\ L \end{array} \right.$$

$$Loesche\_Zeile(Vek, zei) := \left| \begin{array}{l} nz \leftarrow zeilen(Vek) \\ ns \leftarrow spalten(Vek) \\ Vneu \leftarrow submatrix(Vek, 2, nz, 1, ns) \text{ if } zei = 1 \\ \text{if } (zei > 1) \cdot (zei < nz) \\ \quad \left| \begin{array}{l} F1 \leftarrow submatrix[Vek, 1, (zei - 1), 1, ns] \\ F2 \leftarrow submatrix[Vek, (zei + 1), nz, 1, ns] \\ Vneu \leftarrow stapeln(F1, F2) \end{array} \right. \\ Vneu \leftarrow submatrix(Vek, 1, nz - 1, 1, ns) \text{ if } zei = nz \\ Vneu \end{array} \right.$$

```
Loesche_Spalte(Vek, spa) := | nz ← zeilen(Vek)
                            | ns ← spalten(Vek)
                            | Vneu ← submatrix(Vek, 1, nz, 2, ns)  if  spa = 1
                            | if  (spa > 1)·(spa < ns)
                            |     | F1 ← submatrix[Vek, 1, nz, 1, (spa − 1)]
                            |     | F2 ← submatrix[Vek, 1, nz, (spa + 1), ns]
                            |     | Vneu ← erweitern(F1, F2)
                            | Vneu ← submatrix[Vek, 1, nz, 1, (ns − 1)]  if  spa = ns
                            | Vneu

Einfüge_Zeile(Vek, zei) := | nz ← zeilen(Vek)
                           | ns ← spalten(Vek)
                           | FZ ← matrix(1, ns, N_Null)
                           | Vneu ← stapeln(FZ, Vek)  if  zei = 1
                           | if  (zei > 1)·(zei < nz + 1)
                           |     | F1 ← submatrix(Vek, 1, zei − 1, 1, ns)
                           |     | F2 ← submatrix[Vek, (zei), nz, 1, ns]
                           |     | FU ← stapeln(F1, FZ)
                           |     | Vneu ← stapeln(FU, F2)
                           | Vneu ← stapeln(Vek, FZ)  if  zei = nz + 1
                           | Vneu
```

Berücksichtigung der Lagerbedingungen

$$Fest = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
K_{sys\_f} := \;& nz \leftarrow zeilen(Fest) \\
& K_{sys} \leftarrow K_{sys} \\
& \text{for } ife \in 1..nz \\
& \quad ifes \leftarrow nz - ife + 1 \\
& \quad frg\_x \leftarrow wenn\left[Fest_{ifes,2}, \left(Fest_{ifes,1} \cdot 2 - 1\right), 0\right] \\
& \quad frg\_y \leftarrow wenn\left[Fest_{ifes,3}, \left(Fest_{ifes,1} \cdot 2\right), 0\right] \\
& \quad K_{sys} \leftarrow Loesche\_Zeile\left(K_{sys}, frg\_y\right) \text{ if } frg\_y \neq 0 \\
& \quad K_{sys} \leftarrow Loesche\_Zeile\left(K_{sys}, frg\_x\right) \text{ if } frg\_x \neq 0 \\
& \text{for } ife \in 1..nz \\
& \quad ifes \leftarrow nz - ife + 1 \\
& \quad frg\_x \leftarrow wenn\left[Fest_{ifes,2}, \left(Fest_{ifes,1} \cdot 2 - 1\right), 0\right] \\
& \quad frg\_y \leftarrow wenn\left[Fest_{ifes,3}, \left(Fest_{ifes,1} \cdot 2\right), 0\right] \\
& \quad K_{sys} \leftarrow Loesche\_Spalte\left(K_{sys}, frg\_y\right) \text{ if } frg\_y \neq 0 \\
& \quad K_{sys} \leftarrow Loesche\_Spalte\left(K_{sys}, frg\_x\right) \text{ if } frg\_x \neq 0 \\
& K_{sys}
\end{aligned}
$$

