

Möglichkeiten und Grenzen mathematisch-statistischer Methoden bei der Quantifizierung von Risiken

Hubert Bornhorn

1	Einleitung.....	47
2	Klassische Ansätze im Überblick.....	48
2.1	Expected-Utility-Modelle	49
2.2	Arbitrage-Modelle	51
2.3	Value at Risk-Modelle	52
3	Kritik der klassischen Annahmen	53
3.1	Rationale Investoren.....	53
3.2	Arbitragefreiheit	55
3.3	Normalverteilung der stetigen Renditen	59
3.4	Unabhängigkeit der Renditen.....	62
4	Alternative Sichtweisen	64
4.1	Behavioral Finance, Neuroeconomics.....	64
4.2	Kapitalmärkte als komplexe Systeme; mikroskopische Simulation	67
	Literaturverzeichnis	70

1 Einleitung

Das Geschäft von Finanzinstitutionen wie Banken oder Asset Managern besteht naturgemäß im Eingehen von Finanzrisiken unterschiedlichster Art zur Erwirtschaftung von Gewinnen. Dies stellt die Branche vor ein systemimmanentes Problem: Kredit- und Marktrisiken oder auch operativen Risiken ist gemein, dass sie sich auf den ersten Blick einer Messbarkeit entziehen und sowohl Eintreten wie Höhe wahrscheinlichkeitsbehaftet sind. Es wundert daher nicht, dass mathematisch-statistische Methoden bei der Quantifizierung von solchen Risiken Anwendung finden. Was verwundern mag, ist die relativ junge Tradition dieser Methode in der Finanzwirtschaft – ihre Geburtsstunde kann auf das Jahr 1900 festgelegt werden, in dem Bachelier seine damals wenig beachtete Doktorarbeit *Théorie de la spéculation* (vgl. Bachelier 1900) der Universität von Paris vorlegte. In dieser Arbeit formulierte Bachelier die erste Theorie des Random Walk und testete diese anhand empirischer Daten von Finanzinstrumenten, die heutigen Futures oder Optionen ähneln. Vergleicht man diese gerade einmal 110 Jahre währende Geschichte höherer Mathematik in der Finanzwirtschaft mit dem Alter der Anwendung solcher Methoden in der Versicherungswirtschaft, so rechtfertigt sich trotz natürlich sehr unterschiedlicher Ansätze das Adjektiv „jung“: Die Entstehung des Wirtschaftszweiges Versicherung im 17. Jahrhundert war ohne die gleichzeitige Entwicklung der (Lebens-)Versicherungsmathematik nicht denkbar.

Trotz ihrer relativ kurzen Historie kann die mathematisch-statistische Methode innerhalb der Finanzbranche eine beeindruckende Liste von Erfolgen vorweisen. Genannt sei hier aus Sicht der Praxis z. B. der Aufstieg des Risikomaßes Value at Risk von einer Eigenentwicklung durch J. P. Morgan zum Industriestandard. Aus Sicht der Theorie kann man diverse Nobelpreise für Wirtschaftswissenschaften anführen, z. B. Markowitz (Portfoliotheorie), Merton und Scholes (Black-Scholes-Merton-Optionspreistheorie) u. v. m.

Letztere Theorie hatte z. B. für die Entwicklung der heutigen Derivate-Märkte in etwa den Einfluss, den die Versicherungsmathematik auf die Entwicklung der Versicherungsbranche hatte: Vor den bahnbrechenden Arbeiten zur Optionsbewertung von Black, Scholes und Merton im Jahre 1973 herrschte große Unsicherheit darüber, wie eine Option überhaupt zu bewerten sei. Die Folge waren große Geld-Brief-Spannen für Optionen und ein daraus resultierender illiquider Handel. Nach diesen Veröffentlichungen wuchs der Markt für Optionen in knapp 40 Jahren zu seiner heutigen, weltumspannenden Größe heran.

In diesem Aufsatz soll die Geschichte der mathematisch-statistischen Methode bei der Messung von Finanzrisiken kritisch untersucht werden. Dabei wird weder Anspruch auf Vollständigkeit noch auf Originalität erhoben. Hauptaugenmerk wird (aufgrund der erwiesenermaßen vorhandenen Möglichkeiten) auf die Grenzen der Methode gelegt.

Im ersten Abschnitt werden die aus Sicht des Autors wichtigsten klassischen Ansätze wie etwa Portfoliotheorie, CAPM, Black-Scholes-Optionspreistheorie oder auch Value at Risk genannt. Die große Bedeutung und Schlagkraft dieser Modelle beruht auf ihrer Einfach-

heit. Sie sind allesamt analytischer Natur, d. h. sie werden durch eine geschlossene Formel beschrieben. Die Gültigkeit dieser Modelle ist jedoch nur unter sehr restriktiven, stark vereinfachenden Annahmen an den Kapitalmarkt zu zeigen. Diese Voraussetzungen für die klassische Theorie werden ebenfalls im ersten Abschnitt dargestellt.

Im zweiten Abschnitt werden einige (verhaltens-)ökonomische und statistische Indizien aus der Literatur gegen vier ausgewählte Annahmen der klassischen Theorie dargestellt. Diese Annahmen sind: Rationalität der Investoren, Arbitragefreiheit, Normalverteilung und Unabhängigkeit der Renditen.

Im dritten Abschnitt werden alternative Sichtweisen präsentiert. Der Weg führt dabei vom kleinsten Bestandteil eines Kapitalmarktes – dem einzelnen Investor – zum gesamten Markt. Auf der „mikroskopischen“ Modellebene des jeweiligen Anlegers basiert die vorgeschlagene Alternative zur klassischen Sichtweise des rationalen Investors auf der Theorie des Behavioral Finance oder sogar noch weitergehend auf der noch sehr jungen, interdisziplinären Neuroökonomie. Diese realistischere Sichtweise auf unterster Ebene führt auf der makroskopischen Ebene des Gesamtmarktes notwendigerweise zu Problemen die Modellberechenbarkeit betreffend. Geschlossene Formeln sind hier nicht mehr zu erwarten. Deswegen wird für die oberste Modellschicht die Methode der mikroskopischen Simulation vorgeschlagen. Hierunter versteht man die Stück für Stück durchgeführte Simulation der zahlreichen mikroskopischen Bestandteile eines großen Systems. Aus dem jeweiligen Verhalten der vielen Einzelteile wird dann zusammen mit der Interaktion dieser untereinander das Gesamtmodell des Marktes (inkl. Marktpreise, Handelsvolumina etc.). Die Vorgehensweise steht im Gegensatz zu Verfahren wie etwa der Monte-Carlo-Simulation, in der makroskopische Modellvariablen wie Marktpreise direkt über eine Verteilungsannahme simuliert werden.

Die mikroskopische Simulation hat ihren Ursprung in der ökonomischen Forschung, stellt aber nicht zuletzt aufgrund ihrer Flexibilität und Realitätsnähe eine interessante zukünftige Entwicklungsmöglichkeit für die mathematisch-statistische Methode zur Quantifizierung von Risiken dar.

2 Klassische Ansätze im Überblick

Im Folgenden sollen einige klassische Ansätze im Überblick dargestellt werden. Dabei wird explizit Wert auf die Darstellung der den Ansätzen zugrunde liegenden Annahmen gelegt. Auf die Ansätze selber wird aufgrund ihres hohen Bekanntheitsgrades nur stichpunktartig eingegangen.

2.1 Expected-Utility-Modelle

Expected-Utility-Modelle gehen davon aus, dass Marktakteure sich rational verhalten. Rationalität wird dabei in Form von Präferenzen ausgedrückt, die jedem rationalen Investor gemein sein sollten. Bevorzugt ein Anleger z. B. eine Investmentalternative gegenüber einer zweiten und bevorzugt er diese zweite Alternative gegenüber einer dritten, so wird er auch die erste Alternative der dritten vorziehen. Auf diese Art lässt sich die Rationalität eines Investors durch einige wenige ähnlich einfache Regeln axiomatisieren. Dabei werden die alternativen Wahlmöglichkeiten als Zufallsgrößen L (oder auch Lotterien) mit bekannten Verteilungsfunktionen angesehen. Eine Präferenz einer Zufallsgröße L_1 gegenüber einer anderen L_2 wird dabei durch die Schreibweise $L_1 \succ L_2$ abgekürzt, eine strikte Präferenz (d. h. $L_1 \succ L_2$ aber nicht $L_2 \succ L_1$) durch $L_1 \succ L_2$. Eine Mischung $\alpha \cdot L_1 + (1-\alpha) \cdot L_2$ ($\alpha \in [0;1]$) zweier Zufallsvariablen L_1 und L_2 (mit Verteilungsfunktionen F_1 und F_2) ist dabei eine Zufallsvariable, deren Verteilung durch $\alpha \cdot F_1 + (1-\alpha) \cdot F_2$ gegeben ist.

■ **Vollständigkeitsaxiom:**

Die Entscheider haben Präferenzen bezüglich aller Zufallsgrößen, d. h. für je zwei Zufallsgrößen L_1, L_2 gilt $L_1 \succ L_2$ oder $L_2 \succ L_1$ oder beides.

■ **Transitivitätsaxiom:**

Die Entscheider bringen die einzelnen Zufallsgrößen in eine konsistente Reihenfolge, d. h. für je drei Zufallsgrößen L_1, L_2, L_3 folgt aus $L_1 \succ L_2$ und $L_2 \succ L_3$ die Relation $L_1 \succ L_3$ (s. o.).

■ **Stetigkeitsaxiom:**

Für je drei Zufallsgrößen gibt es eine Mischung der besten und der schlechtesten, die der mittleren vorgezogen wird bzw. gegenüber der die mittlere vorgezogen wird. D. h. für je drei Zufallsgrößen L_1, L_2, L_3 mit $L_1 \succ L_2 \succ L_3$ gibt es $\alpha, \beta \in]0;1[$ mit $\alpha \cdot L_1 + (1-\alpha) \cdot L_3 \succ L_2 \succ \beta \cdot L_1 + (1-\beta) \cdot L_3$.

