
Indice

1	Introduzione	1
1.1	Un po' di storia: gli albori	1
1.1.1	La probabilità come frequenza	2
1.1.2	La probabilità classica	2
1.1.3	Il paradosso di Bertrand	5
1.2	La teoria della probabilità diventa una scienza matura	7
1.2.1	Il concetto di indipendenza	9
1.2.2	Un altro assioma	10
1.3	Probabilità e mondo reale	11
	Esercizi	15
	Lecture consigliate	15
2	Qualche risultato con un po' di formalismo	17
2.1	Probabilità condizionata	17
2.1.1	Finti paradossi: basta saper usare la probabilità condizionata	19
2.2	Funzioni generatrici: come contare senza sbagliare	23
2.2.1	Funzioni generatrici e processi di ramificazione	24
2.3	Qualche risultato facile ma utile	27
2.3.1	Come cambiare variabile	27
2.3.2	Cosa fare se alcune variabili non interessano	29
2.4	Applicazioni in Meccanica Statistica	30
2.4.1	Dall'insieme microcanonico a quello canonico	30
2.4.2	Densità di probabilità marginali meccanica statistica	31
	Esercizi	34
	Lecture consigliate	36
3	Teoremi Limite: il comportamento statistico di sistemi con tante variabili	37
3.1	La legge dei grandi numeri	37
3.1.1	Qualcosa meglio di Chebyshev: la disuguaglianza di Chernoff	38

3.2	Teorema del limite centrale	40
3.2.1	Cosa succede se le variabili non sono indipendenti?	45
3.3	Grandi Deviazioni	46
3.3.1	Oltre il limite centrale: la funzione di Cramer	48
3.4	Grandi e piccole fluttuazioni in meccanica statistica	50
3.4.1	Teoria di Einstein delle fluttuazioni	51
3.5	Qualche applicazione dei teoremi limite oltre la fisica	54
3.5.1	Legge dei grandi numeri e finanza	54
3.5.2	Non sempre tante cause indipendenti portano alla gaussiana: la distribuzione lognormale	56
	Esercizi	58
	Lecture consigliate	61
4	Il moto Browniano: primo incontro con i processi stocastici	63
4.1	Le osservazioni	63
4.2	La teoria: Einstein e Smoluchowski	64
4.3	La derivazione di Langevin ed il Nobel a Perrin	66
4.4	Un semplice modello stocastico per il moto browniano	69
4.5	Un modello ancora più semplice: il random walk	71
	Esercizi	73
	Lecture consigliate	73
5	Processi stocastici discreti: le catene di Markov	75
5.1	Le catene di Markov	76
5.1.1	La distribuzione di probabilità stazionaria	78
5.1.2	Il ruolo delle barriere: il giocatore in rovina	80
5.2	Proprietà delle catene di Markov	82
5.2.1	Catene di Markov ergodiche	84
5.2.2	Catene di Markov reversibili	86
5.2.3	Il modello di Ehrenfest per la diffusione	87
5.3	Come usare le catene di Markov per scopi pratici: il metodo Monte Carlo	91
5.4	Processi a tempo continuo: la master equation	94
5.4.1	Un esempio: processi di nascita e morte	95
	Esercizi	96
	Lecture consigliate	98
6	Processi stocastici con stati e tempo continui	99
6.1	Equazione di Chapman-Kolmogorov per processi continui	99
6.2	L'equazione di Fokker-Planck	101
6.2.1	Alcuni casi particolari	104
6.2.2	Soluzioni col metodo delle trasformate di Fourier	105
6.3	L'equazione di Fokker-Planck con barriere	107
6.3.1	Soluzioni stazionarie dell'equazione di Fokker-Planck	108
6.3.2	Tempi di uscita per processi omogenei	110

