

2 Grundlagen der Biomechanik

In diesem Kapitel stellen wir die biologischen und strukturellen Grundlagen für die mathematische Formulierung und physikalische Modellierung der Biomechanik bereit. Bei der Auswahl der Kapitel lassen wir uns von den einführenden Beispielen der Abbildung 1.1 leiten. Es gilt die Strukturmechanik und deren Dynamik für weiches Gewebe und Muskelschichten sowie für das Federkleid des Vogels zu formulieren. Die Biomechanik fester Körper wie z. B. der Knochen, die bei der Fortbewegung des Menschen vorkommt, ist nicht Gegenstand des Lehrbuches. Eine allgemeinere Darstellung der Biomechanik findet sich z. B. in den Büchern von *J. D. Humphrey und S. L. Delange* 2003, *Y. C. Fung* 1997 und für Biologen *W. Nachtigall* 2001.

2.1 Biologisches Material

Biologische Materialien, Strukturen und Oberflächen sind funktionell und hierarchisch aufgebaut. Dabei reichen die räumlichen Skalen von der Makrostruktur 10^{-1} m bis zur Nanostruktur 10^{-9} m über acht Größenordnungen. **Biologische Kompositmaterialien**, wie wir sie in der Natur vorfinden, setzen sich aus funktionell definierbaren Teilsystemen zusammen. So besteht die **Arterienwand** des menschlichen Kreislaufs aus drei Schichten, der Intima (I), der Media (M) und der Adventitia (A) (Abbildung 2.1). Bereits in Abbildung 1.8 haben wir die Funktionsweisen der drei Schichten beschrieben. Die Innenwand (I) besteht aus einer Lage Endothelzellen, die von kollagenen Fasern und einer strukturierten elastischen Membran umgeben ist. Die Mittelschicht (M) wird von radial und spiralförmigen Muskelfasern gebildet, die in elastisches Bindegewebe eingebettet sind. Die Außenhaut (A) besteht aus elastischen kollagenen Fasern und Muskelzellen. Jede Schicht bildet ein Teilsystem unterschiedlicher biomechanischer Eigenschaften, die das Gesamtsystem Arterie bilden.

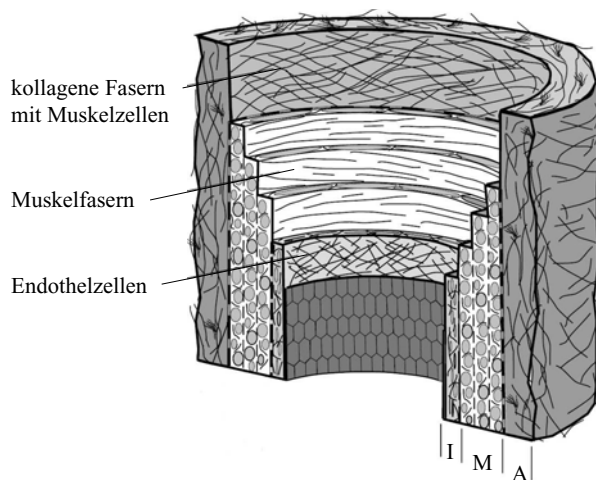


Abb. 2.1: Hierarchischer Aufbau der elastischen Arterienwand

Die kleinste Einheit einer biologischen Struktur ist die **Zelle**. Die Abbildung 2.2 zeigt den vereinfachten Aufbau der menschlichen Zelle. Sie besteht aus dem Zellkern, der die genetische Information der DNA der Chromosomen trägt und der mit seinem genetischen Code die Zellaktivität bestimmt. Der Zellkern besitzt eine eigene poröse Membran, die den Transport in und aus dem Zellkern kontrolliert. Das Cytoplasma ist der Teil der Zelle, der nicht den Zellkern umfasst. Es besteht aus anderen Organellen, organisierte Strukturen, die weitere Zellfunktionen übernehmen. Dazu gehören z. B. die Ribosomen, die die RNA Daten für die Proteinsynthese übersetzen. Die Zellmembran hat eine Dicke von 5 Nanometer und besteht aus verschiedenen Rezeptoren, Pumpen, Kanälen und transmembranen Proteinen. Für eine detaillierte Beschreibung der Zellbiologie verweisen wir auf das Buch von *B. Alberts et al. 2002*.

Aus der Sicht der kontinuumsmechanischen Biomechanik kommt es nicht auf die detaillierte Kenntnis des molekularen Aufbaus der einzelnen Zellen an. Es wird uns im Folgenden lediglich interessieren, wie sie sich im Verbund eines biologischen Gesamtsystems mechanisch verhalten. Für die betrachtete Arterie bedeutet dies, dass wir die Spannungs-Dehnungseigenschaften der einzelnen Schichten sowie des Gesamtsystems kontinuumsmechanisch beschreiben und physikalisch modellieren. Dabei werden die Eigenschaften des biologischen Materials mit einem Materialgesetz beschrieben, das ausgehend von der molekularen Mikrostruktur die makroskopischen Eigenschaften und damit die Verteilung der Kräfte im Gewebe charakterisiert.

Die Abbildung 2.3 zeigt den hierarchischen Aufbau einer **Kollagenfaser** vom helixartigen Molekül bis zum Gewebe der Außenwand, wie sie bei einer elastischen Arterie (siehe Abbildung 2.1)5, Koronararterie, Myokard des Herzens, Lunge, Haut, Sehne oder Knorpel vorkommt. Die Moleküle der Kollagenfaser bestehen aus drei sogenannten α -Ketten, die helixartig ineinander verwoben und an den jeweiligen Enden miteinander verbunden sind. Vier bis fünf dieser Molekülketten bilden die Mikrofibrillen, die größere Fibrillen und

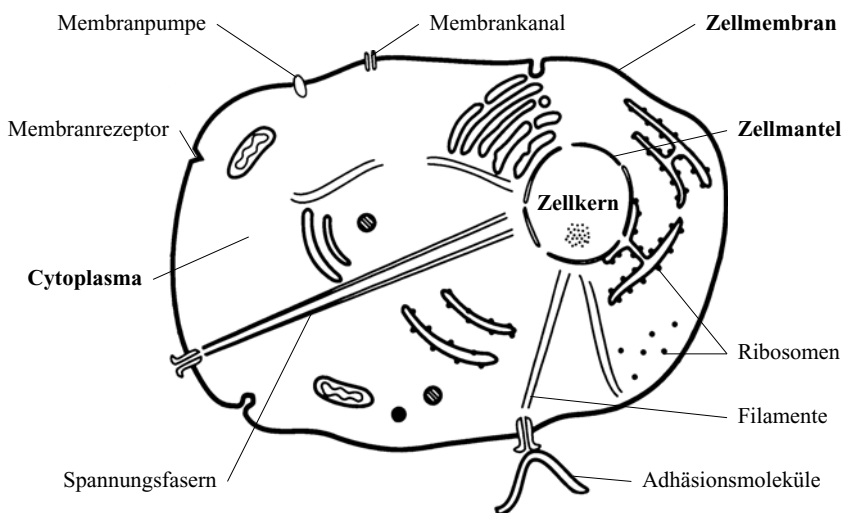


Abb. 2.2: Vereinfachte Skizze einer menschlichen Zelle, *J. D. Humphrey 2002*

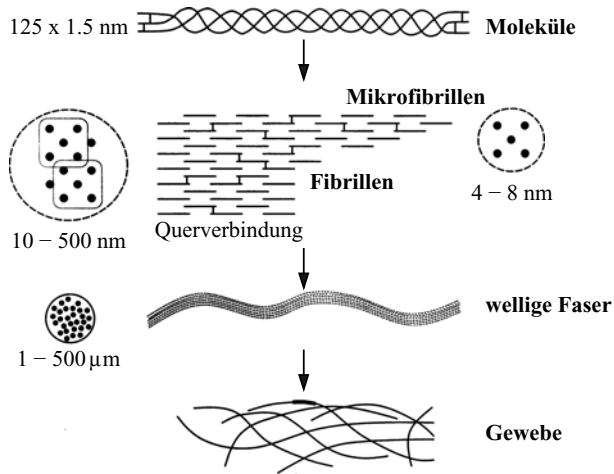


Abb. 2.3: Hierarchischer Aufbau der Kollagenfasern

schließlich Fasern der Größe $1 - 500 \mu\text{m}$ formen. Diese Fasern verzweigen sich von Schicht zu Schicht und haben eine Zugbelastung bis zu 10^5 Pa .

Mit der Magnet-Spin-Resonanz **MRT-phase mapping-Methode** kann man die Faserorientierung z. B. von Muskelschichten sichtbar machen. In Abbildung 2.4 sind die aus Geschwindigkeitsmessungen im Myokard des menschlichen Herzventrikels ausgewerteten Beschleunigungsspuren des Herzmuskels gezeigt. Die Muskelfasern orientieren sich spiralförmig um den Ventrikel und verursachen eine radiale und longitudinale Kontraktion des Ventrikels.