■ **Unabhängigkeitsaxiom:**

Haben die Entscheider eine Präferenz einer Zufallsgröße gegenüber einer anderen, so bleibt diese Präferenz erhalten, wenn man beide Zufallsgrößen mit einer gemeinsamen dritten mischt. D. h. für je drei Zufallsgrößen L_1, L_2, L_3 gilt: aus $L_1 \succ L_2$ folgt $\alpha \cdot L_1 + (1-\alpha) \cdot L_3 \succ \alpha \cdot L_2 + (1-\alpha) \cdot L_3$ für alle $\alpha \in]0;1[$.

Nach dem Theorem von v. Neumann und Morgenstern (vNM; vgl. von Neumann/Morgenstern 1947) handeln Marktteilnehmer, die einem solchen Axiomensystem gehorchen, so, als ob sie über eine einfache in Zahlen auszudrückende Repräsentation ihrer Präferenzen verfügen würden, d. h. als ob sie mit jedem (absoluten) Vermögen w eine Zahl $U(w)$ – dessen Nutzen (engl. utility) – verbinden würden. Die Theorie besagt dann weiter, dass die (gemäß Axiomensystem) rationalen Investoren die Investmentalternative (d. h. die Zufallsgröße) wählen, die den Erwartungswert des Nutzens U maximal werden lässt.

Derart rationale Investoren bilden die Grundvoraussetzung für diverse bei der Quantifizierung von Finanzrisiken Verwendung findende Theorien. Als Beispiele seien hier die

moderne Portfoliotheorie nach Markowitz/Tobin und das CAPM genannt. In der Portfoliotheorie wird das Gesamtrisiko eines Portfolios durch seine Standardabweichung repräsentiert. Selbige ergibt sich unter Einbeziehung der Diversifikation aus den einzelnen Standardabweichungen der im Portfolio enthaltenen Wertpapiere. Im CAPM wird das Risiko eines einzelnen Wertpapiers zerlegt in ein systematisches/undiversifizierbares und ein unsystematisches/diversifizierbares Risiko. Das systematische Risiko wird dabei durch das Beta des jeweiligen Wertpapiers zum Markt gemessen. Auf Portfoliotheorie und CAPM fußen risikoadjustierte Performancemaße wie etwa Treynor-, Sharpe- oder Jensen-Maß.

Zur mathematischen Herleitung dieser Theorien benötigt man über die reine Erwartungsnutzenmaximierung der Investoren hinaus noch weitere Annahmen wie z. B. Risikoaversion, homogene Erwartungen bzgl. künftiger Renditen, Standardabweichungen und Kovarianzen der einzelnen Wertpapiere und Normalverteilung der Wertpapierrenditen (für eine kritische Betrachtung der letztgenannten Annahme siehe Kapitel 3.3). Auch diverse unrealistische Annahmen über den Kapitalmarkt sind zu treffen wie etwa: Friktionslosigkeit, beliebige Teilbarkeit der Wertpapiere, Möglichkeit von Leerpositionen, identischer Soll-/Habenzins für alle Marktteilnehmer.

Eine Art Rationalität im Mittel (im Gegensatz zur Rationalität jedes einzelnen Investors) stellt die häufig geforderte Eigenschaft der (Informations-)effizienz von Kapitalmärkten dar: der Marktpreis eines Wertpapiers spiegelt zu jeder Zeit alle verfügbare Information wider. Man unterscheidet die folgenden Varianten:

■ Schwache Informationseffizienz:

Alle Informationen zur historischen Kursentwicklung sind bereits in die Kurse eingepreist.

■ Semi-starke Informationseffizienz:

Alle öffentlich verfügbaren Informationen sind bereits in die Kurse eingepreist.

■ Strenge Informationseffizienz:

Alle öffentlich und nicht-öffentlich verfügbaren Informationen (Insider-Informationen) sind bereits in die Kurse eingepreist.

Die obige dreiteilige Definition geht auf Fama zurück (vgl. Fama 1970). Die Informations-effizienz in ihrer strengen Form ist nur von akademischem Interesse, da dieses Extrem in realen Kapitalmärkten mit Sicherheit nicht gegeben ist (sonst dürfte es gar keinen Insiderhandel geben). Informationseffizienz (in welcher Form auch immer) sagt dabei nichts über die Rationalität der Investoren aus. Die Aussage liegt vielmehr darin, dass die Marktteilnehmer auf jede neue Information in schneller (instantaner) Weise reagieren und dies im Mittel in rationaler Weise tun. Vor allem heißt das, dass es über- oder unterreagierende Kräfte im Markt geben mag, im Mittel gleicht sich deren Wirken jedoch aus und der Marktpreis ist gleich dem fundamental richtigen Preis. Man könnte hier von einer Art (hypothetischen) kollektiven Intelligenz oder Schwarmintelligenz des Markts sprechen.

Aus der schwachen Informationseffizienz folgt, dass der zukünftige Preis eines Wertpapiers unabhängig sein sollte von seinen historischen Werten: insbesondere sollte die Zeitreihe der Wertpapierpreise nicht autokorreliert sein (siehe 3.4).

2.2 Arbitrage-Modelle

Die zweite Gruppe von Modellen sind die sogenannten Arbitrage-Modelle wie die Arbitragepreistheorie von Ross oder die Black-Scholes-Formeln zur Bestimmung von Optionspreisen. Über das reine Pricing hinaus spielen diese letzteren Formeln eine große Rolle beim Risiko-Management von derivativen Positionen einer Finanzinstitution, z. B. bei Hedgingfragen und der Messung der verschiedenen Risikodimensionen einer Option über die Optionssensitivitäten („Optionsgriechen“). Dabei ist die Anwendung der Theorie im Risikomanagement nicht einmal auf diesen (offensichtlichen) Bereich beschränkt, da in vielen Finanztransaktionen optionsartige Strukturen enthalten sind. Man denke hier nur an das Merton Modell für Kreditrisiken, in dem die Aktie einer Firma als Call-Option auf ihre Assets angesehen wird (vgl. Merton 1974).

Betrachtet man die zur Herleitung der Arbitrage-Modelle getroffenen Annahmen, so fällt auf, dass diverse der unter 2.1 genannten Annahmen an den Kapitalmarkt wie etwa die homogenen Erwartungen der Marktteilnehmer, die Transaktionskostenfreiheit, die Möglichkeit von Leerpositionen oder auch die Forderung nach einem identischen Soll- und Habenzins für alle Marktteilnehmer auch für die Gültigkeit der Arbitrage-Modelle essentiell sind. Auch die Forderung nach normalverteilten Renditen ist hier von elementarer Wichtigkeit. Auf eine detaillierte Auflistung der einzelnen Unterschiede in den Grundvoraussetzungen zwischen Expected-Utility- und Arbitrage-Modellen wird aber verzichtet. Vielmehr soll die zentrale Voraussetzung dieser zweiten Gruppe von Modellen beleuchtet werden: die Arbitragefreiheit des Marktes.

Diese Forderung stellt eine Abschwächung gegenüber der in 2.1 angenommenen Rationalität aller Marktpartizipanten dar. Anhand der Black-Scholes-Theorie kann man sich dies beispielhaft wie folgt vor Augen führen: zur Herleitung der Black-Scholes-Differentialgleichung benötigt man die (aus der Arbitragefreiheit folgende) Aussage, dass ein risikoloses Portfolio Π den risikolosen Zins r verdienen muss. Für die Etablierung dieser Aussage müssen aber bei weitem nicht alle Investoren rational handeln. Im Extrem reicht ein einziger rationaler, „unersättlicher“ Anleger aus, der erkennt, dass

- $r' = \text{Rendite}(\Pi) > r$ bzw.
- $r' < r$

ist und dann

- das Portfolio Π auf Kredit kauft, um es am Ende des Zeithorizonts T zu $\Pi \cdot e^{rT}$ wieder zu verkaufen und den Kredit zurückzubezahlen bzw.
- das Portfolio Π leer verkauft und den Erlös zum Zinssatz r anlegt, um mit diesem Geld ($= \Pi \cdot e^{rT}$) die Leerposition am Ende des Zeithorizonts wieder einzudecken.

In jedem Fall behält er einen risikolosen Gewinn von $\Pi \cdot |e^{rT} - e^{r'T}|$ und betreibt diese „Geldmaschine“ in so großem Umfang, dass sich die Arbitragefreiheit (d. h. die Gleichheit $r' = r$) einstellt.

Wie man anhand der obigen Argumentation erahnt, scheint die Arbitragefreiheit des Marktes (d. h. das schnelle Verschwinden evtl. vorhandener Arbitragemöglichkeiten) vom Vorhandensein rationaler, den Markt bereinigender Kräfte abzuhängen. In Abschnitt 3.2 wird dies und die Frage nach der oben implizit angenommenen Risikolosigkeit realer Arbitragegeschäfte diskutiert.

2.3 Value at Risk-Modelle

Um die Methodenvielfalt des Risikomanagements zu vervollständigen wird an dieser Stelle auf das Value at Risk-Konzept eingegangen. Vorweg sei angemerkt, dass hier ein Systembruch vermutet werden könnte, da die in 2.1 und 2.2 erwähnten Modelle der Theorie entstammen und demnach wissenschaftlich untermauert sind. Value at Risk (VaR) ist zumindest dem Ursprung nach eher eine dem Wunsch nach einem einfachen und leicht zu kommunizierenden Risikomaß entstammende Entwicklung der Praxis.