6.4	Equazioni differenziali stocastiche	114
6.4.1	La formula di Ito	115
6.4.2	Dalla EDS all'equazione di Fokker-Planck	117
6.4.3	Il processo di Ornstein-Uhlenbeck	118
6.4.4	Il moto browniano geometrico	119
6.5	Sulla struttura matematica dei processi Markoviani	119
6.6	Un'applicazione delle equazioni differenziali stocastiche allo studio del clima	120
6.6.1	Le EDS come modelli efficaci	120
6.6.2	Un semplice modello stocastico per il clima	122
6.6.3	Il meccanismo della risonanza stocastica	124
	Esercizi	127
	Lecture consigliate	128
7	Probabilità e sistemi deterministici caotici	129
7.1	La scoperta del caos deterministico	129
7.2	L'approccio probabilistico ai sistemi dinamici caotici	134
7.2.1	Ergodicità	137
7.3	Sistemi caotici e catene di Markov	140
7.4	Trasporto e diffusione nei fluidi	141
7.5	Ergodicità, meccanica statistica e probabilità	144
7.5.1	Ipotesi ergodica e fondamenti della meccanica statistica ...	144
7.5.2	Il problema ergodico e la meccanica analitica	146
7.5.3	Un risultato inaspettato	147
7.5.4	Teoremi e simulazioni	149
7.5.5	L'ergodicità è veramente necessaria?	150
7.6	Osservazioni finali su caos, ergodicità ed insiemi statistici	151
	Esercizi	152
	Lecture consigliate	153
8	Oltre la distribuzione Gaussiana	155
8.1	Qualche osservazione	155
8.2	Distribuzioni di probabilità infinitamente divisibili e distribuzioni stabili	157
8.2.1	Un esempio dalla fisica	160
8.3	Non sempre i processi di diffusione hanno distribuzione gaussiana ..	160
8.3.1	Dispersione relativa in turbolenza	161
8.3.2	Diffusione anomala in presenza di correlazioni temporali lunghe	165
8.3.3	Diffusione anomala in una schiera di vortici	166
8.4	Appendice: la trasformata di Laplace nel calcolo delle probabilità ..	168
	Esercizi	170
	Lecture consigliate	170

9	Entropia, informazione e caos	173
9.1	Entropia in termodinamica e meccanica statistica	173
9.2	Principio di massima entropia: cornucopia o vaso di Pandora?	175
9.3	Entropia ed Informazione	177
9.3.1	Entropia di Shannon	178
9.3.2	Teorema di Shannon-McMillan	179
9.3.3	Entropia e caos	181
9.4	Osservazioni conclusive	183
	Esercizi	183
	Lecture consigliate	184
	Appendice. Qualche risultato utile e complementi	187
A.1	Densità di probabilità marginali e condizionate	187
A.1.1	Densità di probabilità condizionata	188
A.1.2	Tre o più variabili	189
A.2	Valori medi	190
A.2.1	Una disuguaglianza spesso utile	190
A.2.2	Valori medi condizionati	191
A.2.3	Dai momenti alla densità di probabilità	191
A.2.4	Cumulanti	192
A.3	Qualche distribuzione notevole	192
A.3.1	Distribuzione binomiale	192
A.3.2	Distribuzione di Poisson	193
A.3.3	Distribuzione χ^2 di Pearson	194
A.3.4	Ancora sulla distribuzione di Poisson	195
A.3.5	Distribuzione multidimensionale di variabili gaussiane	196
A.4	Funzione gamma di Eulero ed approssimazione di Stirling	197
A.4.1	Il metodo di Laplace	198
A.5	Il contributo di un grande matematico alla probabilità in genetica	199
	Il contributo di un grande matematico alla probabilità in genetica: un calcolo elementare	199
A.6	Statistica degli eventi estremi	200
A.7	Distribuzione dei numeri primi: un'applicazione (al limite del consentito) della teoria della probabilità	203
	Lecture consigliate	205
	Soluzioni	207
	Indice analitico	229

Probabilità in Fisica

Un'introduzione

Boffetta, G.; Vulpiani, A.

2012, XII, 236 pagg., Softcover

ISBN: 978-88-470-2429-8