$zeilen\left(K_{sys}\right) = 50$ $\quad spalten\left(K_{sys}\right) = 50$ $\quad zeilen\left(K_{sys\_f}\right) = 47$ $\quad spalten\left(K_{sys\_f}\right) = 47$

$$
\begin{aligned}
Last_{sys\_f} := \;& nz \leftarrow zeilen(Fest) \\
& Last_{sys} \leftarrow Last_{sys} \\
& \text{for } ife \in 1..nz \\
& \quad ifes \leftarrow nz - ife + 1 \\
& \quad frg\_x \leftarrow wenn\left[Fest_{ifes,2}, \left(Fest_{ifes,1} \cdot 2 - 1\right), 0\right] \\
& \quad frg\_y \leftarrow wenn\left[Fest_{ifes,3}, \left(Fest_{ifes,1} \cdot 2\right), 0\right] \\
& \quad Last_{sys} \leftarrow Loesche\_Zeile\left(Last_{sys}, frg\_y\right) \text{ if } frg\_y \neq 0 \\
& \quad Last_{sys} \leftarrow Loesche\_Zeile\left(Last_{sys}, frg\_x\right) \text{ if } frg\_x \neq 0 \\
& Last_{sys}
\end{aligned}
$$

$\mathrm{zeilen}(Last_{sys}) = 50$ $\qquad$ $\mathrm{zeilen}(Last_{sys\_f}) = 47$

Lösung des Gleichungssystems $\qquad u_{sys\_f} := K_{sys\_f}^{-1} \cdot Last_{sys\_f}$

Addition der festgehaltenen Freiheitsgrade:

$$u_{sys} := \left| \begin{array}{l} nz \leftarrow \mathrm{zeilen}(Fest) \\ u_{sys\_f} \leftarrow u_{sys\_f} \\ \text{for } \; ife \in 1..\,nz \\ \quad \left| \begin{array}{l} ifes \leftarrow ife \\ frg\_x \leftarrow \mathrm{wenn}\left[Fest_{ifes,2}, \left(Fest_{ifes,1} \cdot 2 - 1\right), 0\right] \\ frg\_y \leftarrow \mathrm{wenn}\left[Fest_{ifes,3}, \left(Fest_{ifes,1} \cdot 2\right), 0\right] \\ u_{sys\_f} \leftarrow \mathrm{Einfüge\_Zeile}(u_{sys\_f}, frg\_x) \;\; \text{if } \; frg\_x \neq 0 \\ u_{sys\_f} \leftarrow \mathrm{Einfüge\_Zeile}(u_{sys\_f}, frg\_y) \;\; \text{if } \; frg\_y \neq 0 \end{array} \right. \\ u_{sys\_f} \end{array} \right.$$

Verschiebungen:

Maximale Verschibungskomponente: $\max(u_{sys}) = 1.475 \times 10^{-3}$

Verschiebung eines Knotens: $Knoten\_Nummer := 2$

Verschiebung in x-Richtung: $u_{sys_{Knoten\_Nummer \cdot 2 - 1}} = 2.695 \times 10^{-4}$

Verschiebung in y-Richtung: $u_{sys_{Knoten\_Nummer \cdot 2}} = -1.571 \times 10^{-3}$

$$\begin{pmatrix} u_{ik} \\ v_{ik} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} usys_{ik\cdot 2-1} \\ usys_{ik\cdot 2} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \delta u_{max} \\ \delta v_{max} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \max\left(\overrightarrow{|u|}\right) \\ \max\left(\overrightarrow{|v|}\right) \end{pmatrix}$$

$$\delta_{r_{ik}} := \sqrt{(u_{ik})^2 + (v_{ik})^2} \qquad \delta_{max} := \max(\delta_r) \qquad deformed_{size} := 0.1$$

