

Praktische Ausbreitungsberechnungen nach (9.243) sollten mit breiter Variation von K_y durchgeführt werden, um die Wirkung dieser Größe auf das Fernfeld erkennen zu können; ähnliches gilt auch für die Abbaurate K , wenn zusätzlich Wärmeverluste (an Flußbett, Ufer, Atmosphäre) zu berücksichtigen sind. Der eigentliche Wert eines Simulationsmodells der vorstehend beschriebenen Art ist im übrigen vor allem darin zu sehen, dass man einzelne Einflüsse bei Konstanzhaltung der anderen variieren und ihre Wirkung *vergleichend* bewerten kann, weniger darin, „ganz genaue“ Einzelfalldarstellungen zu erzielen. Wo dies den Ansprüchen nicht genügt, muß auch bei der Berechnung des Fernfeldes die numerische Lösung der zuständigen Transportgleichung, z. B. (9.239), betrieben werden.

9.4 Sedimenttransport

9.4.1 Ursachen, Arten, Begriffe

Als Sediment wird in der Technischen Hydraulik alles im transportierenden Fluid (Wasser) absetzbare Feststoffmaterial bezeichnet; meist handelt es sich um mineralische Stoffe, die als rolliges oder bindiges Bodenmaterial die bewegliche Gerinnesohle bilden. Ob derartiges Sohlenmaterial unter dem Strömungsangriff in Bewegung gerät, hängt einerseits von seinen Materialeigenschaften, andererseits vom Zustand der Sohle ab; nicht nur Korngröße, Kornform und Verhalten unter Wasser sondern auch die Art der Sohlenoberfläche, ob eben oder z. B. geriffelt, spielen eine wichtige Rolle.

Die Belastungsfähigkeit einer beweglichen Sohle kann ferner durch stabilisierende Effekte beeinflusst sein, die sich bei der Bildung von Deckschichten durch Entmischung (selektive Erosion, sogenannte Abpflasterung) ergeben; ähnliche Wirkungen haben biologische Deckschichten, z. B. bei Algenbewuchs der Sohle.

Feststoffmaterial: Praktische Berechnungen des Sedimenttransports gehen vereinfachend überwiegend davon aus, dass es sich um kohäsionsloses Sedimentmaterial handelt, das darüber hinaus allein durch einen sogenannten „maßgebenden“ Korndurchmesser d_m charakterisierbar ist. Damit wird nahezu „einkörniges“ Material mit sehr steiler Sieblinie vorausgesetzt. An der Unmöglichkeit, eine Körnungslinie lediglich mit Hilfe eines charakteristischen Korndurchmessers erfassen zu wollen, wird erkennbar, dass dies eine Schwachstelle im rechnerischen Ansatz bedeutet. Durch fraktionsweises Rechnen kann dem zwar begegnet werden, jedoch kommen dabei andere Unwägbarkeiten ins Spiel wie z. B. die gegenseitige Beeinflussung verschieden großer Körner in der bewegten Sohlenschicht.

Transportarten: Insgesamt ist der Transport von Feststoffen in offenen Gerinnen ein überaus komplexer Vorgang. Eine Übersicht darüber vermittelt Abb. 9.71. In bezug auf die Herkunft der transportierten Sedimente ist danach zwischen transportiertem *Sohlenmaterial*, das ursprünglich die Sohle bildete, und *Gebietseintrag* von Material aus dem Einzugsgebiet des Gerinnes zu unterscheiden.