Die Strukturmodellierung der Vogelfeder erfordert Kenntnisse über die mechanischen Eigenschaften des Federmaterials Keratin sowie über den geometrischen Federaufbau. Eine entscheidende Rolle spielt hierbei die strukturelle Zusammensetzung des Federschaftes. Dieser besteht aus einem porösen Gewebe im Inneren, und einer festen Außenhülle. In Abbildung 2.5 ist die Wabenstruktur des Gewebes sowie der mittlere Querschnitt des Feder-

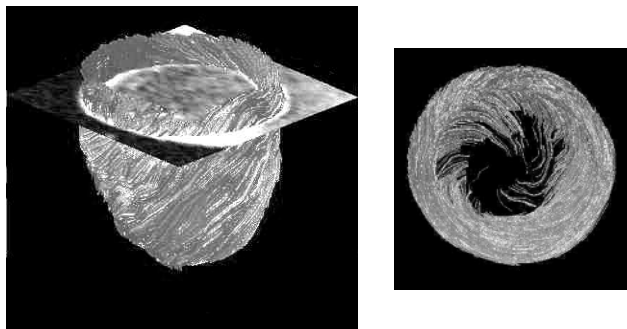


Abb. 2.4: Fasernorientierung im Myokard des menschlichen Herzventrikels, Universitätsklinik Freiburg 2005

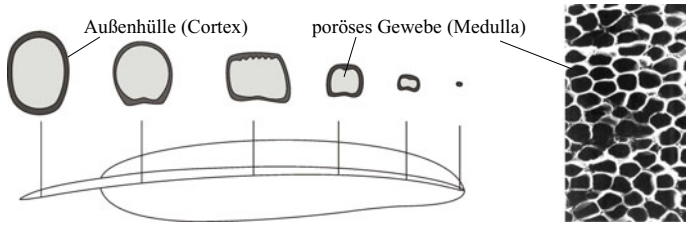


Abb. 2.5: Geometrische und materialspezifische Eigenschaften des Federschaftes

schaftes dargestellt. Während das poröse Gewebe eine konsistente Zusammensetzung entlang des Federschaftes ausweist, ändern sich die Orientierungen der Keratin-Molekülketten in der Außenhülle stetig. Letzteres führt zu Schwankungen der materialspezifischen Parameter entlang der Feder .

Dieses biomechanische Verhalten biologischen Gewebes gilt es nun mathematisch zu beschreiben und mit einem kontinuumsmechanischen Materialgesetz abzubilden. Den Vorgang nennt man **Modellierung**. Entsprechend der Abbildung 2.6 geht man von Beobachtungen aus, wie sie in Abbildung 2.4 für den Herzventrikel und in Abbildung 2.5 für die Vogelfeder gezeigt sind. Für die mathematische Beschreibung benutzen wir die kontinuumsmechanische Theorie mit funktionalen Zusammenhängen der statischen beziehungsweise dynamischen Kraftwirkung auf das biologische Material ohne Berücksichtigung der molekularen Struktur. Die sich ergebenden Differentialgleichungen werden bei vorgegebener Geometrie mit Anfangs- und Randbedingungen analytisch oder numerisch gelöst (Simulation) und mit experimentellen Ergebnissen verglichen. Die dem Materialgesetz zugrunde liegenden Modellvorstellungen werden im nächsten Schritt verfeinert und im Experiment validiert. Daraus entsteht letztendlich ein theoretisches Modell, das die Dynamik des realen biologischen Materials näherungsweise beschreibt.

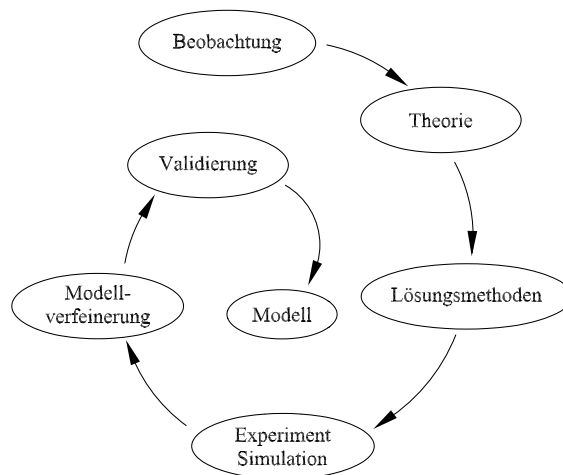


Abb. 2.6: Von der Beobachtung zum kontinuumsmechanischen Modell

2.2 Biomechanische Grundbegriffe

2.2.1 Spannung und Dehnung

Die **Spannung** ist definiert als Kraft pro Fläche. Auf das vertikale Flächenelement $dA_x = dy \cdot dz$ mit dem Normalenvektor $\mathbf{n}$ der Abbildung 2.7 wirkt die **Normalspannung** σ_{xx} und auf das horizontale Flächenelement $dA_z = dx \cdot dy$ die **Scherspannung** σ_{zx} . Die auf die Flächenelemente wirkenden Kräfte sind $df_{xx} = \sigma_{xx} \cdot dy \cdot dz$ und $df_{zx} = \sigma_{zx} \cdot dx \cdot dy$. In einem dreidimensionalen Kraftfeld wirken auf das Volumenelement $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ der Abbildung 2.8 drei Normalspannungen σ_{xx} , σ_{yy} und σ_{zz} , die Ausdehnung und Kompression verursachen sowie sechs Scherspannungen σ_{xy} , σ_{xz} , σ_{yx} , σ_{yz} , σ_{zx} und σ_{zy} , die eine Verzerrung des Volumenelementes zur Folge haben. Damit ergibt sich der auf das Volumenelement wirkende **Spannungstensor** σ :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \frac{df_{xx}}{dA_x} & \frac{df_{xy}}{dA_x} & \frac{df_{xz}}{dA_x} \\ \frac{df_{yx}}{dA_y} & \frac{df_{yy}}{dA_y} & \frac{df_{yz}}{dA_y} \\ \frac{df_{zx}}{dA_z} & \frac{df_{zy}}{dA_z} & \frac{df_{zz}}{dA_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} . \quad (2.1)$$

Der Spannungstensor ist symmetrisch, das heißt es gilt:

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} \quad , \quad \sigma_{xz} = \sigma_{zx} \quad , \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy} \quad . \quad (2.2)$$

In den folgenden Kapiteln benutzen wir auch die indizierte Tensorschreibweise:

$$\sigma = \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} . \quad (2.3)$$

Die Biomechanik beinhaltet die Kräfte auf einen elastischen Körper und die daraus resultierende Bewegung. Diese wird mit dem **Deformationsvektor**

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = u_i \quad (2.4)$$

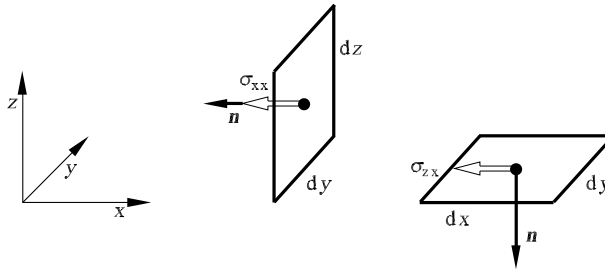


Abb. 2.7: Normalspannung und Scherspannung

beschrieben. Mit der Koordinate $\mathbf{a} = a_i$ vor und $\mathbf{x} = x_i$ nach der Deformation schreibt sich der Deformationsvektor für eine endliche Deformation eines elastischen Körpers:

$$u_i = x_i - a_i \quad . \quad (2.5)$$

Die Ableitungen des Deformationsvektors nach den Verschiebungs koordinaten x_i bezeichnet man als **Dehnung**. Von mehreren möglichen Formulierungen der Dehnung verwenden wir im Folgenden die **Greensche Dehnung**:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right)^2 , \\ e_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_2} \right)^2 , \\ e_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_3} \right)^2 , \\ e_{12} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = e_{21} , \\ e_{23} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) = e_{32} , \\ e_{31} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = e_{13} . \end{aligned} \quad (2.6)$$

Die Greensche Definition der Dehnung ist quadratisch nichtlinear bezüglich der Ableitungen des Deformationsvektors. Selbst für das einfache Beispiel eines längs verformten **Stabes** bei konstanter Normalspannung σ_{xx} , der sich ausschließlich entlang der Achse verformt, ergibt die Greensche Dehnung eine nichtlineare Abhängigkeit:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 , & e_{12} &= e_{21} = 0 , \\ e_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 , & e_{23} &= e_{32} = 0 , \\ e_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)^2 , & e_{31} &= e_{13} = 0 . \end{aligned} \quad (2.7)$$

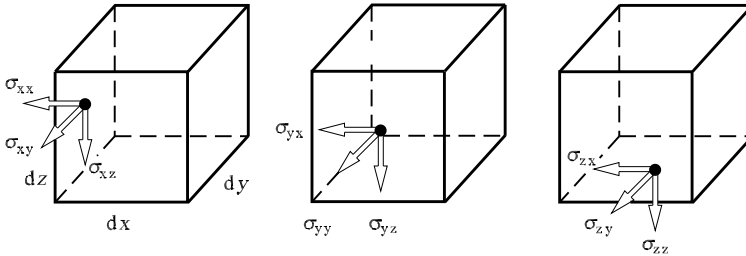


Abb. 2.8: Spannungstensor

Erst unter der Voraussetzung **kleiner Deformationen**, wenn $x_i \approx a_i$ gilt, können die nichtlinearen Terme der Deformationsableitungen vernachlässigt werden und die Green-sche Dehnung schreibt sich:

$$\mathbf{e} = e_{ij} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix} \quad , \quad (2.8)$$

mit

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad , & e_{12} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = e_{21} \quad , \\ e_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad , & e_{23} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = e_{32} \quad , \\ e_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad , & e_{31} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) = e_{13} \quad . \end{aligned}$$

e_{11} , e_{22} und e_{33} sind die Ausdehnungskomponenten und e_{12} , e_{23} und e_{31} die Scherkomponenten der linearisierten Dehnung.