$$scale := \frac{\max((x_{max} \;\; y_{max}))}{\delta_{max}} \cdot deformed_{size} \qquad scale = 653.118$$

$$\begin{pmatrix} u_{nm_{ik}} \\ v_{nm_{ik}} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_{nm_{ik}} + u_{ik}\cdot scale \\ y_{nm_{ik}} + v_{ik}\cdot scale \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} u_{max} & u_{min} \\ v_{max} & v_{min} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \max(u_{nm}) & \min(u_{nm}) \\ \max(v_{nm}) & \min(v_{nm}) \end{pmatrix}$$

$$u_{max} := \max((u_{max} \;\; x_{max})) \qquad v_{max} := \max((v_{max} \;\; y_{max}))$$

$$u_{min} := \min((u_{min} \;\; x_{min})) \qquad v_{min} := \min((v_{min} \;\; y_{min}))$$

$$max\_tot := \max((|u_{max}| \;\; |v_{max}| \;\; |u_{min}| \;\; |v_{min}|))$$

$$N_{ux\_el}(i,j) := \left| \begin{array}{l} i\_el \leftarrow \mathrm{trunc}\left(\frac{i+1}{6}\right) + 1 \\ \text{if } \; i\_el \ne (n_{el} + 1) \\ \quad \left| \begin{array}{ll} -10^{12} & \text{if } \left(\mathrm{trunc}\left(\frac{i+1}{6}\right) = \frac{i+1}{6}\right) \\ u_{nmTop_{i\_el,1}} & \text{if } \; i = (i\_el - 1)\cdot 6 + 4 \\ u_{nmTop_{i\_el,\, i-(i\_el-1)\cdot 6+1}} & \text{otherwise} \\ \text{return } -10^{12} & \text{if } [(Em(i\_el) = 0) + (t(i\_el) = 0)] \end{array} \right. \\ -10^{12} \quad \text{otherwise} \end{array} \right.$$

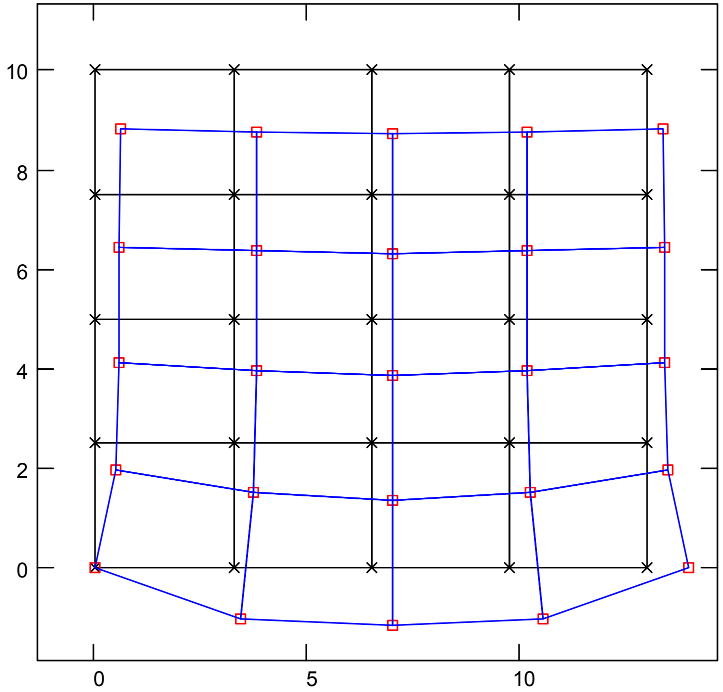
$$N_{uy\_el}(i,j) := \left| \begin{array}{l} i\_el \leftarrow \text{trunc}\left(\frac{i+1}{6}\right)+1 \\ \text{if } i\_el \neq (n_{el}+1) \\ \quad \left| \begin{array}{ll} -10^{12} & \text{if } \left(\text{trunc}\left(\frac{i+1}{6}\right) = \frac{i+1}{6}\right) \\ vnmTop_{i\_el,1} & \text{if } i = (i\_el-1)\cdot 6+4 \\ vnmTop_{i\_el,\, i-(i\_el-1)\cdot 6+1} & \text{otherwise} \\ \text{return } -10^{12} & \text{if } [(Em(i\_el)=0)+(t(i\_el)=0)] \end{array} \right. \\ -10^{12} \quad \text{otherwise} \end{array} \right.$$

