
Von den *Elementen* bis zum *Appendix*

Das Werk des Euklid ist eine der edelsten Schöpfungen der antiken Welt. Es wird auch dann leben, wenn alle heutigen Lehrbücher veraltet und vergessen sind.

Thomas Heath

Der *Appendix* ist ein originelles großes Werk; aus der Feder eines Ungarn ist noch keine solche mathematische Arbeit hervorgegangen; sie wird immer und überall von Wert sein.

Farkas Bolyai

2.1 Das Meisterwerk des Euklid

Die Geometrie ist einer der ältesten Zweige der Mathematik und gleichzeitig auch aller anderen Wissenschaften. Das Wort Geometrie bedeutet Erdvermessung und weist darauf hin, welche Rolle diese in den uralten, Ackerbau treibenden Gesellschaften (Ägypten, Babylon usw.) spielte. Bei diesen Völkern wurden die meisten geometrischen Kenntnisse – wie die bislang aufgearbeiteten mathematikgeschichtlichen Dokumente bestätigen – in Form von Beschreibungen und Aussagen weitergegeben, die auf Erfahrungen beruhten. Bei dem akkumulierten Wissensstoff handelte es sich also um eine Sammlung von rezeptartigen Regeln, bei denen die logischen Begründungen fehlten. Den Mathematikern der griechischen Antike verdanken wir die Erkenntnis, dass gewisse geometrische Aussagen, die sogenannten Sätze, bewiesen werden müssen. Dieser signifikante Fortschritt wurde in vielerlei Hinsicht auch von den verschiedenen philosophischen Richtungen des antiken Griechenland gefördert. Zum Beispiel besagte die Lehre der eleatischen Schule im Wesentlichen, dass die Sinneswahrnehmung nur Schein ist, und dass wir deswegen das Wesen der Dinge nur mit dem Verstand erfassen können.

Wir wissen, dass mehrere griechische Mathematiker seinerzeit versucht haben, die geometrischen Kenntnisse auf der Grundlage der neuen Auffassung

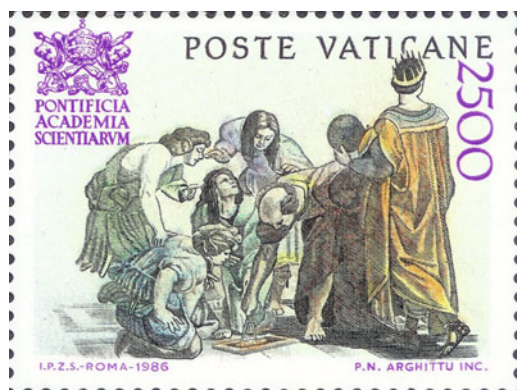


Abb. 2.1. Die 1986 herausgegebene Briefmarke zeigt einen Ausschnitt aus dem berühmten Fresko *Die Schule von Athen*, das Raffael 1510–1511 für den Vatikan schuf. Der Ausschnitt zeigt vermutlich Euklid, der sich über eine Tafel beugt und eine Konstruktion anfertigt.

zu sammeln und zu verarbeiten. Leider sind nur wenige dieser Werke erhalten geblieben. Eine solche Sammlung, welche die Wechselfälle der Zeit glücklich überstanden hat, ist das Meisterwerk des Euklid (ca. 330–275 v. Chr.)¹, die aus dreizehn Büchern bestehenden *Elemente* (*Stoicheia*). Auch Euklids Autograph ist verloren gegangen, aber der Text ist in zahlreichen Abschriften erhalten geblieben. Was könnte den Wert dieses Textes nachdrücklicher unter Beweis stellen, als die Tatsache, dass die *Elemente* dasjenige wissenschaftliche Werk sind, das im Laufe der Menschheitsgeschichte die meisten Auflagen hatte? Auf der Grundlage der aus dem 9. Jahrhundert erhalten gebliebenen Abschriften erschien 1482 in Venedig das erste gedruckte Exemplar in lateinischer Sprache; seither sind in zahlreichen Übersetzungen mehr als 600 Auflagen erschienen. Es heißt, dass in der Geschichte des Abendlandes nur die Bibel häufiger vervielfältigt und studiert worden sei. Euklid stütze sich bei der Abfassung seines Werkes überwiegend auf die damals bereits vorhandenen geometrischen Arbeiten anderer Autoren; diese nicht erhalten gebliebenen Arbeiten trugen ebenfalls den Titel *Elemente*. Als Beispiel nennen wir die *Elemente* des Hippokrates von Chios (460–377 v. Chr.). In diesem Zusammenhang schreibt Árpád Szabó²:

„Wir können uns nicht darauf einlassen, anhand der *Elemente* des Euklid die Spuren früherer *Elemente* nachzuweisen. Wir wollen uns hier mit der Feststellung begnügen, dass das hohe wissenschaftliche Niveau

¹ Biographien des Euklid findet man in Schönbeck [130] und Schreiber [131].

² Árpád Szabó (1913–2001), ungarischer Altphilologe und Wissenschaftshistoriker.

der *Elemente* des Euklid, die Strenge der Beweise, die klare Formulierung – mit einem Wort: alles das, was in Euklids Werk im Laufe vieler Jahrhunderte unübertroffen schien, und über das gewissermaßen nur die Mathematik der Neuzeit hinaus zu gehen vermochte –, dass all dies wohl den Schluss zulässt, dass nicht nur die einzelnen Sätze der *Elemente*, sondern auch der Aufbau des gesamten Werkes nach mehreren vorhergehenden Versuchen zu dem reifte, was uns erhalten geblieben ist.“³

In seinem Werk geht Euklid von einigen Definitionen, Axiomen und Postulaten aus, aus denen er deduktiv auf der Grundlage von Beweisen, die ihrerseits auf logischen Regeln fußen, die Gesamtheit der neuen Aussagen ableitet, die wir als Sätze bezeichnen. Die im Rahmen eines einheitlichen Systems dargelegte logische Kette der Sätze und Beweise zeugt von der hohen Bildung des Verfassers.

Es ist allgemein bekannt, dass man unter den Begriffen Axiom und Postulat mathematische Aussagen versteht, die man ohne Beweis als wahr akzeptiert. Auch deswegen wählen wir als Axiom oder als Postulat am häufigsten solche einfachen Aussagen, die durch die Anschauung untermauert sind. Volkstümlich drückt man das oft dadurch aus, dass kein nüchtern denkender Mensch an der Wahrheit der betreffenden Aussagen zweifelt. Das schließt jedoch nicht aus, dass eine als Axiom akzeptierte Aussage ihrerseits aus Abstraktionen höheren Grades hervorgehen kann. Man benötigte diese ohne Beweis akzeptierten Aussagen deswegen, weil man in der logischen Kette der Beweise irgendwo beginnen muss.

Das erste Buch der *Elemente* beginnt mit 23 Definitionen, 5 Postulaten und 9 Axiomen. Wir wollen hier einige Definitionen nennen und danach die Postulate und die Axiome aufzählen.⁴

Definitionen

1. Ein Punkt ist, was keine Teile hat.
2. Eine Linie ist eine breitenlose Länge.
3. Die Enden einer Linie sind Punkte.
4. Eine gerade Linie (Strecke) ist eine solche, die zu den Punkten auf ihr gleichmäßig liegt.
5. Eine Fläche ist, was nur Länge und Breite hat.
[...]
23. Parallel sind gerade Linien, die in derselben Ebene liegen und dabei, wenn man sie nach beiden Seiten ins Unendliche verlängert, auf keiner einander treffen.

³ Szabó [146].

⁴ Die hier verwendeten Formulierungen sind Schönbeck [130] entnommen.