Ihr Weg zum Standard-Risikomessungstool der Finanzbranche begann im Jahr 1993, in dem die Group of Thirty den Gebrauch dieses Risikomaßes für derivative Portfolien empfahl. Ein Jahr später veröffentlichte J. P. Morgan dann mit RiskMetrics die erste detaillierte Beschreibung zur Berechnung des VaR großer, komplex strukturierter Portfolien. Der VaR ist dabei definiert als der Verlust auf das betrachtete Portfolio, der mit einer gegebenen (hohen) Wahrscheinlichkeit (z. B. 95 Prozent oder 99 Prozent etc.) auf Sicht eines gegebenen Zeithorizonts nicht überschritten wird. Aus mathematischer Sicht ist der VaR also schlicht ein Quantil der Verlustverteilung. Im Wesentlichen gibt es drei Methoden, den VaR eines Portfolios zu berechnen: den Varianz-Kovarianz-Ansatz, die Monte-Carlo Simulation und die historische Simulation. Die erste Methode ist analytischer Natur, d. h. sie stellt unter Berücksichtigung aller Varianzen und Kovarianzen der einzelnen im Portfolio gehaltenen Wertpapiere (oder besser aller Portfolio-Risikofaktoren) eine geschlossene Formel für den VaR zur Verfügung. Abhängig vom Kapitalmarktinstrument, für das der VaR berechnet werden soll, zerfällt der Varianz-Kovarianz-Ansatz eigentlich in zwei Methoden: die Instrumente, deren Wertänderung in einer linearen Abhängigkeit vom jeweiligen Underlying steht (wie etwa eine Aktie oder ein Future darauf) werden mit der Delta-Normal-Methode behandelt. Der VaR von in dieser Hinsicht nicht-linearen Instrumenten (wie nahezu jede Form von Option) wird mit dem Delta-Gamma-Ansatz berechnet.

In jedem Falle geht in den Varianz-Kovarianz-Ansatz die Annahme der multivariaten Normalität der Verlustverteilungen der Portfolio-Risikofaktoren zentral ein (für eine Kritik siehe 3.3). Bei der Delta-Gamma-Methode geht darüber hinaus noch das Delta und Gamma der betrachteten Option ein (daher der Name der Methode). An dieser Stelle fußt also die VaR-Berechnung einer Option nicht nur auf der Normalverteilungsannahme sondern auch auf der Black-Scholes-Theorie inkl. ihrer impliziten Annahmen über den Kapitalmarkt (siehe 2.2 und 2.1).

Die beiden Simulationsmodelle kommen mit weniger weitgehenden Modellannahmen zurecht. Die Monte-Carlo-Simulation kann im Prinzip mit jeder beliebigen Form von Verlustverteilung durchgeführt werden. Allerdings ist die Annahme einer Modellverteilung für z. B. einen Aktienkurs immer eine Art „makroskopische“ Vorgehensweise, in der das Modellverhalten nicht durch die Dynamik der einzelnen Investoren erzeugt wird (siehe Einleitung und 4.2).

Im Falle der historischen Simulation kommt man naturgemäß ganz ohne jede Verteilungsannahme aus. Allerdings stellt sich hier die Frage nach der richtigen Länge der zur Berechnung herangezogenen Historie. Bei zu kleiner Historie ist diese eventuell nicht repräsentativ, bei zu großer Historie sind weite Teile der Zeitreihe vielleicht für das heutige Marktumfeld gar nicht mehr von Bedeutung.

3 Kritik der klassischen Annahmen

Die oben dargestellten, allgemein akzeptierten Modelle haben einen gemeinsamen Vorteil und eine gemeinsame Schwäche: Sie stellen für eine gewisse finanzwirtschaftliche Fragestellung eine analytische Lösung (d. h. eine einfach auszuwertende geschlossene Formel) zur Verfügung. Das gelingt aber nur, indem sehr umfangreiche und unrealistische Forderungen an die Beschaffenheit des Kapitalmarkts gestellt werden. Im Folgenden werden einige dieser Annahmen kritisch beleuchtet.

3.1 Rationale Investoren

Die ersten Einwände gegen die Theorie des Erwartungsnutzens kamen recht bald nach der Veröffentlichung der vNM-Theorie im Jahre 1947 (vgl. von Neumann/Morgenstern 1947). Allais (vgl. Allais 1953) hatte Experimente konstruiert, in denen Probanden zwischen zwei einfach gearteten Lotterien (d. h. Zufallsgrößen) wählen sollten. Die Auswahl-situation zwischen mehreren Glücksspielen war dabei so konstruiert, dass sie Rückschlüsse auf die Rationalität des Entscheidungsträgers zuließen. Aus heutiger Sicht sind diese Untersuchungen in die damals in Entwicklung befindliche wissenschaftliche Disziplin der verhaltensorientierten Finanzlehre („Behavioral Finance“, siehe 4.1) einzuordnen.

Die Wahl der Probanden in den obigen Experimenten zeigte dabei eine systematische Abweichung von der Theorie. In der Darstellung von Kahneman und Tversky (vgl. Kahneman/Tversky 1979) liest sich das Allais-Paradoxon wie folgt:

■ Entscheidung (1) zwischen

Lotterie L₁: 80-prozentige Chance auf 4000\$ und 20-prozentige Chance auf 0\$

Lotterie L₂: 100-prozentige Chance auf 3000\$

■ Entscheidung (2) zwischen

- Lotterie L₃: 20-prozentige Chance auf 4000\$ und 80-prozentige Chance auf 0\$
- Lotterie L₄: 25-prozentige Chance auf 3000\$ und 75-prozentige Chance auf 0\$

Die meisten Probanden bevorzugten L₂ gegenüber L₁ und L₃ gegenüber L₄. Dies steht aber nicht im Einklang zur vNM-Theorie: Bezeichnet man mit O die Lotterie, in der man mit 100-prozentiger Wahrscheinlichkeit nichts gewinnt, so ist L₃ eine Mischung aus 1/4 mal L₁ und 3/4 mal O (kurz $L_3 = 1/4 \cdot L_1 + 3/4 \cdot O$). Aus der 80-prozentigen Gewinnchance in L₁ wird somit eine nur noch 20-prozentige Gewinnchance in L₃. Mit der gleichen Überlegung erhält man $L_4 = 1/4 \cdot L_2 + 3/4 \cdot O$. Nach dem Unabhängigkeitsaxiom (siehe 2.1) sollte nun aber aus der Präferenz $L_2 \succ L_1$ durch Mischung mit O die Präferenz $L_4 \succ L_3$ folgen, was im Widerspruch zum empirischen Befund steht. Dies zeigt ein in solchen und ähnlichen Experimenten häufig anzutreffendes Phänomen: Die Probanden haben einen starken Hang zum sicheren Ausgang („certainty effect“). Dem Allais-Paradoxon folgte eine Welle von Untersuchungen zum Verhalten von Personen bei Entscheidungen unter Risiko. Diese zeigten u. a. nicht nur wie oben Abweichungen von der vNM-Theorie sondern auch deutliche Indizien gegen die Risikoaversion von rationalen Investoren, d. h. gegen den Fall rationaler Investoren mit konkaver Nutzenfunktion. Genau genommen ist die Risikoaversion zwar kein integraler Bestandteil der Erwartungsnutzentheorie, wird aber in vielen Modellen (z. B. Portfoliotheorie, CAPM) als über die Rationalität der Investoren hinausgehende Eigenschaft angenommen. Das in den Untersuchungen aufgedeckte Risikoverhalten von Investoren sei durch den folgenden Auszug aus einer Tabelle in Tversky/Kahneman 1992 musterhaft dargestellt:

Tabelle 3.1 Risikoaversion/Risikofreude

In der Tabelle sind Lotterien mit ihrem jeweiligen Median des Sicherheitsäquivalents C dargestellt. Das Sicherheitsäquivalent C für eine Lotterie L ist der sichere Betrag, bei dem der Entscheidungsträger indifferent zwischen C(L) und L ist. Dargestellt sind die Mediane der empirischen Sicherheitsäquivalente aus der Studie in Tversky/Kahneman 1992. Ein Entscheidungsträger heißt risikoavers, falls $C(L) < E(L)$, risikoneutral, falls $C(L) = E(L)$ und risikofreudig, falls $C(L) > E(L)$.

Ablesebeispiel: Für eine Lotterie mit einer 5-prozentigen Chance auf einen Gewinn von 100\$ und einer 95-prozentigen Chance auf 0\$ ist der Median des Sicherheitsäquivalents gleich 14\$ (linker, oberer Eintrag).

Ausgänge der Lotterie	Wahrscheinlichkeiten	
	(0,95 ; 0,05)	(0,05 ; 0,95)
(0\$; 100\$)	C = 14\$ (risikofreudig)	C = 78\$ (risikoavers)
(0\$; -100\$)	C = -8\$ (risikoavers)	C = -84\$ (risikofreudig)

Die Tabelle zeigt Abweichungen vom risikoaversen Verhalten bei Gewinnen mit geringer Wahrscheinlichkeit und Verlusten mit hoher Wahrscheinlichkeit. In beiden Fällen wollen die Probanden (repräsentiert durch ihren Median) „spielen“: einmal um den unwahrscheinlichen aber hohen Gewinn einzustreichen, was die hohe Beliebtheit von Glücksspielen erklären könnte, das andere Mal um einem fast sicheren großen Verlust auszuweichen. Risikoavers zeigen sich die Probanden bei Gewinnen mit hoher Wahrscheinlichkeit (ein Hinweis auf den „certainty effect“ beim Allais-Paradoxon) und bei Verlusten mit kleiner Wahrscheinlichkeit. Letzteres könnte ein Indiz für den hohen Bedarf an Versicherungen sein.

Zum Schluss dieser Argumentation mag man nun einwenden, dass dies nur irrationales Verhalten in einer künstlichen geschaffenen Labor-Situation ist. In realen Märkten sind Abweichungen von der Rationalität jedoch genau so vielfältig und häufig anzutreffen. Als Beispiele seien hier die zwei Schlagwörter „equity premium puzzle“ und „disposition effect“ genannt. Für weitergehende Details und eine beispielhafte Erklärung dieser beiden Anomalien im Lichte der Behavioral Finance siehe Abschnitt 4.1.