$u_{max} := u_{max} + fak\_max \cdot max\_tot$ $\quad$ $u_{min} := u_{min} - fak\_max \cdot max\_tot$

$v_{max} := v_{max} + fak\_max \cdot max\_tot$ $\quad$ $v_{min} := v_{min} - fak\_max \cdot max\_tot$

$xf_{el} := \text{matrix}(6 \cdot n_{el}, 1, N_{ux\_el})$ $\quad$ $yf_{el} := \text{matrix}(6 \cdot n_{el}, 1, N_{uy\_el})$

Verformte Geometrie



Elementspannungen

Element: Reihe := 1 Element_in_Reihe := 2

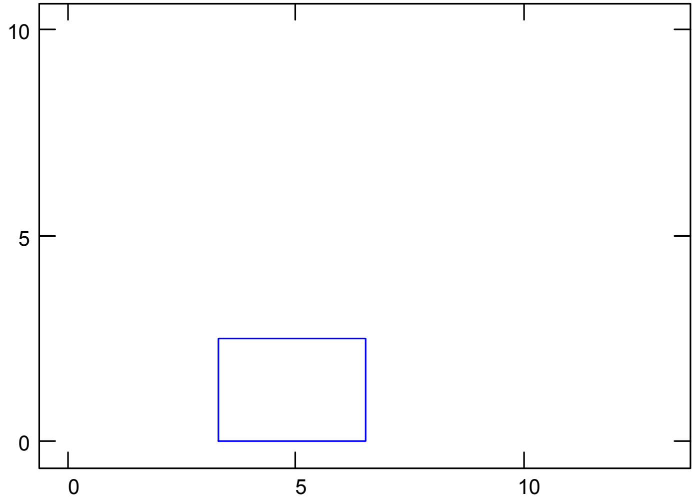
$el := n_x \cdot (Reihe - 1) + Element\_in\_Reihe$ $\qquad n_{knel} := 4$

$ii := (n_{knel} + 2) \cdot (el - 1) + 1 .. (n_{knel} + 2) \cdot (el - 1) + 6$

$$N_{uel}(i, j) := \left| \begin{array}{ll} ind \leftarrow \mathrm{trunc}\left(\frac{i}{2}\right) + 1 & \\ u_{sys}\left[\left(Top_{el, ind}\right) \cdot 2 - 1\right] & \text{if } \left(\mathrm{trunc}\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{i}{2}\right) \\ u_{sys}\left(Top_{el, ind} \cdot 2\right) & \text{otherwise} \end{array} \right.$$

$u_{el} := \mathrm{matrix}(8, 1, N_{uel})$

Elementnummer: $\qquad el = 2$



Knotenverschiebungen

Knotenkräfte

$$F_{el} := K_{el}(el)\cdot u_{el}$$

$$u_{el} = \begin{pmatrix} 2.695\times10^{-7} \\ -1.571\times10^{-6} \\ 7.377\times10^{-7} \\ -1.756\times10^{-6} \\ 7.377\times10^{-7} \\ -1.766\times10^{-6} \\ 7.208\times10^{-7} \\ -1.483\times10^{-6} \end{pmatrix} 10^{3} \qquad F_{el} = \begin{pmatrix} -2.423\times10^{3} \\ -758.077 \\ 1.978\times10^{3} \\ 1.252\times10^{-12} \\ 821.481 \\ 342.599 \\ -376.102 \\ 415.479 \end{pmatrix}$$