ΑΙΤΗΜΑΤΑ.	POSTULATA.
α. Ηθέσθω, ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημείον εὐθείαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.	1. POSTULETUR, ab omni puncto ad omne punctum rectam lineam ducere.
β. Καὶ πεπερασμένην εὐθείαν ἐπ' εὐθείας κατὰ τὸ συνεχὲς ἑκβάλλειν.	2. Et finitam rectam in directum secundum continuum producere.
γ. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράψισθαι.	3. Et omni centro et intervallo circulum describere.
δ. Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.	4. Et omnes angulos rectos æquales inter se esse.
ε. Καὶ ἴαν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα τις ἑμπύπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἰσάσσοιαι ποιεῖν, ἑκβαλλομένης τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἀπειρον συμπίπτειν ἀλλήλαις, ἢ ἂ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἰσάσσοιαι γωνίαι ¹ .	5. Et si in duas rectas recta quædam incidens, interiores et ad easdem partes angulos duobus rectis minores faciat, productas illas duas rectas in infinitum sibi coincidere ad quos partes sunt duobus rectis minores anguli.

Abb. 2.2. Auszug aus der Euklid-Ausgabe von Peyrard, Paris 1814–1818.

Postulate

1. Dass man von jedem Punkt nach jedem Punkt eine Strecke ziehen kann.
2. Dass man eine begrenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern kann.
3. Dass man mit jedem Mittelpunkt und Abstand einen Kreis zeichnen kann.
4. Dass alle rechten Winkel einander gleich sind.
5. Und dass, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, dass innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann treffen sich die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins Unendliche auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.

Axiome

1. Was demselben gleich ist, ist auch einander gleich.
2. Wenn Gleichem Gleiches hinzugefügt wird, sind die Ganzen gleich.
3. Wenn von Gleichem Gleiches weggenommen wird, sind die Reste gleich.
4. Wenn Ungleichem Gleiches hinzugefügt wird, sind die Ganzen ungleich.
5. Die Doppelten von demselben sind einander gleich.
6. Die Halben von demselben sind einander gleich.
7. Was einander deckt, ist einander gleich.
8. Das Ganze ist größer als sein Teil.
9. Zwei Strecken umfassen keinen Flächenraum.

Die Numerierung weicht in den verschiedenen Auflagen der *Elemente* von der obigen Numerierung ab. So tritt zum Beispiel das 5. Postulat in einigen Auflagen als das 11. Axiom auf. Auch János Bolyai war mit Euklids Werk durch eine solche Auflage bekannt geworden, da er das 5. Postulat in jeder seiner

Schriften als das 11. Axiom bezeichnet. Wir werden deswegen im Folgenden beide Bezeichnungen verwenden.

2.2 Das zweitausendjährige Parallelenproblem

Beim aufmerksamen Lesen der Postulate stellen wir fest, dass das 5. Postulat im Vergleich zu den anderen vier und auch im Vergleich zu den Axiomen hervorsticht. Der Text dieses Postulats ist wesentlich komplizierter und scheint nicht so „offensichtlich“ zu sein wie die anderen. Deswegen waren viele Mathematiker später der Meinung, dass Euklid hier irrtümlicherweise einen Satz als Axiom aufgenommen hat. Um das auch tatsächlich zu zeigen, versuchte man, die Aussage zu beweisen, die sich auf die Parallelen bezieht. Damit begann eine mehr als zwei Jahrtausende dauernde erfolglose Reihe von Beweisversuchen: Der Beweis der Aussage Euklids über die parallelen Geraden widerstand allen Anstrengungen. Viele derjenigen, die sich daran versucht hatten, starben in der Überzeugung, das Parallelenpostulat des Euklid bewiesen zu haben. Später stellte sich aber immer wieder heraus, dass die Beweise nicht korrekt waren. Farkas Bolyai kannte die Vielheit der Fehlschläge, zu denen auch seine eigene Erfolglosigkeit hinzugekommen ist. Deswegen schrieb er seinem Sohn am 4. April 1820 einen ziemlich verzweifelten Brief:⁵

„Es ist unbegreiflich, dass diese unabwendbare Dunkelheit, diese ewige Sonnenfinsternis, dieser Makel in der Geometrie zugelassen wurde, diese ewige Wolke an der jungfräulichen Wahrheit.“

Wegen der herausragenden Bedeutung der in Rede stehenden Frage versuchen wir, dieses Problem etwas ausführlicher zu erläutern.