2.2.2 Spannungs-Dehnungsgesetz

Mit Spannungs-Dehnungsgesetzen wird das Materialverhalten bezüglich der Wirkung äußerer Kräfte modelliert. Ein Gummiband wird sich unter Belastung anders verhalten als ein Metallstab. Berücksichtigen wir den hierarchischen Aufbau biologischen Materials von Kapitel 2.1, wird sich wiederum ein anderes Spannungs-Dehnungsverhalten ergeben. In Abbildung 2.9 sind qualitativ die unterschiedlichen Spannungs-Dehnungsgesetze dargestellt. Zunächst unterscheiden wir zwischen einem **linearen** und **nichtlinearen** Materialverhalten. Metalle und auch Knochen verhalten sich linear, solange die Dehnung nicht zu groß ist und die Mikrostruktur des Materials erhalten bleibt. Im Gegensatz dazu zeigen weiches biologisches Gewebe und Gummi ein nichtlineares Spannungs-Dehnungsverhalten aufgrund ihres mikroskopischen Aufbaus mit langkettigen Molekülen. **Elastische** Materialien kehren nach Aufhebung der Belastung wieder in ihren Anfangszustand zurück. Das bedeutet, dass wie beim Metall keine innere Energie dissipiert. Bei Be- und Entlastung durchläuft das Material dieselbe Spannungs-Dehnungskurve. Biologisches Gewebe

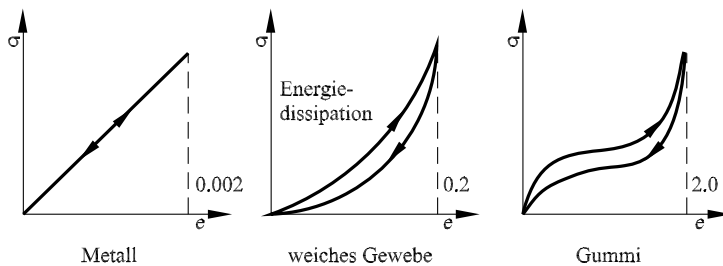


Abb. 2.9: Qualitativer Vergleich von Spannungs-Dehnungsverhalten

und Gummi kommen zwar auch zum gleichen Anfangszustand zurück, durchlaufen aber bei Be- und Entlastung unterschiedliche Kurven (Hysteresse). Dieses Verhalten nennt man **pseudoelastisch**. Man beachte die um Größenordnungen unterschiedlichen Grenzwerte der Dehnung von 0.2 beziehungsweise 2.0. Im Gegensatz dazu erfährt eine **plastische** Deformation eine irreversible Zustandsänderung und kehrt nicht in den Anfangszustand zurück.

Desweiteren unterscheiden wir **homogene** und **inhomogene** Materialien. Beim homogenen Material wie Metall ist das Spannungs-Dehnungsgesetz unabhängig vom Ort. Dies ist anders bei Verbundwerkstoffen und biologischem Material, die in Schichten aufgebaut sind. Letztendlich bezeichnen wir Materialien deren Verhalten unabhängig vom Ort sind als isotrop. Metalle zeigen isotropes Verhalten, sofern die Deformation klein genug ist, während Gummi bei großen Auslenkungen anisotrop ist. In Schichten aufgebautes biologisches Gewebe zeigt **anisotropes** Verhalten. Dies führt entsprechend der Abbildung 2.10 dazu, dass für die innere Schicht des Myokards des menschlichen Herzventrikels ein anderes Spannungs-Dehnungsgesetz als für die äußere Epikardschicht gilt. Im Myokard ergeben sich unterschiedliche Grenzwerte der Dehnung, je nachdem ob die Belastung entlang oder senkrecht zu den Muskelfasern erfolgt. Die Abbildung zeigt, dass die äußere Epikardschicht ein deutlich nichtlineareres anisotropes Spannungs-Dehnungsverhalten zeigt als die Myokardschicht aufgrund der ausgeprägten wellenförmigen Kollagenfasern, die in Abbildung 2.3 dargestellt sind. Diese äußere Muskelschicht des Herzventrikels zeigt zusätzlich eine Hysteresse der Belastungskurve.

Die mathematische Formulierung des Spannungs-Dehnungsgesetzes unter der Voraussetzung homogener Körper führt für kleine Deformationen zum **Hookeschen Gesetz** elastischer Körper:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot e_{kl} \quad , \quad (2.9)$$

mit dem Spannungstensor σ_{ij} (2.3) und dem Dehnungstensor e_{kl} (2.8). C_{ijkl} ist der Tensor der elastischen Konstanten, der unabhängig von den Spannungen und Dehnungen ist. Der

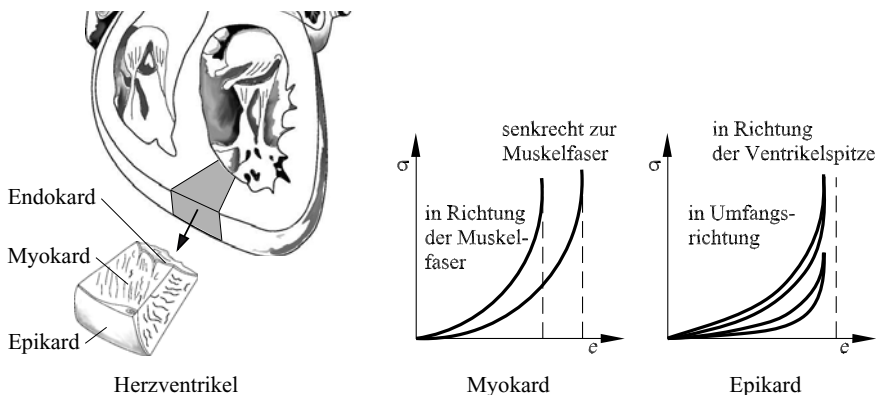


Abb. 2.10: Qualitative Spannungs-Dehnungsgesetze des menschlichen Myokards und Epikards

Spannungstensor ist für die Voraussetzungen kleiner Deformationen linear proportional zum Dehnungstensor.

Für richtungsunabhängige **isotrope Materialien** verringert sich die Anzahl auf zwei unabhängige elastische Konstanten und das Hooksche Gesetz schreibt sich:

$$\sigma_{ij} = \lambda \cdot e_{kk} \cdot \delta_{ij} + 2 \cdot \mu \cdot e_{ij} \quad . \quad (2.10)$$

λ und μ werden die Lamé-Konstanten genannt, wobei μ den Schermodul darstellt, der auch mit G bezeichnet wird. In Kartesischen Koordinaten schreibt sich das Hooksche Gesetz für isotrope elastische Materialien:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda \cdot (e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}) + 2 \cdot G \cdot e_{xx} \quad , \\ \sigma_{yy} &= \lambda \cdot (e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}) + 2 \cdot G \cdot e_{yy} \quad , \\ \sigma_{zz} &= \lambda \cdot (e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}) + 2 \cdot G \cdot e_{zz} \quad , \\ \sigma_{xy} &= 2 \cdot G \cdot e_{xy} \quad , \quad \sigma_{yz} = 2 \cdot G \cdot e_{yz} \quad , \quad \sigma_{zx} = 2 \cdot G \cdot e_{zx} \quad . \end{aligned} \quad (2.11)$$

Nach den Dehnungskomponenten e_{ij} aufgelöst, schreibt man Gleichung (2.10) üblicherweise:

$$e_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \cdot \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \cdot \sigma_{kk} \cdot \delta_{ij} \quad . \quad (2.12)$$

E wird **Young-Modul** (Elastizitätsmodul), ν **Poisson-Verhältnis** und G **Schermodul** genannt. Der Young-Modul E beschreibt die Steifheit des Materials in Ausdehnungsrichtung und damit die Änderung der Spannung aufgrund der Dehnung, die mit Spannung-Dehnungsmessungen von Materialproben bestimmt wird. Poisson-Verhältnis ν ist das Verhältnis orthogonaler Richtungen und beschreibt die Verjüngung des Materials, das sich ausdehnt, während der Schermodul G den Widerstand aufgrund der Scherung darstellt. Man kann zeigen, dass für linear elastisches, homogenes und isotropes Materialverhalten gilt:

$$G = \frac{E}{2} \cdot (1 + \nu) \quad . \quad (2.13)$$

In Kartesischen Koordinaten schreibt sich Gleichung (2.12):

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_{xx} - \nu \cdot (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})) \quad , \quad e_{xy} = \frac{1 + \nu}{E} \cdot \sigma_{xy} = \frac{1}{2 \cdot G} \cdot \sigma_{xy} \quad , \\ e_{yy} &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_{yy} - \nu \cdot (\sigma_{zz} + \sigma_{xx})) \quad , \quad e_{yz} = \frac{1 + \nu}{E} \cdot \sigma_{yz} = \frac{1}{2 \cdot G} \cdot \sigma_{yz} \quad , \\ e_{zz} &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_{zz} - \nu \cdot (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})) \quad , \quad e_{zx} = \frac{1 + \nu}{E} \cdot \sigma_{zx} = \frac{1}{2 \cdot G} \cdot \sigma_{zx} \quad . \end{aligned} \quad (2.14)$$

Ein einfaches Beispiel soll die Wirkung der einzelnen Terme veranschaulichen. Wenn ein rechteckiger Materialblock in z -Richtung komprimiert wird, verkürzt er sich infolge der Dehnung:

$$e_{zz} = \frac{1}{E} \cdot \sigma_{zz} \quad . \quad (2.15)$$

Gleichzeitig beulen sich die Seitenwände etwas aus. Für ein lineares Material ist die Ausbeuldehnung proportional zu σ_{zz} und wirkt der Spannung entgegen:

$$e_{xx} = -\frac{\nu}{E} \cdot \sigma_{zz} \quad , \quad e_{yy} = -\frac{\nu}{E} \cdot \sigma_{zz} \quad . \quad (2.16)$$

Wird der Materialblock mit σ_{xx} , σ_{yy} und σ_{zz} in alle drei Richtungen komprimiert überlagern sich die Effekte linear. Der Einfluss von σ_{xx} auf e_{yy} und e_{zz} und von σ_{yy} auf e_{xx} und e_{zz} ist derselbe, wie der Einfluss von σ_{zz} auf e_{xx} und e_{yy} . Damit ergibt sich:

$$e_{zz} = \frac{1}{E} \cdot \sigma_{zz} - \frac{\nu}{E} \cdot \sigma_{xx} - \frac{\nu}{E} \cdot \sigma_{yy} \quad . \quad (2.17)$$

Für die Scherung gilt das Gleiche. Die Spannungen σ_{ij} und die Dehnungen e_{ij} ($i \neq j$) sind ebenfalls direkt proportional.