3.2 Arbitragefreiheit

Die durch die klassische Theorie geforderte absolute Arbitragefreiheit ist nur ein theoretisches Konstrukt. In realen Märkten ist dies so nicht gegeben und die obige Forderung ist eher als sehr schnelles Verschwinden jeglicher Arbitragemöglichkeit zu lesen. In diesem Abschnitt wird diese Lesart der Darstellung in Shleifer 2000 folgend kritisch durchleuchtet.

Auf den ersten Blick könnte die Anforderung an die Rationalität der Investoren als eine *conditio sine qua non* für die Arbitragefreiheit erscheinen. Jedoch kann man diese Annahme sukzessiv abschwächen ohne z. B. die Effizienz des Marktes (und die daraus folgende Arbitragefreiheit) aufzugeben:

■ Annahme a)

Sollte es im Markt irrationale Investoren geben, so handeln diese unkorreliert zueinander.

■ Annahme b)

Sollte es im Markt dennoch zueinander korrelierte, irrationale Investoren geben, dann treffen sie im Marktgeschehen auf (rationale) Arbitrageure.

Nimmt man a) an, so handeln die irrationalen Investoren nicht in eine bestimmte Richtung. Einige kaufen, andere verkaufen, d. h. sie tauschen untereinander falsch bewertete Finanzgüter aus. Ihre jeweiligen Einflüsse auf die Preisbildung eines Finanzgutes heben sich somit gegenseitig auf und der Preis des Finanzgutes wird durch die rationalen Investoren bestimmt. Ein Markt nach a) ist immer noch effizient, trotz der Anwesenheit irrationaler Investoren. Ein solcher Markt widerspricht aber den Grundeinsichten des Behavioral Finance (s. 4.1). Die unter dem Punkt 3.1 beispielhaft beschriebenen Abweichungen vom

Ideal eines rationalen Anlegers variieren nicht zufällig unter den Probanden, sie haben vielmehr eine Richtung („herd behavior“).

Die obige Argumentation führt direkt zu Annahme b). Das Wirken der irrationalen Investoren ist gerichtet, d. h. sie sind alle bullish bzw. bearish bezüglich eines über- bzw. unterbewerteten Finanzgutes. In jedem Falle würden sie – sich allein überlassen – die Fehlbewertung im Markt nur noch verschlimmern. An dieser Stelle greifen die rationalen Arbitrageure in das modellhafte Marktgeschehen ein. Angenommen ein Finanzgut sei überbewertet gegenüber seinem fundamentalen Wert. Die rationalen Investoren verkaufen dieses (teure) Gut leer. Den Erlös verwenden sie, um ein in seinen Cashflows möglichst ähnliches (im Idealfall identisches), aber korrekt bewertetes Finanzgut zu kaufen. Auf diese Art und Weise haben sie ihre Risikoposition ausgeglichen und gleich zu Anfang die Differenz zwischen überbewertetem Finanzgut und korrekt bewertetem Substitut vereinnahmt. Für ein unterbewertetes Finanzgut verläuft die Argumentation analog. Die rationalen Arbitrageure bringen den Preis des über- bzw. unterbewerteten Finanzguts durch ihre Verkäufe bzw. Käufe wieder auf den korrekten Marktwert. Da diese Investoren gemäß Modellannahme instantan reagieren, verschwindet die Fehlbewertung schnell und der Markt bleibt effizient. Als Folge der Fehlbewertungen bereinigenden Wirkung der Arbitrageure ist der Markt auch wieder arbitragefrei.

Die obige, qualitative Darstellung zeigt, dass das Vorhandensein von irrationalen Elementen im Markt nicht notwendigerweise Evidenz gegen eine der zentralen Annahmen der klassischen Theorie in sich birgt: die Hypothese der Markteffizienz. Dies gilt aber nur so lange, wie ausreichend viele rationale Investoren im Markt vorhanden sind und sich als Arbitrageure betätigen können. Diese bisher kritiklos als gegeben angenommenen Arbitragemöglichkeiten werden nun einer genaueren Inaugenscheinnahme unterzogen.

Unter einer Arbitrage versteht man den gleichzeitigen Kauf und Verkauf desselben Finanzgutes oder zweier fundamental sehr ähnlicher Finanzgüter zur Bildung einer (annähernd) risikolosen Gesamtposition unter Ausnutzung einer für den Handelnden vorteilhaften Preisdifferenz.

Zur Illustration sei die folgende Situation gegeben. Es seien zwei verschiedene Finanzgüter S_1 und S_2 gegeben, für deren Preise zum Zeitpunkt $t = 0$ die Relation $S_1(0) > S_2(0)$ gelte. Weiterhin werde angenommen, dass S_1 und S_2 fundamental identisch sind und sich ihre Preise daher über einen gewissen Zeithorizont T angleichen:

$$S_1(T) = S_2(T) \text{ mit Wahrscheinlichkeit } 1.$$

Ein Arbitrageur, der dies realisiert, leiht sich S_1 aus und verkauft es unmittelbar darauf leer. Aus dem Erlös erwirbt er S_2 . Der so generierte Profit $S_1(0) - S_2(0)$ ist risikolos, da der Investor zur Auflösung seiner Position nur das Ende des Zeithorizonts T abwarten muss und dann S_2 verkauft, um mit dem Erlös daraus den Eindeckungskauf für seine Short-Position in S_1 zu finanzieren.

Bei genauerem Hinsehen basiert die obige Diskussion auf zwei Hauptforderungen, die gleichzeitig auch ihre Hauptschwächen darstellen:

- a) Verfügbarkeit eines perfekten oder zumindest sehr ähnlichen Substituts S_2 für das Finanzgut S_1
- b) Der Arbitrageur muss die Positionen bis zum Ende des Zeithorizonts T (d. h. bis zur Preiskonvergenz der beiden Finanzgüter) halten können

Gilt einer der beiden Punkte nicht, so ist die Arbitrage, wie die folgende Argumentation zeigt, nicht mehr risikolos. Ein solches Geschäft wird ein risikoaverser Investor aufgrund seiner limitierten Risikotragfähigkeit nur in begrenztem Umfang durchführen. Eine mögliche Folge für den Markt ist, dass die Fehlbewertungen korrigierende Eigenschaft der Arbitrage nicht oder nicht mehr in ausreichendem Umfang vorhanden ist. Der Markt ist nicht mehr effizient.

Um einzusehen, dass das Fehlen eines perfekten/sehr ähnlichen Substituts nach a) zu risikobehafteten Geschäften führt, denke man an einen Kauf von VW-Aktien unter gleichzeitigem Verkauf von BMW-Aktien in selber Höhe (eine Art „pair trade“ wie er typisch wäre für einen Equity Marketet Neutral Hedgefonds). Auf diese Art und Weise kann man zwar das systematische Risiko der Autobranche ausschalten, jedoch ist die Gesamtposition nicht risikolos, da das unsystematische Risiko verbleibt. In realen Märkten sind sehr ähnliche Substitute in der Regel nur für derivative Finanzinstrumente (Optionen, Futures etc.) verfügbar.

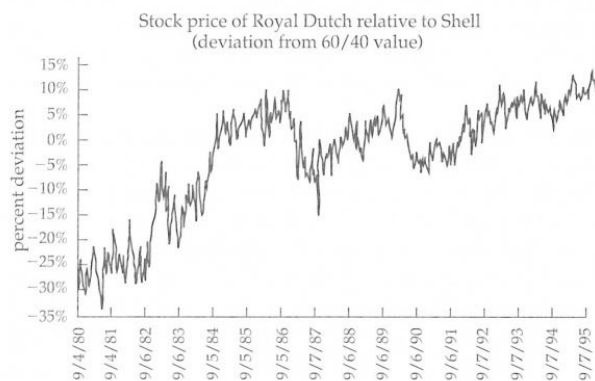
Doch sogar in Fällen, in denen perfekte Substitute im Markt vorhanden sind, kann Arbitrage risikobehaftet sein. Bis zur Aufhebung der Fehlbewertung zum Zeitpunkt T (d. h. $S_1(T)=S_2(T)$) kann sich diese sogar noch verschlechtern. Geht man z. B. davon aus, dass die Überbewertung von S_1 durch irrationale, bzgl. S_1 optimistische Kräfte im Markt erzeugt wurde, so wäre es eine zu vereinfachende Annahme, dass sich dieses bullische Sentiment zum Zeitpunkt der Auflage des Arbitragegeschäfts ($t = 0$) in sein Gegenteil verkehrt. Vielmehr muss der Arbitrageur damit rechnen, dass sich die Überbewertung von S_1 noch verstärkt. Analoge Argumente gelten für die Unterbewertung von S_2 .

In jedem Falle führt die Ausweitung der Fehlbewertung dazu, dass der Investor mit seiner Arbitrage-Position zunächst temporäre Verluste hinnehmen muss. Wenn er die Position durch diese Zeit hindurch bis zum Zeitpunkt T aufrecht erhalten kann, geht das Arbitragegeschäft auf. Sollte er jedoch durch Finanzierungsschwierigkeiten (Margin-Calls etc.) zur Glattstellung seiner Position gezwungen sein, realisiert er mit Verlust.

Das dargestellte Arbitrage-Risiko nennt man nach den uninformierten Marktteilnehmern, die für seine Entstehung verantwortlich sind, Noise-Trader-Risiko. Diese Investoren handeln aufgrund von nicht bewertungsrelevanten oder schon eingepreisten Informationen (d. h. „noise = Rauschen“).