Diskussionen über parallele Geraden fanden bereits vor Euklid statt. Unter den Paradoxa des eleatischen Philosophen Zenon (5. Jahrhundert v. Chr.) tritt auch eine Schlussfolgerung auf, gemäß der sich zwei Geraden auch auf derjenigen Seite der schneidenden Geraden nicht treffen, wo sie sich entsprechend dem 5. Postulat schneiden müssten. Imre Tóth⁶ hat in seinen Forschungsarbeiten vor einigen Jahrzehnten nachgewiesen, dass auch der große antike Denker Aristoteles (384–322 v. Chr.) in seinen Werken parallele Geraden untersucht hat.⁷ Es ist schwer zu glauben, dass Euklid diese Gedankenflüge nicht gekannt hat, und es ist wahrscheinlich, dass er seine Aussage über die Parallelen erst nach langem Nachdenken bei den Postulaten eingeordnet hat. Dieser Schluss wird auch dadurch nahegelegt, dass Euklid diese Aussage erst ziemlich spät verwendete, nämlich beim Beweis von Satz 29, als eine weitere Außerachtlassung des Postulats nahezu unmöglich geworden war.

Beweisversuche erschienen schon bald nach Veröffentlichung der *Elemente*. Der erste bekannte Versuch geht auf Poseidonios (ca. 135–51 v. Chr.) zurück,

⁵ Vgl. Stäckel [140], S. 77.

⁶ Imre Tóth (1921–2010), ungarisch-rumänischer Philosoph und Mathematiker.

⁷ Vgl. Tóth [165], eine Synthese seiner diesbezüglichen Arbeiten.

der bei seinem Beweis verwendete, dass der Abstand zwischen den parallelen Geraden konstant bleibt. Ähnliche Überlegungen stellte auch Geminos (1. Jahrhundert v. Chr.) an. Auch der berühmte antike Astronom Ptolemaios (ca. 120–190 n. Chr.) konnte das Parallelenproblem nicht übergehen. Von den Versuchen der drei Genannten haben wir durch Proklos (410–485) Kenntnis erlangt. Proklos (dessen Schrift 1533 in Basel in griechischer Sprache im Druck erschienen ist) war der erste gründlichere Kommentator der *Elemente*. In seiner Schrift kritisierte Proklos auch die Beweisversuche von Poseidonios, Geminos und Ptolemaios. Der letzte herausragende Philosoph der Antike argumentierte mit ausgezeichnetem Gespür, dass der Abstand zwischen zwei parallelen Geraden nicht unbedingt konstant sein müsse, denn daraus, dass dieser Abstand kleiner werde, folge noch nicht, dass die Geraden einander schneiden müssten. Als Beispiel nannte er die Eigenschaft, asymptotisch zu sein. Wir werden später sehen, dass die Parallelen in der Geometrie von Bolyai unter anderem auch diese Eigenschaft haben. Gleichzeitig versuchte Proklos selbst, das Parallelenaxiom zu beweisen. Hierzu verwendete er ohne Beweis folgende Aussage: Sind die Geraden a und b parallel und schneidet die Gerade c die Gerade a , dann schneidet sie auch die Gerade b . Diese Aussage ist jedoch zum 5. Postulat Euklids äquivalent, das heißt, der darauf aufbauende Beweis ist nicht akzeptabel.

Wir sagen, dass eine Aussage zu Euklids Parallelenpostulat äquivalent ist, wenn wir mit Hilfe dieser Aussage und den übrigen Axiomen sowie mit Hilfe der hieraus abgeleiteten Sätze das Parallelenpostulat beweisen können, und wenn sich umgekehrt auch die betreffende Aussage nur mit Hilfe des als wahr angenommenen Parallelenpostulats beweisen lässt. Im Übrigen ist der genannte Fehler charakteristisch für alle bis dahin erfolgten und auch für alle späteren Beweisversuche. Fast in jedem dieser Versuche wird – ohne dass sich die Verfasser dessen bewusst sind – auch eine Aussage verwendet, die sich ohne das Parallelenaxiom nicht beweisen lässt.