Die Abbildung 2.10 hat gezeigt, dass biologisches Muskelgewebe anisotropes und nicht-lineares Spannungs-Dehnungsverhalten zeigt. Dennoch lässt sich in einem begrenzten Spannungs-Dehnungsbereich das Hooksche Gesetz unter der Annahme der **Orthotropie** näherungsweise anwenden. Neben der Isotropie oder transversalen Isotropie in einer Schicht ist die Orthotropie ein üblicher Begriff um die Symmetrie des Materials zu charakterisieren. Wie der Name bereits aussagt, versteht man unter orthotropem Verhalten in drei orthogonalen Richtungen unterschiedliches Spannungs-Dehnungsverhalten. So unterscheidet sich in Arterien aufgrund der radialen Orientierung der Kollagenfasern das axiale Spannungs-Dehnungsverhalten vom Umfangs- und Radialverhalten, da die Muskelschichten entsprechend der Abbildung 2.1 in Umfangsrichtung angeordnet sind. Das Gleiche gilt für das menschliche Herz. In Abbildung 2.11 ist die Orientierung der kardialen Muskelfasern gezeigt, die in Abbildung 2.4 für den linken Herzventrikel mit der MRT-phase mapping-Methode visualisiert wurden. Drei Gruppen von Muskelschichten winden sich um die beiden Herzventrikel während sich eine weitere Muskelschicht ausschließlich um den linken Ventrikel schlingt. Dabei orientieren sich die kardialen Muskelzellen eher tangential als radial um das Herz. Den unterschiedlichen Muskelschichten kann man näherungsweise orthotropes Verhalten zuordnen.

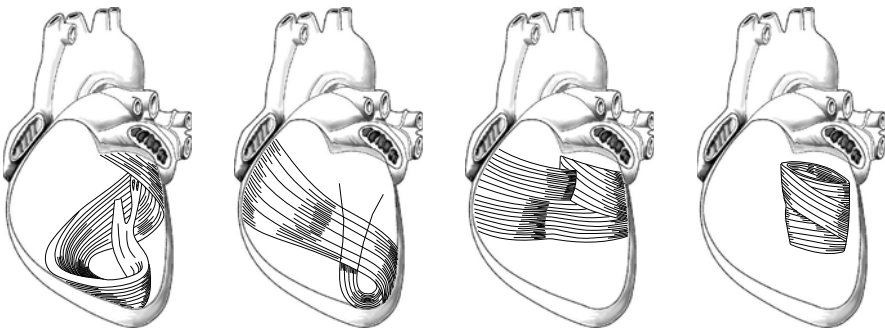


Abb. 2.11: Orientierung der kardialen Muskelfasern

Unter der Voraussetzung linearen, elastischen und homogenen Materialverhaltens kann man das Hooksche Gesetz für orthotrope Materialien verallgemeinern:

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{E_1} \cdot \sigma_{xx} - \frac{\nu_{21}}{E_2} \cdot \sigma_{yy} - \frac{\nu_{31}}{E_3} \cdot \sigma_{zz} \quad , & e_{xy} &= \frac{1}{2 \cdot G_{12}} \cdot \sigma_{xy} \quad , \\ e_{yy} &= \frac{1}{E_2} \cdot \sigma_{yy} - \frac{\nu_{12}}{E_1} \cdot \sigma_{xx} - \frac{\nu_{32}}{E_3} \cdot \sigma_{zz} \quad , & e_{yz} &= \frac{1}{2 \cdot G_{23}} \cdot \sigma_{yz} \quad , \\ e_{zz} &= \frac{1}{E_3} \cdot \sigma_{zz} - \frac{\nu_{13}}{E_1} \cdot \sigma_{xx} - \frac{\nu_{23}}{E_2} \cdot \sigma_{yy} \quad , & e_{xz} &= \frac{1}{2 \cdot G_{13}} \cdot \sigma_{xz} \quad , \end{aligned} \quad (2.18)$$

mit den drei Young-Modulen E_1 , E_2 und E_3 , den drei Schermodulen G_{12} , G_{13} und G_{23} und sechs Poisson-Verhältnissen ν_{12} , ν_{21} , ν_{13} , ν_{31} , ν_{23} und ν_{32} von denen nur drei unabhängig sind. Man kann zeigen, dass gilt:

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} \quad , \quad \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3} \quad , \quad \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3} \quad . \quad (2.19)$$

Um die orthotropen Stokesschen Beziehungen auf die Muskelfaserschichten anwenden zu können, muss man die Gleichungen (2.18) von den Kartesischen Koordinaten in die Koordinaten der Muskelschichten transformieren. Diese Transformationsgleichungen sind z. B. in den Büchern von *J. D. Humphrey und S. L. Delange* 2003 und *Y. C. Fung* 1997 eingehend beschrieben.

Unabhängig von der Vogelgattung ist der Grundaufbau jeder Vogelfeder nahezu identisch. Die Feder besteht aus dem Material Keratin, dessen molekulare Zusammensetzung ein inhomogenes, elastisches Materialverhalten bewirkt. Hierbei bestimmen die mechanischen Eigenschaften des Federschaftes maßgeblich die auftretenden elastischen Deformationen der gesamten Feder während des Vogelfluges. Der Federschaft besteht aus einer festen Außenhülle (*Cortex*), die das im Inneren des Schaftes befindliche poröse Gewebe (*Medulla*) umgibt. Die Raumorientierung der Keratin-Molekülketten der Außenhülle bestimmt den Verlauf des E-Moduls. In Richtung der Federspitze nimmt die Querausrichtung der Keratin-Molekülketten entlang des Federschaftes ab und die längs angeordneten Moleküle dominieren die strukturelle Zusammensetzung, wodurch es zu einem Anstieg des E-Moduls kommt. Mit Hilfe von Spannungs-Dehnungs-Messungen an Federn von acht verschiedenen Vögeln wurde ein mittlerer E-Modul von $\bar{E} = 2.5 \text{ GPa}$ bestimmt. In Abbildung

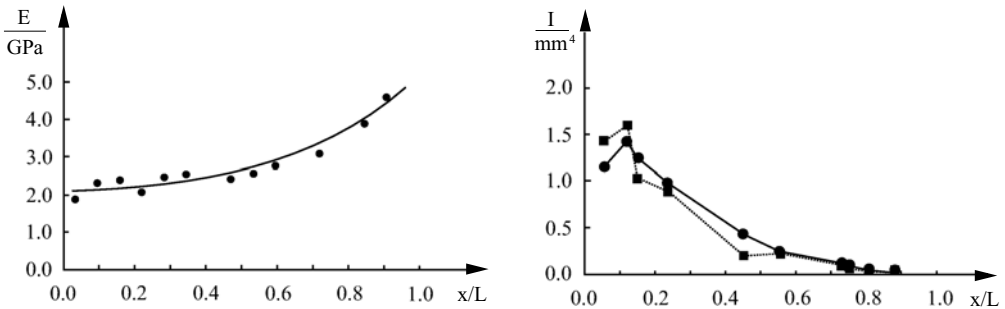


Abb. 2.12: E-Modul und Flächenträgheitsmoment entlang eines Federschaftes

2.12 ist neben dem Verlauf des E-Moduls die Änderung des Flächenträgheitsmomentes I entlang des Federschafts gezeigt. Dieses variiert aufgrund von Querschnittsflächenänderungen und beeinflusst somit die Biegesteifigkeit EI der Feder.

2.2.3 Viskoelastizität

Bisher sind wir von einer statischen Belastung des Materials ausgegangen. In Abbildung 2.10 haben wir bereits gezeigt, dass bei einer zyklischen zeitabhängigen Kompression und Relaxation der äußeren Herzmuskelschicht eine **Hysterese** des Spannungs-Dehnungsverhaltens auftreten kann. Wird ein Körper plötzlich gedehnt und die Dehnung bleibt dennoch konstant, verringern sich die durch die Dehnung verursachten Spannungen kontinuierlich. Diesen Vorgang nennt man **Relaxation**. Wird der Körper plötzlich einer Spannung unterzogen und diese bleibt in der Folge konstant, verformt sich der Körper weiter. Diesen Vorgang nennt man **Kriechen**. Kriechen, Relaxation und Hysterese sind Eigenschaften der **Viskoelastizität**. Alle bisher betrachteten biologischen Materialien sind viskoelastisch.

In Abbildung 2.13 sind zwei klassische Modelle der Viskoelastizität dargestellt. Das **Maxwell-Modell** besteht in zeitlicher Abfolge aus einem elastischen Sprung und einer sprunghaften Dämpfung. Die Dehnung e steigt nach der Belastungssprunglinie an und nimmt nach der Entlastung einen konstanten Wert an. Die Spannung $\sigma = F/A$ steigt sprunghaft mit der momentanen Dehnung und relaxiert kontinuierlich mit fortschreitender Zeit. Ist F die momentane Kraft, die den Sprung μ erzeugt und u die Auslenkung, dann gilt $F = \mu \cdot u$. Wirkt die Kraft F als momentane Dämpfung η erzeugt sie die Auslenkungsgeschwindigkeit du/dt mit $F = \eta \cdot du/dt$. Beim Maxwell-Modell wirkt dieselbe Kraft beim Spannungssprung und der momentanen Dämpfung. Diese Kraft erzeugt die Auslenkung

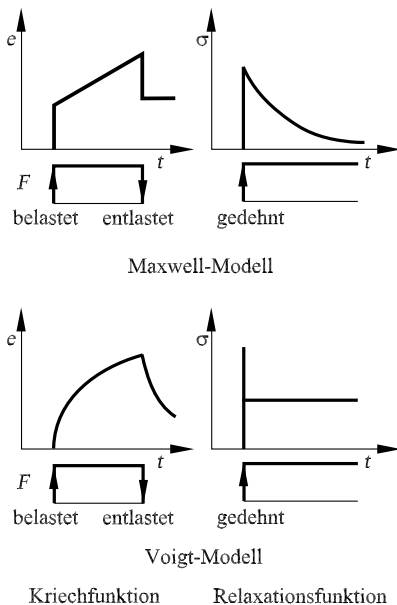


Abb. 2.13: Viskoelastische Modelle

F/μ und Dämpfungsgeschwindigkeit F/η . Die Geschwindigkeit der sprunghaften Ausdehnung ergibt $(dF/dt)/\mu$. Damit ergibt das Maxwell-Modell die lineare Superposition der beiden Geschwindigkeiten:

$$\frac{du}{dt} = \frac{dF}{dt} \frac{1}{\mu} + \frac{F}{\eta} \quad , \quad (2.20)$$

mit der Anfangsbedingung zur Zeit $t = 0$:

$$u(0) = \frac{F(0)}{\mu} \quad ,$$

da für $t = 0$ der Spannungssprung unmittelbar eine Deformation zur Folge hat aber die Dämpfungsauslenkung noch Null ist.

