Prefazione

Non è facile definire che cosa è un problema inverso anche se, ogni giorno, facciamo delle operazioni mentali che sono dei metodi inversi: riconoscere i luoghi che attraversiamo quando andiamo al lavoro o passeggiamo, riconoscere una persona conosciuta tanti anni prima. Eppure la nostra cultura non ha ancora sfruttato appieno queste nostre capacità, anzi ci insegna la realtà utilizzando i metodi diretti. Ad esempio ai bambini viene insegnato a fare di conto utilizzando le quattro operazioni. Guardiamo ad esempio la moltiplicazione: essa è basata sul fatto che presi due fattori e moltiplicati tra di loro si ottiene il loro prodotto. Il corrispondente problema inverso è quello di trovare un paio di fattori che diano quel numero. Noi sappiamo che questo problema può anche non avere una unica soluzione. Infatti nel cercare di imporre un'unicità della soluzione, utiliziamo i numeri primi aprendo un mondo matematico complesso.

Probabilmente il più antico problema inverso fu l'interpolazione lineare descritto da Erodoto nella sua storia sull'Egitto. Il problema diretto, quello di calcolare una funzione lineare, fornisce un risultato immediato quando si congiungono due punti con una retta; il problema inverso, come quello dell'interpolazione lineare tra due o più punti, invece, può avere una soluzione, nessuna soluzione o infinite soluzioni in relazione al numero e alla natura dei punti.

Il problema diretto è quello di calcolare l'output dato dall'input convoluto con la descrizione matematica del sistema. Il goal del problema inverso è quello di determinare l'input o il sistema che danno luogo all'output misurato. Il problema inverso nasce dalla necessità di determinare la struttura interna di un sistema fisico attraverso il comportamento del sistema misurato oppure nel determinare l'input incognito che dà luogo all'output di un certo segnale.

Poiché esiste una stretta dipendenza tra il problema diretto e quello inverso, è buona norma impratichirsi con il problema diretto prima di affrontare il problema inverso. Questo approccio richiede che, soprattutto quando si ha a che fare con modelli fisico-matematici, si sviluppi una strategia sul modello diretto, utilizzando tutti gli strumenti della conoscenza. Ad esempio cercare le soluzioni di tutte le possibili combinazioni che possono essere ottenute utilizzando vari dati di input; fare una presentazione grafica dei risultati che ci permettono, da una o più curve, di ricavare i

limiti di utilizzabilità del modello e quindi ci danno un'idea delle possibili soluzioni nell'intorno che vogliamo analizzare.

Sulla base di queste considerazioni si può affermare che partendo dal problema diretto si aprono due problemi inversi.

Uno che definiremo *Causale* e l'altro che definiremo *Identificativo*. Data l'equazione

$$\mathbf{y} = \mathbf{K}\mathbf{x}, \tag{0.1}$$

il problema diretto consisterà nel trovare una relazione funzionale $\mathbf{K}$ tra l'input $\mathbf{x}$ e l'output $\mathbf{y}$ o, in altri termini, quello di trovare $\mathbf{K}\mathbf{x}$, il valore di un operatore nei punti $\mathbf{x}$ del suo dominio. Il primo problema, quello *Causale* parte dall'assunzione che se conosciamo l'output $\mathbf{y}$ di un modello $\mathbf{K}$ potremo descrivere il problema inverso cercando il valore di $\mathbf{x}$ che ha causato quell'output. Se il modello è invertibile avremo che si potrà ottenere $\mathbf{x}$ attraverso $\mathbf{K}^{-1}$, ma se non lo è si apre una serie di soluzioni che sono descritte in questo libro, utilizzando differenti modalità matematiche.

L'altro problema inverso è quello che abbiamo chiamato *Identificativo*, che sorge nel momento in cui la causa e l'effetto sono noti e si vuole dare una identità al modello.

Se $\mathbf{K}$ è un operatore, allora dato un input nel suo dominio, si ha un output che fa sì che il problema inverso abbia un'unica soluzione. Tuttavia non c'è garanzia assoluta che il processo causale e quello identificativo abbiano un'unica soluzione. Inoltre se l'operatore $\mathbf{K}$ è continuo allora la soluzione è stabile rispetto ai piccoli cambi che si possono fare all'input, ma ciò può non essere vero nel processo inverso, perché l'operatore inverso può essere discontinuo.

I problemi inversi hanno avuto una notevole influenza sulla scienza, anche se l'approccio convenzionale è quello di privilegiare il problema diretto. Tuttavia con l'avvento dei calcolatori i problemi inversi hanno beneficiato di parecchi vantaggi tra cui quello di meglio controllare le instabilità computazionali e quello di poter meglio affrontare problemi che richiedono un grande sforzo computazionale. Nonostante questo le percentuali di successo per la soluzione dei problemi inversi sono ancora basse e quindi c'è la necessità di un nuovo e più approfondito lavoro che questo libro tratteggia fornendo lo stato dell'arte della scienza dei problemi inversi.

La struttura del libro è stata pensata per fornire un'ampia trattazione, possibilmente omogenea, di che cosa sono i problemi inversi e come sono e possono essere impiegati nel Telerilevamento e in Geofisica della Terra solida e fluida.

I Capitoli 2 e 3 trattano dei Modelli Diretti, vale a dire di quei modelli che permettono di imitare la realtà. I modelli diretti sono essenziali per interpretare le misure, ma anche per creare gli scenari su cui poi costruire i modelli inversi.