Die Versuche, das Parallelenaxiom zu beweisen, brachen auch im Mittelalter nicht ab. Diese Kontinuität haben wir hauptsächlich den arabischen und den persischen Mathematikern zu verdanken.

Al Aba ibn Said al-Dschauhari (9. Jahrhundert) ging von folgender Aussage aus: Werden zwei Geraden von einer Geraden geschnitten, die mit den beiden Geraden gleiche entsprechende Winkel bildet, dann gilt das auch für eine beliebige andere schneidende Gerade. Diese Aussage ist jedoch äquivalent zu Euklids Parallelenpostulat.

Der Bagdader Mathematiker Abul Abbas ibn Hatim an-Nairizi (um 900) – sein latinisierter Name ist Anaritius – setzte in seinem Beweis auch ein Rechteck voraus, bei dem jeder der Winkel ein rechter ist. Heute ist wohl bekannt, dass das nur im Falle der Gültigkeit des euklidischen Parallelenaxioms möglich ist.

Abu Ali al-Hasan ibn al-Haitham (965–1039) – die latinisierte Form seines Names ist Alhazen – stützte sich auf folgende Aussage, die er ohne Beweis für wahr hielt: Die Abstandslinie einer Geraden (das heißt, die Menge aller

Punkte, die in einer der von der Geraden definierten Halbebene den gleichen Abstand von der gegebenen Geraden haben) ist ebenfalls eine Gerade. Es sei bemerkt, dass sich acht Jahrhunderte später auch Farkas Bolyai und János Bolyai am Anfang mit dem Begriff der Abstandslinie befasst haben, aber viel tiefer in die Materie eingedrungen sind. Sie setzten nämlich nicht voraus, dass es sich dabei um eine Gerade handelt, sondern versuchten vielmehr, das zu beweisen. Wäre ihnen das wirklich gelungen, dann wäre es von da aus nur ein Schritt zum Beweis des Postulats gewesen.

Einer der Geistesriesen des Mittelalters war Omar Chajjam (1048–1123), ein persischer Mathematiker, Astronom und Dichter. Er befasste sich unter anderem auch mit dem Parallelenproblem. In seinem Beweisversuch verwendete er – ohne es zu bemerken – auch folgende unbewiesene Aussage, die zu Euklids Axiom äquivalent ist: Der Abstand zwischen zwei auf einer Geraden errichteten Senkrechten ist konstant.

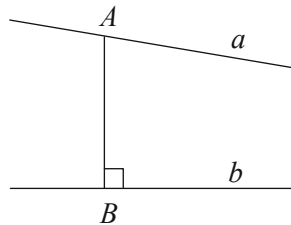


Abb. 2.3. Zur Überlegung des Nasir-Eddin al-Tusi.

Einen interessanten Gedanken verfolgt Nasir-Eddin al-Tusi (1201–1274). In seiner Arbeit über parallele Geraden, die 1594 in Rom auch in lateinischer Sprache erschien, beweist er Euklids Axiom unter Verwendung der folgenden Aussage: Wir betrachten die Geraden a und b sowie das vom Punkt A der Geraden a auf die Gerade b gefällte Lot AB (Abbildung 2.3). Dann nimmt bei einer Bewegung in Richtung des mit a gebildeten stumpfen Winkels die Länge der Strecke AB zu, während sie bei entgegengesetzter Bewegung in Richtung des mit a gebildeten spitzen Winkels abnimmt. Es lässt sich jedoch zeigen, dass auch diese Aussage zu Euklids Parallelenpostulat äquivalent ist.

Die Renaissance war eine außerordentlich bedeutsame Epoche der europäischen Kultur. Wir sind Zeugen einer Wiedergeburt der Wissenschaften und der Künste, das Interesse für die arabische Kultur und die östlichen Kulturen lebte auf. Das von den Arabern über die Zeiten hinübergerettete Erbe wurde übernommen, und Euklids Werk erschien – bald nach der Erfindung des Buchdrucks – in lateinischer Übersetzung auch in Europa. Beim Studium des Werkes gelangte das Parallelenpostulat erneut in den Mittelpunkt des Interesses.