Auch von empirischer Seite ist ein durch Arbitragegeschäfte von Fehlbewertungen bereinigter Markt anzuzweifeln. Sehr anschauliche Evidenz hierfür sind die sogenannten Twin-Securities. Darunter versteht man zwei Firmen aus verschiedenen Ländern, die ihre Geschäfte wie in einer Fusion zusammenlegen ohne dabei aber ihre rechtliche Eigenständigkeit aufzugeben. Solche Modelle für de facto Fusionen werden meistens aus steuerlichen oder politischen Gründen gewählt. Die entsprechenden Verträge stellen sicher, dass die Dividenden unter den beiden Konstituenten des Mergers gemäß einem festgelegten Verhältnis aufgeteilt werden. Da Informationen über die Verbindung der beiden Vertragspartner i. d. R. öffentlich sind, sollte das Verhältnis der Aktienkurse der beiden ursprünglichen Unternehmen in einem Ländergrenzen überschreitenden, effizienten Markt immer genau durch die vorher festgelegte Parität gegeben sein. Dies entspricht jedoch nicht der Realität. Froot und Dabora (vgl. Froot/Dabora 1999) bringen das Beispiel von Royal Dutch und Shell, die im Jahre 1907 gemäß obigem Modell bei einer Parität von 60 zu 40 fusionierten. Abbildung 3.1 stammt aus dem genannten Artikel und zeigt die relativen Abweichungen von der Parität. Man sieht, dass sich die Fehlbewertungen nicht in kurzer Zeit aufheben, sondern sich teilweise sogar noch verschlimmern. Froot und Dabora zeigen durch eine Regression, dass diese zu einem großen Teil durch eine Entwicklung der einzelnen Aktie des Zwillingspaars im Gleichschritt mit dem jeweiligen Heimatmarkt (repräsentiert durch einen marktbreiten Index) erklärt werden können. Dies lässt wiederum auf die Anwesenheit von Noise-Tradern im Markt schließen: diese handeln aufgrund von einer Nicht-Information wie sie z. B. der Handelsplatz resp. nationale Markt der jeweiligen Aktie darstellt.

Abbildung 3.1 Abweichungen von der Royal Dutch/Shell Parität 60 zu 40 (aktualisierte Fassung aus Froot/Dabora 1999, mit freundlicher Genehmigung von K. Froot).



3.3 Normalverteilung der stetigen Renditen

Eine der zentralen Annahmen der klassischen Theorie ist die Normalverteilung der stetigen Renditen

$$R_t^{(\tau)} = \ln \frac{S(t + \tau)}{S(t)}$$

mit einer Zeitdifferenz τ (z. B. 1 min, 1 h, 1d etc.). Diese Voraussetzung hat eine sehr große Bedeutung für die klassische Theorie, da die genaue Form der Verteilung der Renditen klarerweise einen starken Einfluss auf die Einschätzung des Risikogehalts eines Investments hat. Darüber hinaus ermöglicht die Normalverteilung aufgrund ihrer mathematischen „Gutartigkeit“ erst einfache, geschlossen darstellbare Modelle wie die Portfoliotheorie, das CAPM oder die Black-Scholes-Merton-Optionspreistheorie. Auch die Varianz-Kovarianz-Methode zur Bestimmung des Value at Risk fußt in elementarer Weise auf der Normalverteilungsannahme.

Der wohl prominenteste Einwand gegen obige Annahme kam durch Mandelbrot im Jahre 1963 (vgl. Mandelbrot 1963). Mandelbrot untersuchte Baumwollpreise an diversen US-amerikanischen Börsen auf Normalverteilung. Seine empirischen Untersuchungen führten ihn zu der Vermutung, dass die stetigen Renditen für den untersuchten Rohstoff in guter Näherung durch spezielle Mitglieder der Familie der stabilen Verteilungen beschrieben werden. Diese Gruppe von Verteilungsgesetzen besitzt 4 Parameter α , β , γ und δ :

$0 < \alpha \leq 2$:	der Stabilitätsindex oder charakteristische Exponent
$-1 \leq \beta \leq 1$:	der Schiefeparameter
$\gamma > 0$:	der Skalenparameter
$\delta \in \mathbb{R}$	der Lageparameter

Die von Mandelbrot zur Modellbildung herangezogenen Verteilungen dieses Typs sind symmetrisch ($\beta=0$) und unimodal mit einem Modus bei 0 ($\delta=0$). Darüber hinaus wird der Stabilitätsindex $\alpha = 2$ ausgenommen, da dieser zu Normalverteilungen führt. Stabile Verteilungen, die nicht normal sind, werden häufig auch als Pareto-stabile Verteilungen bezeichnet. Um einen endlichen Mittelwert für Verteilungen der betrachteten Klasse zu gewährleisten, nimmt Mandelbrot noch den Bereich der Stabilitätsindizes $\alpha \leq 1$ aus, da hier der Mittelwert nicht existiert. Diese so konstruierte Unterfamilie Pareto-stabiler Verteilungen hat die nachfolgend aufgelisteten Eigenschaften. Dabei bezeichne X eine Zufallsvariable, die einer wie oben dargestellten Pareto-stabilen Verteilung mit Dichte $f_X(x)$ gehorcht.

- Die Varianz von X existiert nicht, d. h. $\text{Var}(X) = \infty$.
- X ist stabil, d. h. eine Summe $Z = X_1 + \dots + X_n$ von unabhängigen, identischen Kopien X_i von X ist auch wieder Pareto-stabil. Dabei bleibt der Stabilitätsindex unverändert (daher der Name) und der Skalenparameter transformiert sich gemäß $\gamma_Z = \gamma_X \cdot n^{1/\alpha}$. Für die Dichtefunktionen gilt:

$$f_Z(x) = n^{-1/\alpha} \cdot f_X(x') \text{ mit } x' = n^{-1/\alpha} \cdot x \quad (3.1)$$

- c) Im Gegensatz zur Normalverteilung fallen die Dichtefunktionen der Pareto-stabilen Verteilungen an den Rändern nicht schnell ab, sondern gehorchen in ihrer Asymptotik einem Potenzgesetz (power law):

$$f_X(x) \sim |x|^{-\alpha-1} \text{ für } |x| \rightarrow \infty$$

In der Sprache von b) stelle man sich vor, dass X eine Rendite in einer minütlichen Skala ist ($\tau = 1$ min). Dann bedeutet b) nichts anderes als, dass Renditen in größeren Skalen auch einer Pareto-stabilen Verteilung gehorchen (man nehme z. B. für $\tau = 1$ h eine Anzahl von $n=60$ Kopien von X). Die via zentralen Grenzwertsatz sonst so vorherrschende Normalverteilung stellt sich hier also in keiner noch so großen Skala ein. Selbiger Satz wäre nebenbei bemerkt wegen der nach a) unendlichen Varianz von X auch gar nicht anwendbar. Eigenschaft c) führt zu den häufig erwähnten „fat tails“. Die Wahrscheinlichkeiten für extreme Ereignisse sind unter Pareto-stabilem Verteilungsverhalten sehr viel höher als unter Annahme der Normalverteilung.

Mandelbrots Vermutung hinsichtlich des Verteilungsverhaltens stetiger Renditen von Aktien, Rohstoffen etc. hat seitdem sehr viel Bestätigung durch empirische Untersuchungen erfahren. Zu nennen wären hier u. a. Fama (vgl. Fama 1965) und Mantegna & Stanley (vgl. Mantegna/Stanley 1995). Aus der Arbeit letzterer stammen auch die Bilder anhand derer der empirische Befund Pareto-stabil verteilter Renditen veranschaulicht werden soll. Untersucht wurden Daten auf Minutenbasis für den Standard & Poor's 500 Index in den Jahren 1984 bis 1990. Die Ergebnisse sind in Abbildung 3.2 und Abbildung 3.3 veranschaulicht.

Abbildung 3.2 Empirische Häufigkeitsverteilungen der Renditen des S&P 500 Index für unterschiedliche Zeitdifferenzen τ ($\equiv \Delta T$ in min) in einem halblogarithmischen Diagramm dargestellt (Z_s = gemäß (3.1) reskalierte Renditen; entnommen aus Mantegna/Stanley 1995, mit freundlicher Genehmigung von R. N. Mantegna).

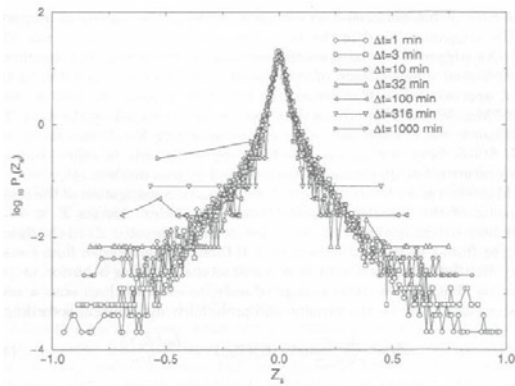
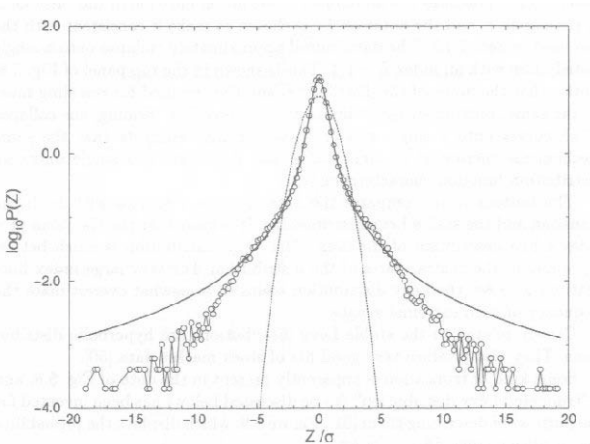


Abbildung 3.3 Vergleich der empirischen Häufigkeitsverteilung der Renditen des S&P 500 Index für $\tau = 1$ min mit einer Normalverteilung (gestrichelte Linie) und einer Pareto-stabilen Verteilung (durchgehende Linie) in einem halblogarithmischen Diagramm (entnommen aus Mantegna/Stanley 1995, mit freundlicher Genehmigung von R. N. Mantegna).