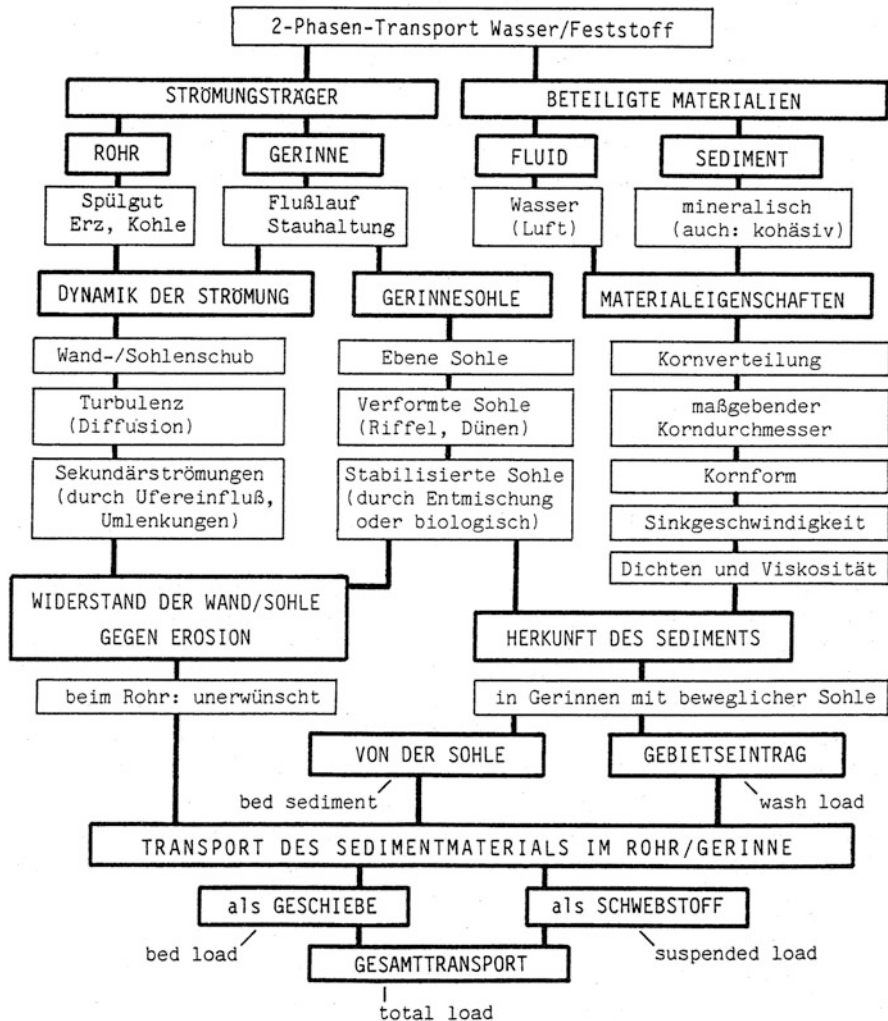
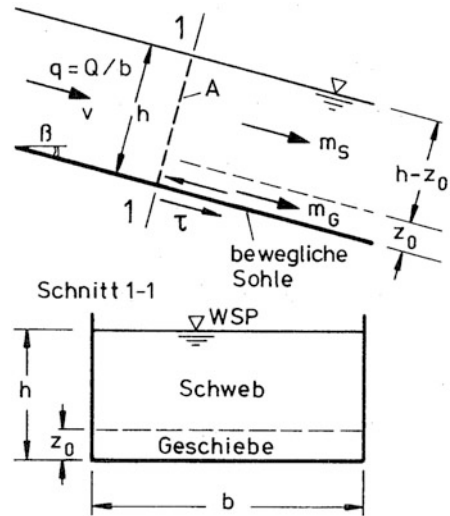


Abb. 9.71 Sedimenttransport: Arten, Verursacher, Begriffe

Beim Transport selbst wird ferner zwischen *Geschiebe* und *Schwebstoff* unterschieden mit den Transportraten m_G und m_S ; erstere betrifft die Bewegung von Feststoffen an der Sohle, wobei die Partikel mehr oder weniger rollend oder springend verfrachtet werden, aber stets Sohlenkontakt behalten oder zurückgewinnen, dagegen liegt beim Begriff *Schwebstoff* suspendiertes Material vor, das über längere Strecken ohne jeden Sohlenkontakt vom Wasser schwebend transportiert wird. Beide Komponenten zusammen ergeben den *Gesamttransport* $m = m_G + m_S$, wobei die Herkunft nicht auf Sohlenmaterial allein beschränkt sein muß.