Christoph Schlüssel (1537–1612) – sein latinisierter Name ist Clavius – versuchte in seiner 1574 in Rom erschienenen Arbeit *Euclidis Elementorum*

libri XIII ... Euklids Postulat zu beweisen. In seinem Beweis verwendete er (ebenso wie Alhazen, dessen Arbeit er wahrscheinlich nicht kannte) die Aussage, dass die Abstandslinie einer Geraden ebenfalls eine Gerade ist. Heute hat sich der Satz, gemäß dem Euklids Postulat zu der Aussage äquivalent ist, dass die Abstandslinie einer Geraden ebenfalls eine Gerade ist, in der Mathematik unter dem Namen Satz des Clavius eingebürgert.

Es scheint, dass der englische Mathematiker John Wallis (1616–1703) der Erste war, der Euklids Postulat bewusst durch ein anderes Axiom ersetzt hat. Das von Wallis formulierte Axiom lautet: *Zu jeder Figur gibt es eine ähnliche Figur von beliebiger Größe.*⁸

Spätere Kommentatoren modifizierten dieses Axiom in der folgenden konkreteren und kürzeren Formulierung: *Es gibt ähnliche, aber nicht gleiche Dreiecke.*

John Wallis gab mit Hilfe des von ihm formulierten Axioms auch einen Beweis des euklidischen Postulats.

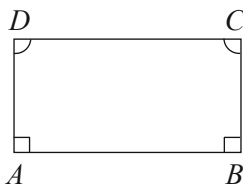


Abb. 2.4. Saccheri-Viereck.

Eine tiefgründige Untersuchung des Parallelenaxioms finden wir in dem Werk *Euclides ab omni naevo vindicatus: sive conatus geometricus quo stabiluntur prima ipsa universae Geometriae Principia* (Euklid von jedem Makel befreit ...) des italienischen Jesuitenpaters Girolamo Saccheri (1667–1733). Diese Abhandlung mit dem etwas überschwenglichen Titel erschien 1733 in Mailand. Der italienische Mathematiker Eugenio Beltrami (1835–1900) machte 1889 auf das unterdessen fast vollständig in Vergessenheit geratene Werk Saccheris aufmerksam. Saccheri kannte bereits die Arbeiten von Omar Chajjam und Nasir-Eddin, die von der Untersuchung eines Vierecks $ABCD$ ausgingen, bei dem die Winkel A und B rechte Winkel und die einander gegenüberliegenden Seiten AD und BC gleich lang sind (Abbildung 2.4). Dieses Viereck ist unter der Bezeichnung *Saccheri-Viereck* in die Fachliteratur eingegangen. Bei diesem Viereck kann man – etwa aus Symmetriegründen – leicht einsehen, dass die Winkel C und D gleich groß sind; sie können insbesondere rechtwinklig, spitzwinklig oder stumpfwinklig sein. Saccheri untersuchte alle drei Fälle und wollte zeigen, dass die beiden letztgenannten Fälle inakzeptabel sind.

⁸ Praesumo tandem ... ut communem notionem, *Datae cuicunque Figurae, Similem aliam cujuscunque magnitudinis possibilem esse.*

Von der Hypothese des stumpfen Winkels ausgehend gelang es ihm ziemlich schnell, einen Widerspruch abzuleiten. Bei der Hypothese des spitzen Winkels war die Situation jedoch eine andere. Saccheri stieß auch nach langwierigen und verwickelten Berechnungen auf keinen überzeugenden Widerspruch. Er entdeckte zahlreiche Eigenschaften, die von der nichteuklidischen (hyperbolischen) Geometrie her bekannt sind, aber er lehnte diese Eigenschaften ab, da die „Hypothese des spitzen Winkels unbedingt falsch ist, weil sie der Natur der geraden Linie widerspricht“.⁹ Somit blieb seiner Meinung nach als einziger möglicher Fall die Hypothese des rechten Winkels übrig, aus der sich das euklidische Postulat nunmehr wirklich leicht ableiten ließ.