Für Abbildung 3.2 wurden die empirischen relativen Häufigkeiten und die Renditen selber gemäß (3.1) reskaliert und in einem halblogarithmischen Diagramm dargestellt. Der graphische Befund lässt den Schluss zu, dass die Kurven unabhängig von der verwendeten Skala auf eine einzige „Master-Kurve“ zusammen fallen. Dies steht in bester Übereinstimmung zu Eigenschaft b).

Abbildung 3.3 stellt die Daten für $\tau=1$ min ebenfalls in halblogarithmischer Skala dar. Darüber hinaus sind die Dichten einer Pareto-stabilen Verteilung mit $\alpha=1,4$ (durchgezogene Linie) und einer Normalverteilung (gestrichelte Linie) an den empirischen Befund angepasst. Man beachte, dass eine Normalverteilung in halblogarithmischer Darstellung als umgekehrte Parabel erscheint. Die Graphik zeigt, dass die Daten durch die Pareto-stabile Verteilung sehr viel besser beschrieben werden als durch die Normalverteilung. Allerdings sieht man aus den Randbereichen der unteren Abbildung, dass das gewählte Verteilungsmodell das Vorkommen sehr extremer Ereignisse überschätzt. Hier hilft man sich dadurch, dass man die Enden der Verteilung ab einem bestimmten Punkt „abschneidet“ (engl. „truncate“) und durch Gaußsche Enden der Verteilung ersetzt. Das hierzu verwendete Verfahren garantiert dabei einen glatten Übergang von den fat tails des Pareto-stabilen Modells zu den Gaußschen tails. Für weitere Details hierzu und zur Kritik der Normalverteilungsannahme für Finanzdaten im Allgemeinen sei die Lektüre von Voit 2001 Kapitel 5 empfohlen.

3.4 Unabhängigkeit der Renditen

Ein weiterer elementarer Bestandteil der klassischen Theorie ist die Forderung, dass die obigen Renditen

$$R_0, R_\tau, R_{2\tau}, \dots$$

für alle Zeitdifferenzen τ (stochastisch) unabhängig sind. (Das Superskript ^(*) wird dabei im Folgenden der Einfachheit halber weggelassen.) Die Forderung nach unabhängigen Renditen könnte man dabei als eine Art Folge aus der schwachen Informationseffizienz des Marktes (siehe 2.1) ansehen. Sie ist häufig anzutreffen, da sie im Verbund mit der Normalverteilungsannahme zum Random-Walk-Modell führt. Darüber hinaus werden diverse Rechnungen durch die Unabhängigkeitsannahme erleichtert oder erst ermöglicht. Als Beispiel sei hier die in der Finanzwelt sehr bekannte „Wurzel-t-Regel“ zur Annualisierung einer z. B. auf täglichen Daten basierenden Volatilität genannt. Die Herleitung dieser Regel basiert auf der angenommenen Unabhängigkeit der Renditen.

Im mathematischen Sinne bedeutet Unabhängigkeit, dass

$$P(R_{m\tau} = a_m | R_{(m-1)\tau} = a_{m-1}, R_{(m-2)\tau} = a_{m-2}, \dots) = P(R_{m\tau} = a_m).$$

In Worten: Die unbedingte Wahrscheinlichkeit, dass die Rendite R im m -ten Zeitschritt mit gleich a_m ist, ist identisch mit der bedingten Wahrscheinlichkeit für dasselbe Ereignis unter der Bedingung, dass R zum Zeitpunkt $(m-1) \tau$ den Wert a_{m-1} , zum Zeitpunkt $(m-2) \tau$ den Wert a_{m-2} usw. annimmt. Die Zukunft des Prozesses hängt somit nicht von seiner Vergangenheit ab.

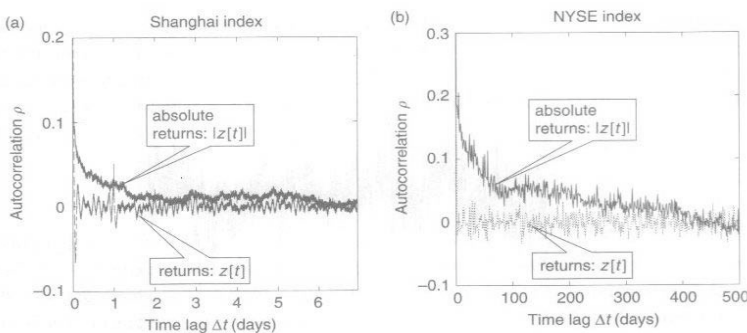
Eine Unabhängigkeit bei Renditezeitreihen im mathematischen Sinne ist jedoch gar nicht zu erwarten. Die statistische Literatur zum Test auf Unabhängigkeit ist zwar umfangreich (siehe Campbell/Lo/MacKinlay 1997) soll hier aber aus oben genanntem Grund und zugunsten einer Kritik der einfacher zu handhabenden Forderung nach unkorrelierten Renditen nicht behandelt werden. Die Autokorrelation 1. Ordnung einer Kovarianzstationären Zeitreihe zur Zeitdifferenz τ ist definiert als

$$\rho(\tau) = \frac{\text{Cov}(R_t, R_{t-\tau})}{\sqrt{\text{Var}(R_t)} \cdot \sqrt{\text{Var}(R_{t-\tau})}} = \frac{\text{Cov}(R_t, R_{t-\tau})}{\text{Var}(R_t)}.$$

Der Korrelationskoeffizient misst die Stärke eines linearen Zusammenhangs zwischen den Inkrementen; $\rho(\tau)=\pm 1$ lässt auf einen exakt linearen Zusammenhang schließen, d. h. $R_t = a \cdot R_{t-\tau} + b$ für zwei reelle Zahlen a und b . Unkorreliertheit (d. h. $\rho(\tau)=0$) kann gesehen werden als Abwesenheit eines linearen Zusammenhangs. Formal gesehen ist die Unkorreliertheit eine schwächere Annahme als die Unabhängigkeit, da die Unkorreliertheit eine Folge dieser ist. Darüber hinaus schließt die Abwesenheit von linearen Abhängigkeiten nicht das Vorhandensein nichtlinearer Abhängigkeiten aus (s.u.).

Im Folgenden sei an zwei beispielhaften Aktienindizes der graphische Befund zum Thema Autokorrelation (1. Ordnung) bei Finanzzeitreihen erörtert. Johnson, Jefferies und Hui untersuchen in Johnson/Jefferies/Hui 2003 den Shanghai Index und den NYSE Composite Index auf Autokorrelation. Das folgende Bild stellt ihre Ergebnisse prägnant dar:

Abbildung 3.4 Autokorrelation der Renditen und absoluten Renditen vom Shanghai Index und NYSE Composite Index (Abbildung entnommen aus Johnson/Jefferies/Hui 2003, mit freundlicher Genehmigung von P. M. Hui).



Man sieht an den beiden unteren Kurven, dass die Autokorrelation für die Renditen nach einer kurzen Einschwingphase im Intraday-Bereich sehr eng um den hypothetischen Wert 0 schwankt. Ein linearer Zusammenhang der einzelnen Renditen ist also nicht zu vermuten. Die obere (fette) Kurve stellt die Autokorrelation der Zeitreihe der absoluten Renditen $|R_t|$ in Abhängigkeit der Zeitdifferenz τ ($\equiv \Delta t$) dar. Diese nicht-lineare Korrelation nimmt nur sehr langsam über die verschiedenen Zeitdifferenzen ab und bleibt im Falle des NYSE Index sogar über einige Monate erhalten. Die obige qualitative Darstellung wird in der Literatur durchgehend bestätigt (siehe z. B. Gopikrishnan/Plerou/Amaral/Meyer/Stanley 1999 und Cont 1997).

Es bleibt also festzuhalten, dass Finanzzeitreihen scheinbar Abhängigkeiten nicht-linearer Art enthalten, die nicht nur bei kleinen Zeitdifferenzen im Intradaybereich sondern sogar über sehr viel längere Abstände auftreten. Dies stellt ein Indiz gegen die Informationseffizienz der Finanzmärkte dar.

4 Alternative Sichtweisen

In diesem Abschnitt sollen alternative Sichtweisen zur klassischen Theorie aufgezeigt werden. Der Startpunkt ist dabei die kleinste Einheit eines Kapitalmarktes, der einzelne Investor, der Endpunkt das gesamte System des Kapitalmarkts.

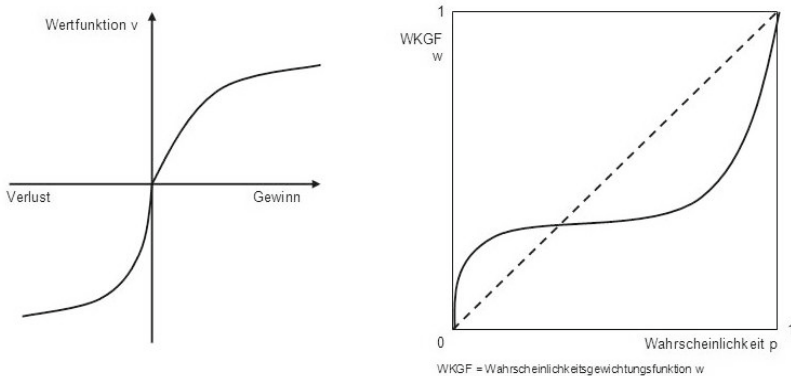
4.1 Behavioral Finance, Neuroeconomics

Auf Investorenebene wurden unter 3.1 einige Evidenzen gegen ein vNM-rationales Verhalten angeführt. Diese resultierten in der Entwicklung der neuen Disziplin des Behavioral Finance, deren führendes Modell die Prospect Theory von Kahneman und Tversky (vgl. Kahneman/Tversky 1979 und Tversky/Kahneman 1992) ist. In der Nomenklatur von Kahneman und Tversky bedeutet ein „Prospect“ eine Lotterie von der im Allais-Paradoxon dargestellten Art. Allgemein kann man diese durch die Angabe der möglichen Ausgänge $x_1, \dots, x_n$ zusammen mit den zugehörigen Eintrittswahrscheinlichkeiten $p_1, \dots, p_n$ beschreiben. Die Prospect Theory fußt nun auf zwei Funktionen: der Wertfunktion $v(x)$, die jedem Verlust oder Gewinn seinen Wert aus der Sicht des Entscheiders zuordnet, und der Wahrscheinlichkeitsgewichtungsfunktion $w(p)$, die jede Eintrittswahrscheinlichkeit auf ihr Gewicht (ebenfalls aus der Sicht des Entscheiders) abbildet. Zentrale Aussage der Prospect Theory ist, dass Subjekte Lotterien obigen Typs bewerten, indem sie die folgende nicht-klassische Art von Nutzen berechnen und maximieren:

$$U = \sum_{i=1}^n w(p_i) \cdot v(x_i).$$

Die von Kahneman und Tversky aufgrund empirischer Daten vorgeschlagenen Formen von $v(x)$ und $w(p)$ sind dabei in der Abbildung 4.1 zu sehen.