La conoscenza della fenomenologia di un processo nasce dalla nostra esperienza e dalla nostra capacità di modellarlo. Questa conoscenza si ottiene facendo una sperimentazione continua sui modelli e confrontandoli con le misure come vedremo nel capitoli successivi ed in particolare nel capitolo dedicato all'Assimilazione.

I modelli su cui ci soffermeremo sono legati alla Geofisica: quello relativo ai processi radiativi all'atmosfera e quello relativo ai processi dinamici della Terra solida. In entrambi i casi non c'è nessuna intenzione di sostituirci ai libri che trattano i

due argomenti in modo più esauriente ed approfondito di questo capitolo. La nostra intenzione è invece quella di fornire uno strumento di conoscenza che permetta di utilizzare i modelli fisici che trattano gli argomenti corrispondenti e nel contempo di fornire quegli elementi di base per comprendere quei modelli che si trovano in rete e che molte volte non sono adeguatamente chiari sia da un punto di vista fisico sia matematico. Inoltre ci siamo limitati a trattare questi due campi di ricerca anche perché sono strettamente collegati ai problemi inversi definiti nel capitolo delle Applicazioni.

Il Capitolo 4 tratta dell'equazione integrale di Freedholm di primo tipo e delle tecniche di espansione e decomposizione ai valori singolari; tratta dei processi di instabilità e dei metodi per trovare la soluzione utilizzando la curva L.

Il Capitolo 5 è un'introduzione alle tecniche Bayesiane e alle Regole di Probabilità e rappresenta un'introduzione al Capitolo 6 che affronta il problema dei Metodi Ottimali per Modelli Lineari e Non Lineari.

Il Capitolo 7 tratta delle catene di Markov Monte Carlo e degli algoritmi sviluppati per affrontare vari e differenti problemi inversi. Il Capitolo 8 tratta del significato e dell'applicazione dei filtri di Kalman. Il Capitolo 9 tratta dei metodi di Assimilazione dei dati in campo Geofisico, per lo più nel campo della Meteorologia e della Oceanografia.

Il Capitolo 10 tratta del metodo della Diffusione Inversa. Questo metodo ha avuto molte applicazioni in campo nucleare e per lo studio dei solitoni, solo recentemente stanno nascendo delle applicazioni nella geofisica della Terra solida e fluida e per questo interessanti in Geofisica.

Il Capitolo 11 introduce alcune Applicazioni in campo atmosferico e della Terra solida che hanno origine nei capitoli dei Modelli Diretti. Il Capitolo 12 introduce le Analisi alle Componenti Principali, le cosiddette Funzioni Empiriche Ortogonali (EOF). Il Capitolo 13 introduce i metodi di Kriging e di Analisi Oggettiva utili per la ricostruzione del campo dei dati.

Infine, in Appendice (dalla A alla F) sono raccolte e spiegate le tecniche matematiche utilizzate nei vari capitoli del libro. Esse spaziano dai vari metodi di Minimizzazione, utili per confrontare i dati con i modelli, alle Caratteristiche delle Matrici, agli Integrali di Gauss, alle Variabili Casuali, al Calcolo Variazionale, agli Spazi Funzionali ed all'integrazione di Monte Carlo.

Il libro si rivolge ad un pubblico che ha conoscenze di matematica solitamente impartite in Analisi I e Analisi II dei corsi di laurea ad indirizzo scientifico, con aggiunta del calcolo matriciale e della probabilità statistica (ad esempio [104]).

Ringrazio i colleghi Giuliano Panza e Stefano Gresta, per la revisione fatta sulla parte di Geofisica della Terra solida, e Walter Dinicolantonio, per la parte di applicazioni di Telerilevamento atmosferico, e per gli utili consigli che mi hanno dato durante la stesura del libro. Ringrazio anche i molti colleghi, italiani e stranieri, con cui ho avuto uno scambio di opinioni molto utili a pianificare la struttura del libro e a definire meglio gli argomenti dei singoli capitoli. Data la mole delle pubblicazioni nei settori che questo libro tratta, ho selezionato quelle più importanti in modo da permettere di approfondire i singoli argomenti. Inoltre ho selezionato vari siti

su web che riportano documentazione e software dedicati agli argomenti trattati nel libro, riportandone, alla fine dei rispettivi capitoli, gli indirizzi di rete.

Due parole sulla copertina disegnata dall'artista Anna Rebecchi, a cui va il mio doveroso ringraziamento. Il disegno nasce dalla necessità di far capire, in modo visivo e intuitivo, cosa siano i problemi inversi. Visivamente parlando sono la proiezione di un oggetto in un altro spazio, matematicamente si direbbe il mappaggio di quell'oggetto. L'artista ha quindi interpretato questo oggetto misterioso, quel papero gigante in volo che si porta il fardello di un castello (le difficoltà della scienza), mappandolo su vari piani. Il risultato va di pari passo con l'intuizione di fondo legato ai problemi inversi, fornendo un senso di mistero alla materia del libro con grande gusto artistico; in definitiva, a mio avviso, un eccellente connubio tra arte e scienza.

Roma, gennaio 2012 *Rodolfo Guzzi*

http://www.springer.com/978-88-470-2494-6

Introduzione ai metodi inversi
Con applicazioni alla geofisica e al telerilevamento
Guzzi, R.
2012, XIII, 290 pagg., Softcover
ISBN: 978-88-470-2494-6