Noch einen Schritt weiter als Saccheri ging der schweizerisch-elsässische Mathematiker Johann Heinrich Lambert (1728–1777), der seine Untersuchungen jedoch nicht veröffentlichte. Sie wurden erst nach Lamberts Tod unter dem Titel *Theorie der Parallellinien* 1786 von Johann (III) Bernoulli (1710–1790) publiziert. Paul Stäckel (1862–1919) hat 1893 auf den Wert dieses Werkes hingewiesen. Lambert untersuchte (wie seinerzeit auch Alhazen) ein Viereck mit drei rechten Winkeln. Der vierte Winkel kann also ein rechter, ein stumpfer oder ein spitzer Winkel sein. Auch Lambert versuchte zu beweisen, dass die beiden letztgenannten Annahmen notwendigerweise verworfen werden müssen. Möglicherweise war Lambert mit seiner eigenen Arbeit nicht zufrieden und veröffentlichte sie deswegen nicht. Von seinen zahlreichen interessanten Bemerkungen ist die folgende für uns erwähnenswert:

„Ich sollte daraus fast den Schluss machen, die dritte Hypothese kommt bei einer imaginären Kugelfläche vor [das heißt, wenn man den Radius r der Kugel als rein imaginär annimmt, so dass r^2 negativ und aus dem Überschuss der Winkelsumme ein Defekt wird]. Wenigstens muss immer etwas seyn, warum sie [die Hypothese des spitzen Winkels] sich bei ebenen Flächen lange nicht so leicht umstoßen lässt, als es sich bei der zwoten [Hypothese des stumpfen Winkels] thun ließ.“¹⁰

Es ist für uns nicht uninteressant, dass János Bolyai (der diese Arbeit Lamberts wohl nicht kannte) genau diesen Fall [Hypothese des spitzen Winkels] in §9 seines Werkes *Responsio* behandelt.

Von den bedeutenderen Arbeiten zum Parallelenaxiom nennen wir noch die folgenden: Giovanni A. Borelli (1608–1676), *Euclides restitutus*, Pisa, 1658; Vitale Giordano (1633–1711), *Euclide restituto*, Rom, 1680; Nicolas de Malézieu (1650–1727), *Éléments de géométrie*, Paris, 1705.

Abraham Gotthelf Kästner (1719–1800) regte Georg Simon Klügel (1739–1812) zu dessen Doktorarbeit über die Geschichte des Parallelenproblems an. Diese Dissertation, die 1763 in Göttingen in lateinischer Sprache unter

⁹ Vgl. Bonola [29], S. 44.

¹⁰ Originalzitat aus Engel-Stäckel [41], S. 202, vgl. auch Scriba-Schreiber [132], S. 366.



Abb. 2.5. Von Gauß gezeichnete Karikatur seines Lehrers Kästner.¹¹

dem Titel *Conatum praecipuorum theoriarum parallelarum demonstrandi recensio, quam publico examini submittent A. G. Kaestner et auctor respondens* erschienen ist, stellt eine eingehende Untersuchung der wichtigsten bis dahin veröffentlichten Beweisversuche dar. Die Tatsache, dass bis zu diesem Zeitpunkt bereits eine beträchtliche Anzahl einschlägiger Arbeiten erschienen war, wird dadurch unterstrichen, dass Kästner und Klügel auch nach ihrer anspruchsvollen Auswahl mehr als 30 Arbeiten für würdig erachteten, einer ausführlicheren Analyse unterzogen zu werden. Das zeigt gleichzeitig auch, dass die Klärung des Parallelenproblems zu einer immer brennenderen Frage geworden war.

Danach sind noch zwei sehr bedeutsame Versuche erwähnenswert. Der eine stammt von Adrien-Marie Legendre (1752–1833), der andere von Farkas Bolyai.