Abbildung 4.1 Qualitative Darstellung der Wertfunktion $v(x)$ und der Wahrscheinlichkeitsgewichtungsfunktion $w(p)$ gemäß Prospect Theory. Die Wertfunktion (links) ist konkav für Gewinne (Risikoaversion) und konvex für Verluste (Risikofreude). Die Steigung im Punkt 0 ist höher für Verluste als für Gewinne (Verlustaversion). Die Wahrscheinlichkeitsgewichtungsfunktion (rechts) übergewichtet kleine Wahrscheinlichkeiten (-> Glücksspiele, Versicherung) und untergewichtet hohe Wahrscheinlichkeiten (-> certainty effect). Die gestrichelte Linie entspricht der identischen Gewichtung: das Gewicht jeder Wahrscheinlichkeit p entspricht schon der Wahrscheinlichkeit p selber.



Die Wertfunktion der Prospect Theory weicht in vielerlei Hinsicht von der klassischen Nutzenfunktion ab. Zunächst einmal ist v eine Funktion der Vermögensdifferenz (Gewinn/Verlust) und nicht des absoluten Vermögens. Der Wert einer Entscheidungsalternative wird somit in Bezug auf einen Referenzpunkt – den persönlichen Vergleichsmaßstab des Investors – getroffen. Darüber hinaus hat die Wertfunktion einen „Knick“ im Referenzpunkt (in der Abbildung der Ursprung des Koordinatensystems): die linksseitige Steigung der Wertfunktion (auf der Verlustseite) ist steiler als die rechtsseitige Steigung (auf der Gewinnseite). Dies führt dazu, dass Investoren eine Verlustaversion haben. Sie verlangen demnach für mögliche Verluste hohe Risikoprämien. Diese Eigenschaft der Prospect Theory haben Bennartzi und Thaler (vgl. Bennartzi/Thaler 1995) verwendet, um die Frage zu klären, warum z. B. auf den US-amerikanischen Finanzmärkten irrational hohe Risikoprämien zwischen Aktien und festverzinslichen Anleihen (Treasury Bonds etc.) festzustellen sind („equity premium puzzle“). Ein Investor, der sein Portfolio in kurzen, regelmäßigen Abständen überwacht, will für die (aufgrund der höheren Volatilität auftretenden) kurzfristigen Verluste auf der Aktienseite eine (irrational) hohe Prämie ver-

dienen. Weiterhin ist die Wertfunktion nicht einheitlich konkav oder konvex. Sie wechselt ihren diesbezüglichen Charakter am Referenzpunkt von konvex (Risikofreude) für Verluste auf konkav (Risikoaversion) für Gewinne.

Dadurch könnte z. B. die häufig zu beobachtende Anomalie erklärt werden, dass gut laufende Investments zu früh verkauft werden und solche mit schlechter Performance zu lange gehalten werden („disposition effect“). Kauft ein Investor eine Aktie, die sich dann gut entwickelt, so befindet er sich bei gleichbleibendem Referenzpunkt (der Einstiegskurs) in einem Teil des Graphen der Wertfunktion, in dem jeder weitere Gewinn nicht mehr so interessant erscheint. Die Sorge um die gerade erzielten Gewinne wird irgendwann den Zusatzwert durch weitere Gewinne übertreffen: die gut laufende Aktie wird verkauft. Die Argumentation im umgekehrten Fall einer Aktie mit schlechter Performance läuft analog.

Die Wahrscheinlichkeitsgewichtungsfunktion der Prospect Theory beschreibt die subjektive Einschätzung von Eintrittswahrscheinlichkeiten durch die Entscheider. Sie übergewichtet kleine und untergewichtet mittlere bis hohe Wahrscheinlichkeiten. Dieses Aussehen der Funktion ist dazu angetan, das von Kahneman und Tversky entdeckte Risikoverhalten aus Tabelle 3.1 zu erklären. Man liest z. B. bei der Lotterie ($x_1=0\$$; $p_1=0,95$; $x_2=100\$$; $p_2=0,05$) einen Median des Sicherheitsäquivalents von 14\$ ab, während der Erwartungswert gerade einmal bei 5\$ liegt. Die Überschätzung der kleinen Wahrscheinlichkeit $p_2=0,05$, mit der man einen hohen Gewinn $x_2=100\$$ verzeichnen kann, führt zu einem Sicherheitsäquivalent, das deutlich über dem Erwartungswert liegt. Analoge Argumentationen gelten für die anderen Einträge der Tabelle. Dabei sollte man aber beachten, dass auch die Wertfunktion einen Beitrag zur Erklärung der dargestellten Phänomene liefert. So wird bei der Lotterie ($x_1=0\$$; $p_1=0,05$; $x_2=100\$$; $p_2=0,95$) der niedrige Median des Sicherheitsäquivalents von 78\$ sowohl durch die Unterschätzung der hohen Wahrscheinlichkeit $p_2=0,95$ als auch durch die abnehmende Steigung der Wertfunktion bei hohen Gewinnen erklärt. Auch das Allais-Paradoxon ist durch die Prospect Theory zu erklären: in der ersten Entscheidung werden die beiden Preise wegen der abnehmenden Steigung der Wertfunktion in etwa als gleich empfunden. Somit überwiegt das Streben nach Sicherheit, da die 80-prozentige Wahrscheinlichkeit untergewichtet wird und somit aufgrund der hohen Steigung der Wahrscheinlichkeitsgewichtungsfunktion in der Nähe von 1 als sehr viel unwahrscheinlicher als das sichere Ereignis eingestuft wird. In der zweiten Entscheidung werden die Wahrscheinlichkeiten 0,2 und 0,25 in etwa als gleich aufgefasst und man entscheidet sich für den höheren Preis.

Zum Schluss dieses Abschnittes wird auf eine sehr junge interdisziplinäre Entwicklung in der Analyse des wirtschaftlichen Entscheidungsverhaltens von Individuen hingewiesen. Unter dem Schlagwort Neuroökonomie (Neuroeconomics) haben sich seit Mitte der Neunzigerjahre Wirtschaftswissenschaftler und Neurowissenschaftler zusammengefunden, um die experimentellen Befunde der Behavioral Finance anzureichern mit Daten, die direkt am Entscheidungszentrum des jeweiligen Probanden gewonnenen wurden: dem Gehirn. Dahinter steckt die Idee, dass die Verhaltensökonomie zwar die besseren Erklärungsansätze im Verhältnis zur klassischen Theorie bietet, doch tut sie dies nur auf rein „symptomatische“ Weise: Die das Verhalten auslösenden Hirnprozesse hinter den Entscheidungen

bleiben unklar. Modernste bildgebende Verfahren wie die Funktionelle Magnetresonanztomographie (fMRT) machen es dabei erst möglich, bestimmte Entscheidungen des jeweiligen Probanden einzelnen Hirnbereichen zuzuordnen, deren Funktion (vermutungsweise) bekannt ist. Eine interessante Fernperspektive dieser neuen wissenschaftlichen Disziplin wäre es, eine axiomatische, auf realen Hirndaten basierende Theorie des Entscheidungsverhaltens aufzustellen. Für diesen neuen, interessanten Zugang siehe Camerer/Fehr/Glimcher/Poldrack 2008 und Fox/Poldrack 2008.

4.2 Kapitalmärkte als komplexe Systeme; mikroskopische Simulation

Wie können die im letzten Abschnitt beschriebenen, umfassenden Abweichungen vom rationalen Investorverhalten vernünftigerweise Eingang finden in die akademische Analyse von Kapitalmarktphänomenen (von der praktischen Umsetzung bei der Risikomessung von Finanzinstitutionen ganz zu schweigen)? Zur Beantwortung dieser Frage sei der aus der Physik stammende Begriff des „komplexen Systems“ skizziert. Trotz des Fehlens einer einheitlichen Definition, sollte ein solches System (Johnson/Jefferies/Hui 2003 folgend) über die meisten oder besser alle der folgenden Eigenschaften verfügen:

- Das System besteht aus vielen kleinsten („mikroskopischen“), untereinander agierenden Einheiten. Anzahl und Beschaffenheit (s. u.) dieser Bestandteile können mit der Zeit variieren.
- Der Zustand des Systems in der Vergangenheit beeinflusst seine gegenwärtigen und zukünftigen Zustände (Feedback, System mit Gedächtnis). Dies kann nur rein mikroskopischer Natur sein; es kann aber auch bis auf die beobachtbare, oberste („makroskopische“) Ebene durchschlagen. Der Effekt kann verstärkend wie auch abschwächend wirken.
- Jede einzelne mikroskopische Einheit des Systems kann aus seinem bisherigen Agieren „lernen“ und ihr zukünftiges Verhalten anpassen.
- Das entstehende System ist nichtstationär, d. h. die dynamischen und statistischen Eigenschaften des Systems ändern sich mit der Zeit.
- Das System befindet sich i. d. R. nicht im Gleichgewichtszustand, u. a. sind extreme Zustände des Systems möglich.