Abb. 9.72 Abgrenzung von Geschiebe- und Schwebstofftransport



Bei der Berechnung der Sedimenttransportvorgänge muß von einem erweiterten Normalabflussbegriff ausgegangen werden. Die Erweiterung besteht darin, dass die Gerinnesohle zwar in Bewegung sein kann, ihre Lage aber unverändert bleibt. Dies erfordert zusätzlich zu den Normalabflussbedingungen (s. unter 9.1.1) auch „Transportgleichgewicht“, d. h. einem Gerinneabschnitt (Kontrollraum) wird ebenso viel Sediment zugeführt wie die Strömung daraus entfernt, so dass die Sohlenlage erhalten bleibt. Die Bildung oder Umbildung von Sohlenformen, z. B. Riffeln, ist hiermit nicht angesprochen; sie betrifft nicht die Sohlenlage sondern nur die Sohlenstruktur (Widerstand der Sohle, Rauheit).

Fast allen Transportformeln liegt die Voraussetzung zugrunde, dass *Normalabfluss* in einem Gerinne mit beweglicher Sohle nur bei *Transportgleichgewicht* möglich ist. Andernfalls ist auszugehen von einem instationären Erosions- oder Verlandungsprozeß, bei dem Sohle und Wasserspiegel ihre Lage nicht beibehalten können, vgl. bei Abb. 9.1.

Geschiebeführende Schicht: Im Hinblick auf die Unterscheidung zwischen Geschiebe- und Schwebstofftransport wird bei der Transportberechnung im allgemeinen von einem idealisierten Gerinne mit (ggf. flächengleichem) Rechteckquerschnitt $A = bh$ ausgegangen. Dabei wird dem sohlennah transportierten Geschiebe eine rechnerische Schichtdicke z_0 zugewiesen, Abb. 9.72, mit der zugleich die Abtrennung des Geschiebetransports m_G vom Schwebstofftransport m_S erfolgt. Es ist übliche und begründete Praxis, die rechnerische Dicke der geschiebeführenden Schicht an der Sohle anzusetzen mit

$$z_0 = 2d_m \quad (9.249)$$

Maßgebende Korngröße: In (9.249) ist d_m der *maßgebende Korndurchmesser* des Sohlenmaterials, für den es zahlreiche Vorschläge gibt, siehe bei Zanke (1982). Liegt eine steile Kornverteilung vor, so ist es oft möglich, mit $d_m \approx d_{50}$ zu rechnen, d. h. den Korndurchmesser bei 50 % Siebdurchgang als maßgebend anzusehen. Andernfalls wird man mit einer auf Meyer-Peter und Müller (1949) zurückgehenden Wichtung der Kornfraktionen eher zu brauchbaren Resultaten kommen:

$$d_m = \sum (p_i d_i); \quad \sum p_i = 1 \quad (9.250)$$

Ein auf Führböter (1961) zurückgehender, bewährter Ansatz ist ferner

$$d_m = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 d_{(10 \cdot i)} = \frac{d_{10} + d_{20} + \dots + d_{80} + d_{90}}{9} \quad (9.251)$$

Auch mit der Verwendung eines geometrischen Mittels, z. B. $d_m = \sqrt{d_{16} \cdot d_{84}}$, kann man bei ungleichförmiger Sieblinie Erfolg haben. Weniger problematisch ist die Festsetzung des maßgebenden Korndurchmessers bei fraktionsweiser Transportberechnung, siehe unter 9.4.7.

Transportkörper: Von großer Bedeutung für die Sedimenttransportberechnung ist der in Abb. 9.71 angedeutete Zustand der Gerinnesohle: Bei einer ebenen Sohle wird ein wesentlich größerer Teil der Sohlenschubspannung für den Geschiebeanteil transportwirksam als bei verformter Sohle, weil nur ein Teil des Rückens der Sohlenwellen der Strömung direkt ausgesetzt ist. In Lee der Kämmen löst sich die Strömung ab und an der Sohle herrscht Rückströmung. Auf der anderen Seite wirkt die Wirbelbildung in den Ablöse-zonen auf die Suspendierung und den Transport in Schwebelast verstärkend. Daher ist in nachstehenden Ausführungen den möglichen Sohlenformen Rechnung zu tragen, wobei allerdings mit Rücksicht auf den Anwendungsbezug eine Beschränkung auf *Riffel* und *Dünen* als Sohlenformen des sog. *unteren Regimes* erfolgt. Bezüglich dieser und der bei schießendem Abfluss auftretenden Sohlenformen (Antidünen) des oberen Regimes wird insbesondere auf Kennedy (1963) und Vanoni (1977) verwiesen.