In seinem sehr erfolgreichen Buch *Éléments de géométrie* versuchte Legendre, die Aussage zu beweisen, dass die Winkelsumme im Dreieck zwei rechten Winkeln gleich ist. Diese Aussage ist ebenfalls zum Parallelenpostu-

¹¹ Farkas Bolyai hat unter die Karikatur folgenden Kommentar auf Ungarisch geschrieben: Diese Zeichnung hat Gauß in einem Sitz gemacht, die Addition ist mit Absicht falsch, um Kästner auch damit zu charakterisieren. (1795).

lat äquivalent. In der 1800 erschienenen dritten Auflage seines Buches bewies Legendre – unter anderem – die folgenden beiden Sätze:

- *Die Winkelsumme eines Dreiecks kann nicht größer als zwei rechte Winkel sein.*
- *Ist die Winkelsumme in irgendeinem Dreieck gleich zwei rechten Winkeln, dann hat jedes Dreieck diese Eigenschaft.*

Zum Beweis des Postulats musste er demnach noch zeigen, dass es kein Dreieck gibt, dessen Winkelsumme kleiner als zwei rechte Winkel ist. Beim Beweis dieser Behauptung unterlief Legendre ein Fehler. Er verwendete nämlich ohne Beweis folgende Aussage: „Von einem beliebig im Innern eines Winkels angenommenen Punkt kann man immer eine Gerade ziehen, die die beiden Schenkel des Winkels trifft“. Diese Aussage lässt sich jedoch nicht ohne das euklidische Parallelenaxiom beweisen.

Farkas Bolyai schrieb am 16. September 1804 an Gauß einen Brief und legte seine Arbeit *Theoria Parallelarum* („meine Göttingische Theorie der Parallelen“) bei. In dieser Arbeit versuchte Farkas Bolyai zu beweisen, dass die Abstandslinie einer Geraden ebenfalls eine Gerade ist [das heißt, dass es äquidistante Geraden gibt], und er bat Gauß, den Beweis zu prüfen. Nachdem Gauß diesen Beweis [in seiner Antwort vom 25. November 1804] widerlegt hatte, übersandte ihm Farkas am 27. Dezember 1808 eine „verbesserte“ Version mit dem Titel *Nachtrag zur Göttingischen Parallelentheorie*. In dieser Arbeit setzt er sich auch weiterhin das Ziel, das euklidische Postulat zu beweisen. Wie schon erwähnt, hat Gauß auf diesen Brief nicht geantwortet.

Wir haben in diesem Abschnitt die thematisch für uns wichtigsten Untersuchungen über das Parallelenproblem angesprochen, die in den mehr als zweitausend Jahren seit dem Erscheinen der *Elemente* durchgeführt worden sind. Unser Ziel dabei war es, die herausragende Bedeutung des Problems zu veranschaulichen und die Misserfolge zu schildern, die es auf dem Weg zur Lösung gegeben hat. Um zu zeigen, wie sehr das Parallelenproblem einige Mathematiker in seinen Bannkreis zog, geben wir in Abschnitt 2.5 eine Kostprobe aus den Briefen, die Farkas Bolyai seinem Sohn schrieb, als er erfuhr, dass sich auch János mit dem Problem befasste.

2.3 Warum so viele Misserfolge?

In den meisten heute verwendeten Schullehrbüchern tritt das euklidische Parallelenaxiom in der folgenden Form auf:

In der Ebene lässt sich durch einen außerhalb einer Geraden liegenden Punkt nur eine Gerade zeichnen, die zur gegebenen Geraden parallel ist.

In den nachfolgenden Ausführungen werden wir uns auch davon überzeugen, dass diese Aussage ebenfalls zum 5. Postulat der *Elemente* äquivalent ist. Zuerst zeigen wir, dass es unter den Geraden, die durch einen Punkt A außerhalb einer Geraden a gehen, *mindestens* eine Gerade gibt, die die Gerade a



<http://www.springer.com/978-3-0346-0045-3>

János Bolyai

Die ersten 200 Jahre

Weszely, T.

2013, XIX, 283 S., Hardcover

ISBN: 978-3-0346-0045-3

A product of Birkhäuser Basel