Beim **Voigt-Modell** haben der Spannungs- und Dämpfungssprung dieselbe Auslenkung und erzeugen die Kräfte $\mu \cdot u$ und $\eta \cdot du/dt$. Damit ergibt sich für die Gesamtkraft F :

$$F = \mu \cdot u + \eta \cdot \frac{du}{dt} \quad . \quad (2.21)$$

Bei einem plötzlichen Sprung der Kraft F erhält man die Anfangsbedingung:

$$u(0) = 0 \quad . \quad (2.22)$$

Die Lösungen der Gleichungen (2.20) und (2.21) für $u(t)$ mit einer Sprungfunktion $\mathbf{I}(t)$ für $F(t)$ ergeben die Kriechfunktionen für das Maxwell-Modell

$$u(t) = \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\eta} \cdot t \right) \cdot \mathbf{I}(t) \quad (2.23)$$

und für das Voigt-Modell

$$u(t) = \frac{1}{\mu} \cdot \left(1 - e^{-\frac{\mu}{\eta} \cdot t} \cdot \mathbf{I}(t) \right) \quad , \quad (2.24)$$

sowie die Relaxationsfunktionen bei Vertauschen der Wirkung von F und u für das Maxwell-Modell

$$u(t) = \mu \cdot e^{-\frac{\mu}{\eta} \cdot t} \cdot \mathbf{I}(t) \quad (2.25)$$

und für das Voigt-Modell

$$u(t) = \eta \cdot \delta(t) + \mu \cdot \mathbf{I}(t) \quad . \quad (2.26)$$

$\delta(t)$ ist die Dirac-Deltafunktion mit $\delta(t) = 0$ für $t < 0$ und $t > 0$. $\mathbf{I}(t)$ ist die Einheitsprungfunktion mit 1 für $t > 0$, 1/2 für $t = 0$ und 0 für $t < 0$.

Bei einem Maxwell-Körper erzeugt die plötzliche Belastung eine unmittelbare Auslenkung des elastischen Sprungs, dem ein Kriechen der Dämpfung folgt. Auf der anderen Seite erzeugt die plötzliche Deformation eine Reaktion durch den Sprung, dem eine exponentielle

Spannungsrelaxation folgt. Der Faktor η/μ wird Relaxationszeit genannt. Bei einem Voigt-Körper erzeugt die plötzliche Kraftwirkung aufgrund der Dämpfung parallel zum Sprung keine unmittelbare Auslenkung und bewegt sich nicht unmittelbar. Die Deformation baut sich allmählich auf, während der Sprung einen zunehmenden Anteil der Belastung hat. Die Dämpfung der Auslenkung relaxiert exponentiell. η/μ ist wiederum die Relaxationszeit.

Diese Modellvorstellungen dienen lediglich dem grundsätzlichen Verständnis der Viskoelastizität. Sie finden im Folgenden keine Anwendung. Vielmehr ist die periodische Be- und Entlastung z. B. einer Arterienwand beziehungsweise der Vogelfeder von Interesse, die auch deren Hysterese berücksichtigt.

Bei **periodischer Belastung** z. B. eines Muskels zeigt das viskoelastische Spannungs-Dehnungsdiagramm der Abbildung 2.14 einen Loop im Gegensatz zum linearen Hookschen Verlauf. Dabei geht von der Belastung über die rückführende Entspannung Energie verloren, die der Fläche innerhalb des Loops entspricht. Die Gerade des Hookschen Gesetzes bedeutet, dass bei einem elastischen Material alle Energie die in das Material eingebracht wird auch wieder zurückgewonnen wird.

Wenn die Kraft F und die Auslenkung u als harmonische Funktion angesetzt werden

$$u = U \cdot e^{i\omega \cdot t} \quad , \quad (2.27)$$

erhält man mit der Ableitung nach der Zeit:

$$\frac{du}{dt} = i \cdot \omega \cdot U \cdot e^{i\omega \cdot t} = i \cdot \omega \cdot u \quad . \quad (2.28)$$

Damit gilt für das Maxwell-Modell (2.20):

$$i \cdot \omega \cdot u = \frac{i \cdot \omega \cdot F}{\mu} + \frac{F}{\eta} \quad . \quad (2.29)$$

Das kann in die Form

$$F = G(i \cdot \omega) \cdot u \quad (2.30)$$

gebracht werden, was gleichbedeutend ist mit:

$$F \cdot e^{i\omega \cdot t} = G(i \cdot \omega) \cdot u \cdot e^{i\omega \cdot t} \quad . \quad (2.31)$$

$G(i \cdot \omega)$ bezeichnet man als **komplexen Elastizitätsmodul**. Für den Maxwell-Körper erhält man:

$$G(i \cdot \omega) = i \cdot \omega \cdot \left(\frac{i \cdot \omega}{\mu} + \frac{1}{\eta} \right)^{-1} \quad . \quad (2.32)$$

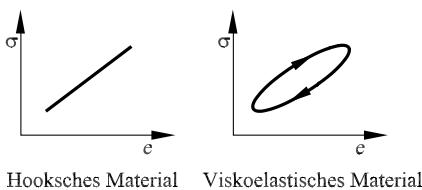


Abb. 2.14: Spannungs-Dehnungs-Loop bei oszillatorischer Anregung

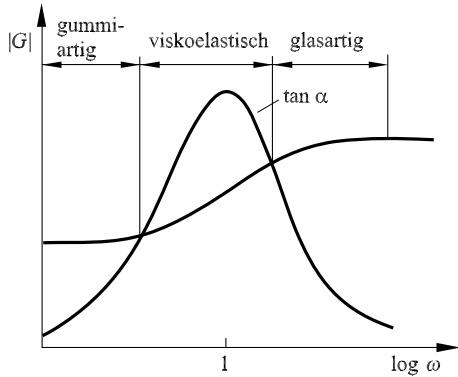


Abb. 2.15: Amplitude des komplexen Elastizitätsmoduls $|G|$ und innere Reibung $\tan(\alpha)$

Schreibt man

$$G(i \cdot \omega) = |G| \cdot e^{i \cdot \alpha} \quad , \quad (2.33)$$

ist $|G|$ die Amplitude des komplexen Elastizitätsmoduls und α die Phasenverschiebung. $\tan(\alpha)$ nennt man die **innere Reibung**. Beide Größen sind in Abbildung 2.15 als Funktion des Logarithmus der Kreisfrequenz ω dargestellt. Die innere Reibung erreicht bei der normierten Kreisfrequenz $\log(\omega) = 1$ ein Maximum. In Konsequenz hat der Elastizitätsmodul seinen größten Anstieg in der Umgebung des Maximums von $\tan(\alpha)$. Diese Auftragung erlaubt es die Parameter des gewählten viskoelastischen Modells an experimentelle Daten der periodisch oszillierenden Spannungs-Dehnungsmessungen anzupassen.

Bisher galten alle Ableitungen für kleine Auslenkungen. **Nichtlineare Spannungs-Dehnungsbeziehungen** bei endlicher Auslenkung führen auf Tensoren der Spannungs- und Dehnungsraten. Diese wurden für elastische, viskoelastische und viskoplastische (mit einer bleibenden Verformung) Materialien entwickelt. Für die biologischen viskoelastischen Materialien wird ein quasi-lineares orthotropes Modell in Kapitel 2.3.3 angegeben.

2.3 Bewegungsgleichungen der Strukturmechanik

Führt man die Deformationsgeschwindigkeit v_i als totale zeitliche Ableitung des Deformationsvektors u_i (2.5) ein, erhält man mit dem Spannungstensor σ_{ij} (2.3) die **Bewegungsgleichungen** in Kartesischen Koordinaten:

$$\rho \cdot \frac{dv_i}{dt} = \rho \cdot \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i \quad , \quad (2.34)$$

mit den volumenspezifischen Kräften f_i und der Dichte des Materials ρ . Dabei wird die übliche Tensorschreibweise benutzt. Die Wiederholung eines Indexes bedeutet die Summe über $i = 1, 2, 3$ beziehungsweise $j = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} &= \frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_3} \quad , \\ \frac{dv_i}{dt} &= \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_1 \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_1} + v_2 \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_2} + v_3 \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_3} \quad . \end{aligned}$$

Die totale zeitliche Ableitung der Deformationsgeschwindigkeit beschreibt die Änderung in einem mitbewegten Volumenelement $dV = dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3$. Diese Darstellung nennt man **Lagrange-Beschreibung**, die in Kapitel 3.2.1 eingehend im Zusammenhang mit der Kinematik von Strömungen beschrieben wird. Die partielle zeitliche Ableitung der Deformationsgeschwindigkeit nach der Zeit und die konvektiven Terme abgeleitet nach den Raumkoordinaten bezeichnet man als **Euler-Darstellung**, die wir im Folgenden weiter benutzen.