Spannungen und Dehnungen

$$B(a,b,x,y) := \frac{1}{2\cdot a\cdot b}\cdot\begin{pmatrix} 2\cdot y-b & 0 & -2\cdot y+b & 0 & 2\cdot y+b & 0 & -2\cdot y-b & 0 \\ 0 & 2\cdot x-a & 0 & -2\cdot x-a & 0 & 2\cdot x+a & 0 & -2\cdot x+a \\ 2\cdot x-a & 2\cdot y-b & -2\cdot x-a & -2\cdot y+b & 2\cdot x+a & 2\cdot y+b & -2\cdot x+a & -2\cdot y-b \end{pmatrix}$$

$a\_el := a(el)$ $\qquad$ $b\_el := b(el)$ $\qquad$ $a\_el = 3.25$ $\qquad$ $b\_el = 2.5$

$$D(E\_s,\mu) := \frac{E\_s}{1-\mu^2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{pmatrix} \qquad D(Em(el),mue(el)) = \begin{pmatrix} 3\times10^{7} & 0 & 0 \\ 0 & 3\times10^{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1.5\times10^{7} \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon(x,y) := B(a\_el,b\_el,x,y)\cdot u_{el} \qquad \sigma(x,y) := D(Em(el),mue(el))\cdot\varepsilon(x,y)$$

Spannungen und Dehnungen in Elementmitte und in den Eckpunkten

Elementmitte: $x_m := 0$ $y_m := 0$

$$\varepsilon(x_m, y_m) = \begin{pmatrix} 7.464 \times 10^{-5} \\ 1.555 \times 10^{-5} \\ 1.827 \times 10^{-5} \end{pmatrix} \qquad \sigma(x_m, y_m) = \begin{pmatrix} 2.239 \times 10^{3} \\ 466.509 \\ 274.079 \end{pmatrix}$$

Ecke links unten: $x_1 := -0.5 \cdot a\_el$ $y_1 := -0.5 \cdot b\_el$

$$\varepsilon(x_1, y_1) = \begin{pmatrix} 1.441 \times 10^{-4} \\ 3.528 \times 10^{-5} \\ 1.237 \times 10^{-4} \end{pmatrix} \qquad \sigma(x_1, y_1) = \begin{pmatrix} 4.323 \times 10^{3} \\ 1.058 \times 10^{3} \\ 1.856 \times 10^{3} \end{pmatrix}$$

Ecke rechts unten: $x_2 := 0.5 \cdot a\_el$ $y_2 := -0.5 \cdot b\_el$

$$\varepsilon(x_2, y_2) = \begin{pmatrix} 1.441 \times 10^{-4} \\ -4.18 \times 10^{-6} \\ -5.683 \times 10^{-5} \end{pmatrix} \qquad \sigma(x_2, y_2) = \begin{pmatrix} 4.323 \times 10^{3} \\ -125.405 \\ -852.39 \end{pmatrix}$$

Ecke rechts oben: $x_3 := 0.5 \cdot a\_el$ $y_3 := 0.5 \cdot b\_el$

$$\varepsilon(x_3, y_3) = \begin{pmatrix} 5.2 \times 10^{-6} \\ -4.18 \times 10^{-6} \\ -8.718 \times 10^{-5} \end{pmatrix} \qquad \sigma(x_3, y_3) = \begin{pmatrix} 156.006 \\ -125.405 \\ -1.308 \times 10^{3} \end{pmatrix}$$

Ecke links oben: $x_4 := -0.5 \cdot a\_el$ $y_4 := 0.5 \cdot b\_el$

$$\varepsilon(x_4, y_4) = \begin{pmatrix} 5.2 \times 10^{-6} \\ 3.528 \times 10^{-5} \\ 9.337 \times 10^{-5} \end{pmatrix} \qquad \sigma(x_4, y_4) = \begin{pmatrix} 156.006 \\ 1.058 \times 10^{3} \\ 1.401 \times 10^{3} \end{pmatrix}$$