In dem obigen Sinne sind Kapitalmärkte komplexe Systeme.

Komplexe Systeme sind trotz denkbar einfacher Regeln für das Agieren der mikroskopischen Teile untereinander (am Kapitalmarkt Angebot und Nachfrage) nicht leicht zu beschreiben. Für ein analytisch handhabbares Modell ist es daher von elementarer Notwendigkeit die Vielzahl der möglichen Einflussgrößen zu verkleinern, d. h. die Komplexität zu reduzieren. Letztere resultiert natürlich hauptsächlich aus der unüberschaubaren Anzahl von interagierenden Investoren in Verbindung mit ihrer Heterogenität hinsichtlich der

Rationalität/Irrationalität, der Auffassungen vom Kapitalmarkt und der Handelsstrategien. Der Weg der klassischen Theorie ist die Vereinfachung der Situation durch Annahme umfassender und unrealistischer Eigenschaften, über die ein Kapitalmarkt idealerweise verfügen sollte.

Ein realistischer Kapitalmarkt, d. h. ein komplexes System im eigentlichen Sinne, ist i. d. R. nicht mehr durch ein geschlossenes analytisches Formelwerk darzustellen. Man bedient sich hier erst seit relativ kurzer Zeit (scheinbar erstmalig in Stigler 1963) eines Verfahrens aus der Physik, das unter dem Namen „Mikroskopische Simulation“ bekannt ist. Dabei wird das Verhalten jedes einzelnen der vielen miteinander agierenden, mikroskopischen Einzelteile des Systems auf einem Computer programmiert und dann das Gesamtverhalten des Systems simuliert. Dies gibt der Methode eine sehr große Breite u. a. auch hinsichtlich der Verhaltensweisen der einzelnen Investoren (s. o.). Bei der Simulation des Gesamtsystems werden makroskopische Variablen wie etwa Aktienpreise, Handelsvolumina etc. für eine spätere Untersuchung gespeichert. Anschließend kann dann analysiert werden, inwieweit die simulierten Daten die „Anomalien“ eines realen Kapitalmarktes widerspiegeln: kurzfristiges Momentum (Autokorrelation > 0), langfristiges Mean-Reversion (Autokorrelation < 0), Überschussvolatilität, endogene Crashes etc. Auch ökonometrische Untersuchungen erscheinen sinnvoll.

Als Beispiel für die mikroskopische Simulation sei das von Levy, Levy und Solomon entwickelte Modell genannt (LLS-Modell; siehe Levy/Levy/Solomon 2000). Hauptaugenmerk in diesem Modell wird auf die Heterogenität der Investoren gelegt, der Kapitalmarkt selber ist idealisiert und bietet als Anlagevarianten nur einen risikolosen Bond mit konstanter Verzinsung und eine Aktie, deren Dividendenprozess einem multiplikativen Random Walk folgt. Das LLS-Modell ist ein diskretes Mehrperiodenmodell. Die Investoren können an jedem diskreten Zeitpunkt ihre Asset-Allocation anpassen. Es gibt zwei Populationen von Anlegern:

- Rationale, informierte, identische Investoren, die den korrekten Wert der Aktie als diskontierten Cash Flow der zukünftigen Dividenden ermitteln. Sie halten Ausschau nach Fehlbewertungen im Markt und versuchen diese zu ihrem Vorteil zu nutzen auf Basis der Annahme, dass die Fehlbewertungen über kurz oder lang verschwinden werden.
- Investoren, die Vertreter der Markteffizienzhypothese (siehe 2.1) sind. Als solche suchen sie nicht nach günstigen Gelegenheiten im Markt, sondern versuchen zu jeder Zeit eine optimale Diversifikation zwischen Bond und Aktie herzustellen. Um dies zu leisten nutzen sie in Unwissenheit der Ex-Ante-Verteilung der Aktienrenditen die Ex-Post-Verteilung mit je Investor unterschiedlicher Länge der zu betrachtenden Historie. Auf den so ermittelten Aktienanteil ihres Portfolios wird noch ein Investor-spezifischer Störungsterm addiert, der für zufällige Abweichungen vom rationalen Verhalten sorgt.

Das LLS-Modell produziert eine Marktdynamik, die u. a. die oben genannten Marktanomalien zeigt. Dies ist insofern interessant, als die rationalen, informierten Investoren in den in Levy/Levy/Solomon 2000 betrachteten Simulationen die bei weitem überwiegende

Mehrheit darstellen. Eine kleine Minderheit irrationaler bzw. begrenzt rationaler Investoren scheint ausreichend, um die Phänomene zu erzeugen, die von der klassischen Theorie nur schwer erklärt werden können.

Zurzeit liegt das Hauptanwendungsgebiet mikroskopischer Simulationen in der wissenschaftlichen Erforschung von Kapitalmärkten und ihrer Eigenschaften und Funktionsweisen. Es ist jedoch aus Sicht des Autors eine interessante Fragestellung, inwieweit ein „gutes“ mikroskopisches Modell nicht z. B. auch operativ im Risikomanagement eingesetzt werden könnte. Ein „gutes“ Modell bezeichnet dabei natürlich eines, das wesentliche, makroskopische Eigenheiten des Marktes wiedergibt und dabei trotzdem einfach zu realisieren und zu warten ist. Die bisher in Banken und Versicherungen Anwendung findende Simulation ist hauptsächlich makroskopischer Natur: durch die Annahme von Verteilungsmodellen für beobachtbare Variablen des Kapitalmarkts (Aktienpreise, Zinsen etc.) wird deren Einfluss auf das eigene Portfolio via Monte-Carlo-Simulation untersucht.

Literaturverzeichnis

- Allais, M. (1953): Le comportement de l'homme rationnel devant le risque: critique des postulats et axiomes de l'école Américaine, in: *Econometrica* 21, S. 503-546.
- Bachelier, L. (1900): Théorie de la Spéculation, in: *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, Sér. 3, 17, S. 21-86.
- Benartzi, S./Thaler, R. H. (1995): Myopic Loss Aversion and the Equity Premium Puzzle, in: *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. 110(1), S. 73-92.
- Camerer, C. F./Fehr, E./Glimcher, P. W./Poldrack, R. A. (2008): *Neuroeconomics: Decision Making and the Brain*, 1st Edition, Academic Press.
- Camerer, C. F./Fehr, E./Glimcher, P. W./Poldrack, R. A. (2008): Introduction: A Brief History of Neuroeconomics, in: *Camerer/Fehr/Glimcher/Poldrack 2008*, Chapter 1, S. 1-12.
- Campbell, J. Y./Lo A. W./MacKinlay, A.C. (1997): *The Econometrics of Financial Markets*, 1st Edition, Princeton, NJ, Princeton University Press.
- Cont, R. (1997): Scaling and correlation in financial data, *arXiv:cond-mat/9705075*.
- Fama, E. F. (1965): The Behaviour of Stock Market Prices, in: *Journal of Business*, Vol. 38, No.1, S. 34-105.
- Fama, E. F. (1970): Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work, in: *Journal of Finance*, Vol. 25, No. 2, S. 383-417.
- Fox, C. R./Poldrack R. A. (2008): Prospect Theory and the Brain, in: 0, Chapter 11, S. 145-173.
- Froot, K. A./Dabora E. M. (1999): How are Stock Prices Affected by the Location of Trade?, in: *Journal of Financial Economics*, Vol. 53(2), S. 189-216.
- Gopikrishnan, P./Plerou, V./Amaral, L. A. N./Meyer, M./Stanley, H. E. (1999): Scaling of the Distributions of Fluctuations of Financial Market Indices, in: *Physical Review E* 60, S. 5305-5316.
- Johnson, N. F. J./Jefferies P., J./Hui P. M. (2003): *Financial Market Complexity, What physics can tell us about market behaviour*, 1st Edition, Oxford, Oxford University Press.
- Kahneman, D./Tversky, A. (1979): Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk, in: *Econometrica*, Vol. 47, No. 2, S. 263-291.
- Levy, H./Levy, M./Solomon, S. (2000): *Microscopic Simulation of Financial Markets: From Investor Behaviour to Market Phenomena*, Academic Press.
- Mandelbrot, B. B. (1963): The Variation of Certain Speculative Prices, in: *Journal of Business*, Vol. 36, No. 4, S. 394-419.
- Mantegna R.N./Stanley H.E. (1995): Scaling Behaviour in the Dynamics of an Economic Index, *Nature* 376, S. 46-49.
- Merton, R. C. (1974): On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates, in: *Journal of Finance*, Vol. 29, No. 2, S. 449-470.
- von Neumann, J./Morgenstern, O. (1947): *Theory of Games and Economic Behaviour*, 2nd Edition, Princeton, NJ, Princeton University Press.

-
- Shleifer, A. (2000): *Inefficient Markets: An Introduction to Behavioral Finance*, 1st Edition, Oxford, Oxford University Press.
- Stigler, G. J. (1963): Public Regulation of the Securities Market, in: *Journal of Business* 37, S. 117-142.
- Tversky, A./Kahneman, T. (1992): Advances in Prospect Theory: Cumulative Representation of Uncertainty, in: *Journal of Risk and Uncertainty*, Vo. 5(4), S. 297–323.
- Voit, J. (2001): *The Statistical Mechanics of Financial Markets*, 2nd Edition, Berlin Heidelberg, Springer.

Frühwarnindikatoren und Krisenfrühaufklärung

Konzepte zum präventiven Risikomanagement

Jacobs, J.; Riegler, J.; Schulte-Mattler, H.; Weinrich, G.

(Hrsg.)

2012, IX, 523 S. 80 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-8349-2969-3