2.3.1 Navier-Gleichung

Der Spannungstensor σ_{ij} lässt sich für einen elastischen Körper unter der Voraussetzung kleiner Deformationen als lineare Funktion des Dehnungstensors e_{kl} darstellen (Hooksches Gesetz (2.9)):

$$\sigma = \sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot e_{kl} \quad , \quad (2.35)$$

mit dem Tensor der elastischen Konstanten C_{ijkl} . Für einen isotropen elastischen Körper vereinfacht sich das Hooksche Gesetz entsprechend der Gleichung (2.10):

$$\sigma_{ij} = \lambda \cdot e_{kk} \cdot \delta_{ij} + 2 \cdot \mu \cdot e_{ij} \quad , \quad (2.36)$$

mit der Lamé-Konstanten λ und dem Schermodul G . Nach e_{ij} aufgelöst erhält man Gleichung (2.12):

$$e_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \cdot \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \cdot \sigma_{kk} \cdot \delta_{ij} \quad . \quad (2.37)$$

E ist der Elastizitätsmodul und ν das Poisson-Verhältnis.

Setzt man Gleichung (2.36) in die Bewegungsgleichung (2.34) ein, erhält man:

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \lambda \cdot \frac{\partial e_{kk}}{\partial x_i} + 2 \cdot G \cdot \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_j} + f_i \quad . \quad (2.38)$$

Mit der Voraussetzung infinitesimaler Deformationen $u_i(x_1, x_2, x_3, t)$ lässt sich Gleichung (2.38) unter der Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung linearisieren. Es gilt die Kontinuitätsgleichung für ein inkompressibles Material konstanter Dichte ρ :

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad . \quad (2.39)$$

Damit gelten die linearisierten Beziehungen:

$$\begin{aligned} e_{ij} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad , \\ \frac{dv_i}{dt} &= \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad . \end{aligned} \quad (2.40)$$

In Gleichung (2.38) eingesetzt ergibt die lineare **Navier-Gleichung** für isotrope elastische Materialien:

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = G \cdot \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + (\lambda + G) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) + f_i \quad . \quad (2.41)$$

Mit dem Poisson-Verhältnis ν der Gleichung (2.37) ergibt sich:

$$\nu = \frac{\lambda}{2 \cdot (\lambda + G)} \quad , \quad (2.42)$$

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = G \cdot \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{1 - 2 \cdot \nu} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) + f_i \quad . \quad (2.43)$$

2.3.2 Elastische Dehnungsenergie

Für einen elastischen Körper, der einer endlichen Deformation (2.5) $u_i = x_i - a_i$ ausgesetzt ist, mit den Koordinaten a_i vor und x_i nach der Deformation, existiert eine volumenspezifische **Dehnungs-Energiefunktion** $\rho_0 \cdot W(E_{11}, E_{12}, \dots)$, die als Funktion des Greenschen Dehnungstensors E_{ij} dargestellt werden kann. ρ_0 ist die Dichte im nicht deformierten Grundzustand. Die Ableitung der Energiefunktion führt zum Kirchhoffschen Spannungstensor S_{ij} :

$$S_{ij} = \frac{\partial(\rho_0 \cdot W)}{\partial E_{ij}} \quad . \quad (2.44)$$

Auf der anderen Seite lässt sich die Energiefunktion in Abhängigkeit der Deformationsgradienten $\partial x_i / \partial a_j$ darstellen. Dies führt zum Lagrangeschen Spannungstensor T_{ij} :

$$T_{ij} = \frac{\partial(\rho_0 \cdot W)}{\partial \frac{\partial x_i}{\partial a_j}} \quad . \quad (2.45)$$

Wenn die volumenspezifische Dehnungsfunktion als Funktion des Kirchhoffschen Spannungstensors S_{ij} dargestellt wird, erhält man die komplementäre Energiefunktion $\rho_0 \cdot W_k$:

$$E_{ij} = \frac{\partial(\rho_0 \cdot W_k)}{\partial S_{ij}} \quad . \quad (2.46)$$

Den Zusammenhang zwischen dem Greenschen Dehnungstensor E_{ij} und e_{ij} der Gleichung (2.6) gibt die Beziehung:

$$2 \cdot E_{ij} \cdot da_i \cdot da_j = 2 \cdot e_{ij} \cdot dx_i \cdot dx_j \quad . \quad (2.47)$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} E_{ij} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial x_k}{\partial a_i} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial a_j} - \delta_{ij} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} + \frac{\partial u_k}{\partial a_i} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial a_j} \right) \quad , \\ e_{ij} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\delta_{ij} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad . \end{aligned} \quad (2.48)$$

Für infinitesimale Deformation kann man die quadratischen Terme vernachlässigen und man erhält Gleichung (2.40).

Die komplementäre Energiefunktion $\rho_0 \cdot W_k$ erhält man mit der Gleichung:

$$\rho_0 \cdot W_k = S_{ij} \cdot E_{ij} - \rho_0 \cdot W \quad . \quad (2.49)$$

Der Kirchhoffsche Spannungstensor (2.44) lässt sich mit folgender Beziehung in den Cauchyschen Spannungstensor σ_{ij} überführen:

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} \cdot \left(S_{ij} \cdot \left[\delta_{il} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial a_k} + \delta_{ik} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial a_l} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial a_k} \right] \cdot S_{kl} \right) \quad . \quad (2.50)$$

ρ/ρ_0 ist das Verhältnis der Materialdichten im deformierten und im Grundzustand.

2.3.3 Viskoelastisches Modell

Da biologische Materialien, wie wir inzwischen wissen, nicht perfekt elastisch sind, besitzen sie im strengen Sinne keine Dehnungs-Energiefunktion. Wir machen jedoch davon Gebrauch, dass z. B. bei einer zyklischen Belastung und Entlastung die Spannungs-Dehnungsbeziehung nicht wesentlich von der Dehnungsrate abhängt (siehe Abbildung 2.10) und damit die Hysterese des viskoelastischen Materials klein ist. Wenn der Einfluss der Dehnungsrate klein ist, kann die Be- und Entlastungskurve getrennt voneinander betrachtet werden. In den einzelnen Bereichen des Belastungszyklus gelten dann die jeweiligen Spannungs-Dehnungsgesetze und die dazugehörigen Dehnungs-Energiefunktionen. Nach *Y. C. Fung* 1993 wird ein derartiger Belastungszyklus **pseudoelastisch** und die Energiefunktion **pseudo Dehnungs-Energiefunktion** genannt.

Für **inkompressibles** Material konstanter Materialdichte muss Gleichung (2.44) modifiziert werden, da der Druck im Material keinen Bezug zur Dehnung des Materials hat. Der Druck p im Material kann direkt durch Lösen der Bewegungsgleichung ohne Spannungs-Dehnungsrelaxation bestimmt werden. Er wirkt jeweils normal zur Materialberandung. Damit schreibt sich der modifizierte Ansatz für den Kirchhoffschen Spannungstensor:

$$S_{ij} = \frac{\partial(\rho_0 \cdot W)}{\partial E_{ij}} - p \cdot \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial a_j}{\partial x_k} \quad . \quad (2.51)$$

Das pseudoelastische Modell und die pseudo Dehnungs-Energiefunktion lässt sich z. B. auf die Haut, auf Adernwände und auf den Herzmuskel anwenden.

Für weiche biologische Materialien wie das **Myokard** des Herzventrikels kann nach Y. C. Fung 1993 im entspannten Zustand während der Füllphase die vereinfachte Dehnungs-Energiefunktion

$$\rho_0 \cdot W = \frac{c}{2} \cdot (e^Q - Q - 1) + \frac{q}{2} \quad (2.52)$$

benutzt werden. Dabei ist c eine Konstante und q und Q sind quadratische Formen der Greenschen Dehnung:

$$\begin{aligned} Q &= k_{11} \cdot E_{11}^2 + k_{22} \cdot E_{22}^2 + k_{33} \cdot E_{33}^2 + 2 \cdot k'_{12} \cdot E_{11} \cdot E_{22} + 2 \cdot k'_{23} \cdot E_{22} \cdot E_{33} \\ &\quad + 2 \cdot k'_{31} \cdot E_{33} \cdot E_{11} + k_{12} \cdot E_{12}^2 + k_{23} \cdot E_{23}^2 + k_{31} \cdot E_{31}^2, \\ q &= b_{11} \cdot E_{11}^2 + b_{22} \cdot E_{22}^2 + b_{33} \cdot E_{33}^2 + 2 \cdot b'_{12} \cdot E_{11} \cdot E_{22} + 2 \cdot b'_{23} \cdot E_{22} \cdot E_{33} \\ &\quad + 2 \cdot b'_{31} \cdot E_{33} \cdot E_{11} + b_{12} \cdot E_{12}^2 + b_{23} \cdot E_{23}^2 + b_{31} \cdot E_{31}^2, \end{aligned} \quad (2.53)$$

mit den Materialkonstanten k_{ij} und b_{ij} . Die Einheiten von c und b_{ij} sind die einer Spannung. Die Gewichtungsfaktoren k_{ij} sind dimensionslos. Für $c = 0$ beschreibt die Dehnungs-Energiefunktion $\rho_0 \cdot W = q/2$ das **lineare Hooksche Gesetz** elastischer Körper.

Die strukturmechanische Modellierung des Herzmyokards basiert auf Spannungsmessungen an dünnen Muskelfaserschichten von Tierherzen. Dabei zeigt das Myokard ein nicht-lineares und anisotropes Spannungs-Dehnungsverhalten. In Abbildung 2.16 sind die axialen Spannungs-Dehnungskurven einer dünnen Muskelschicht entlang der Muskelfasern in der Muskelschicht und normal zur Muskelschicht dargestellt. Der größte Unterschied der Materialeigenschaften des Myokards besteht in der maximalen Dehnung a_{ii} entlang der ausgewählten Achsen. Wird die Myokardprobe entlang der Muskelfasern gedehnt, beträgt der Grenzwert der Dehnung 1.3. In Richtung senkrecht zu den Muskelfasern der Muskelschicht erhält man den Grenzwert 1.5. Dabei sind die Spannungswerte senkrecht zur Muskelschicht wesentlich kleiner als entlang der horizontalen Achse. Diese nichtlinearen anisotropen Materialeigenschaften des Myokards werden in der pseudo Energiefunktion berücksichtigt.

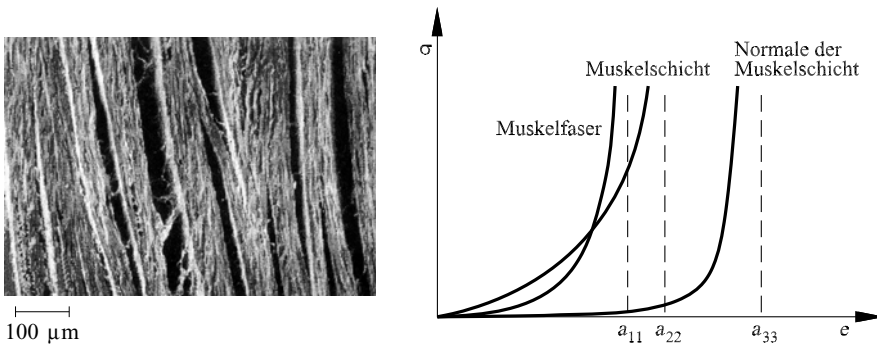


Abb. 2.16: Muskelschicht und Spannungs-Dehnungsmodell des Myokards

Für das Herz sind zahlreiche Vereinfachungen veröffentlicht worden. *J. P. Hunter et al.* 1997 und *J. P. Hunter und B. H. Smaill* 2000 benutzten für den vereinfachten Ansatz der Dehnungs-Energiefunktion:

$$W = k_{11} \cdot \frac{E_{11}^2}{|a_{11} - E_{11}|^{b_{11}}} + k_{22} \cdot \frac{E_{22}^2}{|a_{22} - E_{22}|^{b_{22}}} + k_{33} \cdot \frac{E_{33}^2}{|a_{33} - E_{33}|^{b_{33}}} + k_{12} \cdot \frac{E_{12}^2}{|a_{12} - E_{12}|^{b_{12}}} + k_{13} \cdot \frac{E_{13}^2}{|a_{13} - E_{13}|^{b_{13}}} + k_{23} \cdot \frac{E_{23}^2}{|a_{23} - E_{23}|^{b_{23}}} \quad (2.54)$$

Dabei wird die Dehnungs-Energiefunktion in die einzelnen Anteile der Spannungen entlang der jeweiligen Materialachsen aufgeteilt. a_{ij} bezeichnen die Pole der Grenzdehnungen, b_{ij} die Krümmungen der Spannungs-Dehnungskurve für jede Deformationsachse und k_{ij} sind die Gewichtungsfaktoren der jeweiligen Deformationsmoden. Gleichung (2.54) besteht aus den sechs Anteilen der Deformationsmoden der Greenschen Dehnung E_{ij} . Die ersten drei Terme sind die axialen Moden der Deformation und die verbleibenden drei Terme die Scherdeformationen zwischen den Materialachsen.

Die Dehnungs-Energiefunktion (2.54) ist die erste Ordnung einer Entwicklung um die Pole der Grenzdehnungen. Dabei werden die Kreuzprodukte zwischen den unterschiedlichen Moden den axialen und den Scherdeformationen vernachlässigt. Die Weiterentwicklung der Myokard-Energiefunktion unter Einbeziehung der Kreuzprodukte bleibt weiterführenden Messungen der Mikrostruktur des Myokards vorbehalten.

Für **Blutgefäße** und die **Haut** vereinfacht sich der Ansatz (2.52) der Dehnungs-Energiefunktion:

$$\rho_0 \cdot W = q + c \cdot e^Q \quad (2.55)$$

q und Q sind die Polynome der Dehnungskomponenten (2.53). Gleichung (2.55) unterscheidet sich von (2.52) lediglich durch den Term in der Klammer $-Q - 1$. Dabei wird der experimentellen Tatsache Rechnung getragen, dass in der Umgebung des Grundzustandes ohne Dehnung die Spannungs-Dehnungsrelaxation sich **quasi-linear** verhält und das nichtlineare Verhalten erst bei größeren Dehnungen auftritt. Bei der Energiefunktion (2.52) wird die nichtlineare Korrektur $-Q$ erst bei größeren Dehnungsraten wirksam, ohne dass das quasi-lineare Verhalten der Elastizität bei kleineren Dehnungsraten beeinträchtigt wird.

2.4 Evolutionstheorie

Bisher haben wir die kontinuumsmechanischen Grundlagen der Biomechanik bereitgestellt, um biologische Verbundmaterialien modellieren und damit berechnen zu können. In diesem Kapitel schließen wir an unsere Ausführungen in Kapitel 1 zur natürlichen Evolution an und beschreiben eine ganz andere mathematische Methode, um die Erkenntnisse der natürlichen Biomechanik auf technische Systeme anwenden zu können. Dies führt zur **Evolutionstheorie**, die im Wesentlichen von *I. Rechenberg* 1973 entwickelt wurde.

2.4.1 Evolution und Optimierung

Die natürliche Evolution arbeitet mit dem Zufallsprinzip. Sie konstruiert entgegen der Vorgehensweise in der Technik nicht gezielt Lebewesen, sondern sie sorgt per zufälliger **Mutation** für viele Nachkommen, von denen jeweils nur einige mit allen erdenklichen Umweltbedingungen zurecht kommen. Dieses Auswahlprinzip nennt man **Selektion**. Dieses natürliche Mutations- und Selektionsprinzip kann man, wenn auch aufwendig, auf die Technik übertragen. Die Umsetzung dieses biologischen Prinzips in eine technische Strategie nennt man **Evolutionsstrategie**.

Als Überleitung zum folgenden Kapitel der Bioströmungsmechanik haben wir als einführendes Beispiel der mathematischen Behandlung der Evolutionsstrategie ein Strömungsbeispiel gewählt. Die Abbildung 2.17 zeigt eine längs angeströmte Gelenkplatte, die an zwei Stellen gelagert und mit 5 Gelenken versehen ist. Die Optimierungsaufgabe besteht darin, die Plattenform mit dem geringsten Gesamtwiderstand F_W im Windkanalexperiment zu finden. Jedes Gelenk besitzt 51 Stellstufen. Damit sind 51^5 verschiedene Plattenformen möglich. Von Experiment zu Experiment werden die Winkeleinstellungen der Teilsegmente per Zufallsgenerator bestimmt. Dies entspricht der Nachahmung der natürlichen Mutati-

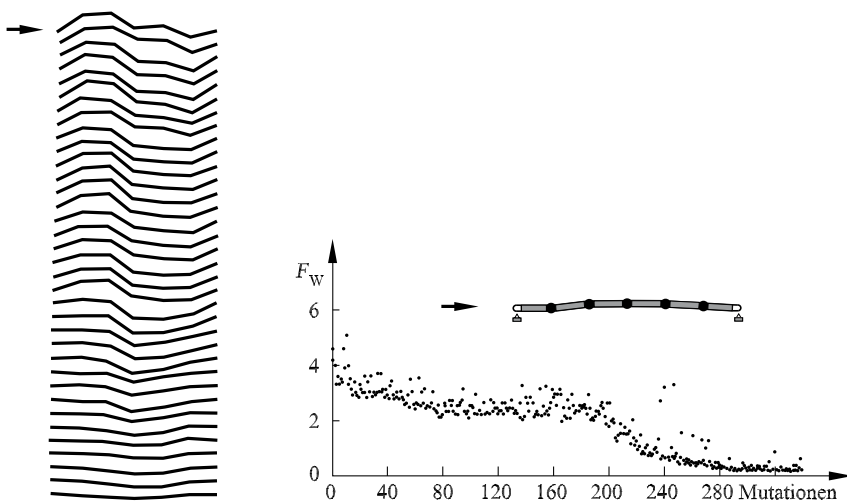


Abb. 2.17: Verlauf der Optimierung der parallel angeströmten Gelenkplatte, *I. Rechenberg* 1973

on. Ist bei einer vorgegebenen Winkelstellung der Widerstand der Plattenform größer als im vorangegangenen Experiment wird diese Plattenform verworfen. Das entspricht der Selektion der Natur. Die Kurve der Abbildung 2.17 zeigt, dass nach einigen hundert Experimenten der Widerstand F_W der geknickten Platte sinkt und sich dem Widerstand der gewölbten Platte nähert bis schließlich die längs angeströmte ebene Platte mit dem geringsten Widerstand erreicht wird.

Dieses Ergebnis der Optimierungsaufgabe hätten wir auch sofort mit den Ausführungen in Kapitel 1.4 und Gleichung (1.9) bestimmen können. Ein umströmter Körper hat einen Druck- und Reibungswiderstand. Bei der längs angeströmten Platte wird der Druckwiderstand Null, da der Gesamtwiderstand ausschließlich aus Reibungswiderstand besteht und der Plattengrenzschicht der Druck aufgeprägt wird. Das Experiment auf der Basis der Evolutionstheorie zeigt jedoch, dass die Evolutionsstrategie das selbe Optimum erreicht und damit für die Optimierung komplexerer technischer Systeme eingesetzt werden kann.

Bei der angestellten Knickplatte im Windkanal führt die Evolutionsstrategie bei der gleichen Experimentreihe auf eine Platte mit S-Schlag zum Widerstandsoptimum.

2.4.2 Evolutionsstrategie

Die mathematische Behandlung der linearen **Evolutionstheorie** nach dem **Mutations-Selektionsprinzip** geht von einer n-dimensionalen Zielfunktion Z , der zu optimierenden Größe

$$Z = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_n \cdot x_n = \sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i \quad (2.56)$$

aus, die von x_n **Einflussgrößen** mit unterschiedlicher Gewichtung c_n abhängt. Die Zielfunktion muss einen Satz von Nebenbedingungen erfüllen. Man geht davon aus, dass die Zielfunktion im n-dimensionalen Raum ein Extremum besitzt, z. B. der minimale Gesamtwiderstand F_W im vorangegangenen Beispiel. In der Zielfunktion werden die Variablen x_i per Zufallsgenerator solange variiert bis Z den Extremwert erreicht hat. Mit den daraus resultierenden Werten der Variablen x_i ist die betrachtete Größe optimiert. Je nachdem wie das Auswahlprinzip gewählt wird, unterscheidet man unterschiedliche Evolutionsstrategien.

Das gesuchte absolute Extremum der Variablen bezeichnen wir mit

$$x_1 = x_1^* \quad , \quad x_2 = x_2^* \quad , \quad \dots \quad , \quad x_n = x_n^* \quad . \quad (2.57)$$

Absolutes Extremum deshalb, weil auch Nebenextrema existieren können, wie z. B. bei der gekrümmten Platte der Abbildung 2.17 nach einigen 100 Mutationen.

Die Suche nach dem Extremum beginnt mit den Werten der Variablen

$$x_1 = x_1^{(0)} \quad , \quad x_2 = x_2^{(0)} \quad , \quad \dots \quad , \quad x_n = x_n^{(0)} \quad . \quad (2.58)$$

Deren **Mutationen** werden in der Reihenfolge durchnummeriert 1, 2, 3, ..., wie sie erzeugt werden. Durch den **Selektionsmechanismus** werden aus dieser Folge laufend Punkte eli-

minierte. Wir konstruieren eine zweite Punktfolge $1', 2', 3', \dots$, die nur die jeweiligen Bestwerte durchläuft. Einen neuen Mutationspunkt erhält man nur dann, wenn die nächst höhere Strichnummer eine Verbesserung der Zielfunktion ergibt. Andernfalls wird der Punkt von dem die Mutation ausging die nächst höhere Strichnummer erhalten. Sind demnach von einem Punkt ausgehend mehrere erfolglose Mutationen zu verzeichnen, dann trägt der Punkt mehrere aufeinanderfolgende Strichnummern. Der Optimierungsprozess wird sich demnach an dieser Stelle länger aufhalten. Strichstellen $1', 2', 3', \dots$ werden deshalb Aufenthaltspunkte genannt. Wir bezeichnen den ν -ten Mutationspunkt

$$\mathbf{x}^{(\nu)} = (x_1^{(\nu)}, x_2^{(\nu)}, \dots, x_n^{(\nu)}) \quad (2.59)$$

und den ν -ten Aufenthaltspunkt

$$\mathbf{x}'^{(\nu)} = (x_1'^{(\nu)}, x_2'^{(\nu)}, \dots, x_n'^{(\nu)}) \quad .$$

Damit lässt sich der Mutations-Selektionsalgorithmus für den $(\nu + 1)$ -ten Schritt formulieren:

Mutationskriterium

$$\mathbf{x}^{(\nu+1)} = \mathbf{x}'^{(\nu)} + \mathbf{Z}^{(\nu)} \quad , \quad (2.60)$$

Selektionskriterium

$$\mathbf{x}'^{(\nu+1)} = \begin{cases} \mathbf{x}^{(\nu+1)} & \text{für } Z(\mathbf{x}^{(\nu+1)}) \geq Z(\mathbf{x}'^{(\nu)}) \\ \mathbf{x}'^{(\nu+1)} & \text{für } Z(\mathbf{x}^{(\nu+1)}) < Z(\mathbf{x}'^{(\nu)}) \end{cases} \quad (2.61)$$

$\mathbf{Z}^{(\nu)}$ ist ein Zufallsvektor, dessen Komponenten $Z_1^{(\nu)}, Z_2^{(\nu)}, \dots, Z_n^{(\nu)}$ mit einem Zufalls-generator bestimmt werden. Der Zufallsvektor sei nach einer Gauß-Normalverteilung im n -dimensionalen Raum verteilt:

$$w(\mathbf{Z}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma}} \right)^n \cdot e^{-\frac{1}{2 \cdot \sigma^2} \cdot \mathbf{Z}^2} \quad (2.62)$$

Gleiche Wahrscheinlichkeitsdichten w werden durch Schalen von Hyperkugeln beschrieben, die sich konzentrisch um den Aufenthaltspunkt $\mathbf{x}'$ anordnen. In radialer Richtung nimmt die Wahrscheinlichkeitsdichte nach der Gaußschen Glockenkurve ab, wobei die Streuung σ das Maß der Abnahme bestimmt.

Aufgrund des Selektionskriteriums (2.61) bilden die zu den Punkten $\mathbf{x}'^{(1)}, \mathbf{x}'^{(2)}, \dots, \mathbf{x}'^{(\nu)}$ gehörenden Zielwerte eine monoton nicht fallende Zahlenfolge:

$$Z(\mathbf{x}'^{(1)}) \leq Z(\mathbf{x}'^{(2)}) \leq \dots \leq Z(\mathbf{x}'^{(\nu)}) \leq \dots \quad (2.63)$$

Bei einem sinnvoll gestellten Optimierungsproblem kann man voraussetzen, dass die Folge nach oben beschränkt ist. Eine monoton nicht fallende Zahlenfolge konvergiert gegen ihre obere Grenze. Damit strebt die Zahlenfolge (2.63) mit wachsender Zahl ν gegen den Zielwert $Z(\mathbf{x}^*)$.

Mathematisch ergibt sich mit Gleichung (2.62) für die Erfolgswahrscheinlichkeit w_e

$$w_e(\mathbf{x}') = \int \dots \int_G w(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot d\mathbf{x} = \left(\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma}} \right)^n \cdot \int \dots \int_G e^{-\frac{1}{2 \cdot \sigma^2} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2} \cdot d\mathbf{x} \quad (2.64)$$

Die Tatsache, dass eine Folge von Punkten $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots$ zu einem Extremwert der Zielfunktion Z konvergiert, ist lediglich von theoretischem Interesse. Es kommt vor, wie in Abbildung 2.17 gezeigt, dass durch den Mutations-Selektionsalgorithmus (2.60) und (2.61) in der Zahlenfolge (2.63) an manchen Stellen das Gleichheitszeichen Übergewicht bekommt und erst nach mehreren Millionen Gleichheitszeichen wieder eine Verbesserung der Zielfunktion eintritt. Damit das Mutations-Selektionsverfahren an der Stelle $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}^*$ nicht verharret, muss die Bedingung $w_e(\mathbf{x}') > 0$ in die schärfere Bedingung

$$w_e(\mathbf{x}') \geq \delta \quad (2.65)$$

abgeändert werden, wobei δ ($0 < \delta < 1$) eine vorgegebene nicht zu kleine Zahl ist.

Lässt sich eine Zielfunktion (2.56) angeben, die für alle $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}^*$ die Integralbedingung

$$w_e(\mathbf{x}') = \left(\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma}} \right)^n \cdot \int_G \dots \int_G e^{-\frac{1}{2 \cdot \sigma^2} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2} \cdot d\mathbf{x} \geq \delta \quad (2.66)$$

erfüllt, konvergiert das Mutations-Selektionsverfahren.

Mit der dargestellten linearen Evolutionstheorie wurden zahlreiche Beispiele der Natur und Technik berechnet. Ein Beispiel der Biomechanik ist das adaptive Wachstum der Bäume. Dabei stellt sich als Zielfunktion das Prinzip der konstanten Spannungen heraus. Es besagt, dass im zeitlichen Mittel auf der Baum- beziehungsweise Bauteiloberfläche überall die gleiche Spannung wirkt und die Belastung gleichmäßig verteilt wird. Brechen beim Sturm Äste ab oder verzweigt sich der Baum neu, bestimmt diese biomechanische Selbstoptimierung unter der Nebenbedingung möglichst geringen Materialaufwandes die sich stetig wandelnde Form des Baumes. Das Gleiche gilt für technische Tragwerke, sie bei gleichverteilten Lasten möglichst leicht und dennoch mechanisch stabil zu konstruieren. Dem entspricht die alte Forderung der Baustatik, die Formoptimierung bei geringstmöglichem Materialaufwand zu erzielen. Nach diesem Prinzip wurden Leichtmetallfelgen, Motoraufhängungen und der Bionic Car der Abbildung 1.40 entworfen.

Strömungsmechanische Beispiele sind z. B. der Rohrkrümmer oder die Venturi-Düse für die Durchflussmessung einer Zweiphasenströmung. Dabei ist die Zielfunktion eine Krümmer- beziehungsweise Düsengeometrie mit geringstmöglichen strömungsmechanischen Verlusten zu finden. Ein Beispiel der Bioströmungsmechanik ist die Optimierung des Hämatokritwertes des Blutes im menschlichen Kreislauf. Der Hämatokritwert ist definiert als prozentualer Anteil der roten Blutkörperchen (Erythrozyten) am Gesamtblut. Er liegt beim Menschen zwischen 42 und 44 %. Um möglichst viel Sauerstoff transportieren zu können (Zielfunktion) sollte der Hämatokritwert möglichst groß sein. Gleichzeitig sollte jedoch der Volumenstrom durch die Adern maximal sein (Nebenbedingung). Steigt jedoch der Partikelanteil im Blut, wird dieses zähflüssiger und zeigt zunehmend nicht-Newtonsches Verhalten. Als Folge steigen die Strömungsverluste insbesondere in den Adern des Kreislaufes mit kleinem Durchmesser. Mit der Anwendung der Evolutionstheorie findet man den natürlichen Wert als Optimum, was wiederum ein Nachweis für die Tragfähigkeit der vorgestellten Evolutionsstrategie ist.

Bioströmungsmechanik

Grundlagen, Methoden und Phänomene

Oertel jr., H.; Ruck, S.

2012, IX, 309 S. 302 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-8348-1765-5