Ein äußeres Merkmal zur Unterscheidung zwischen Riffeln und Dünen, die zwar etwa die gleiche Profilform, nicht aber die gleiche Größe haben, ist durch das Verhältnis von Transportkörperhöhe zu Wassertiefe gegeben:

Höhe K und Länge L der *Riffel* sind klein im Vergleich zur Wassertiefe, $K < L \ll h$, und haben daher keine Auswirkungen auf die freie Wasseroberfläche, K und L sind unabhängig von h .

Dünen dagegen sind durch $L > h$ gekennzeichnet und können Höhen bis zu $K = h/3$ erreichen. Daher paßt sich die Wasseroberfläche, den Gesetzen der Freispiegelströmung folgend, der von Dünen gebildeten Sohlenstruktur an.

Riffel und Dünen betreffend existiert ein umfangreiches Schrifttum; es sei insbesondere auf Yalin (1972), Raudkivi (1975), Engelund und Fredsoe (1982) und Führböter (1983) hingewiesen.

9.4.2 Sohlenbeanspruchung

Nicht immer kann die umfangsgemittelte Schubspannung nach (9.2) als für den Sedimenttransport maßgebende Sohlenbeanspruchung angesehen werden. Dies ist nur der Fall, wenn ein kompakter Gerinnequerschnitt vorliegt, bei dem der gesamte benetzte Umfang darüber hinaus überall den gleichen Strömungswiderstand hervorruft. Im allgemeinen wird man aber mit einem gegliederten Flußprofil zu tun haben, das aus einem Hauptgerinne mit Vorländern besteht, siehe unter 9.1.4. Das auf den Sedimenttransport gerichtete Interesse gilt dann hauptsächlich nur der Sohle des Hauptgerinnes, denn dessen Uferböschungen und die anschließenden Vorländer sind normalerweise durch natürlichen Bewuchs oder künstliche Uferbefestigung gegen Erosion geschützt. Es gilt daher, zunächst die auf die Sohle des Hauptgerinnes, des eigentlichen Flußlaufs, entfallende Sohlenschubspannung τ zu ermitteln, ehe mit dieser die Frage des Feststofftransports behandelt werden kann.

Kompaktquerschnitt des Hauptgerinnes: Mit Bezug auf Abb. 9.14 kann als erstes die umfangsgemittelte Schubspannung τ_2 des mit dem Index 2 markierten Hauptgerinnes angegeben werden:

$$\tau_2 = \frac{1}{4} \rho g I D_2 = \frac{1}{8} \lambda_2 \rho v_2^2 \quad (9.252)$$

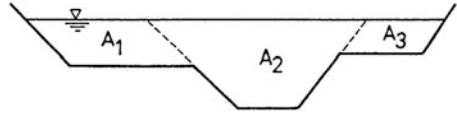
Dabei sind das in allen drei Teilquerschnitten gleiche Energieliniengefälle I (= dem Sohlengefälle I_s bei Normalabfluss) und der hydraulische Durchmesser D_2 des Hauptgerinnes bekannt, sobald die trapezförmigen Teilquerschnitte des Gesamtprofils festgesetzt worden sind. Außer τ_2 sind aber auch der Teildurchfluss Q_2 und die Fließgeschwindigkeit v_2 gefragt. Der dafür benötigte Widerstandsbeiwert λ_2 folgt aus (9.44) als

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} = \frac{Q}{2\sqrt{2gI}} \sqrt{\frac{U_2}{A_2^3}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^{3/2} \sqrt{\frac{U_2}{U_1}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_3}} \left(\frac{A_3}{A_2} \right)^{3/2} \sqrt{\frac{U_2}{U_3}} \quad (9.253)$$

wobei mit dem Index 1 bzw. 3 das linke bzw. rechte Vorland markiert sind, in Übereinstimmung mit den unter 9.1.4 verwendeten Bezeichnungen. Mit λ_2 ergibt sich v_2 aus (9.252) und schließlich $Q_2 = v_2 A_2$, der Durchfluss im Hauptgerinne. Die für (9.253) benötigten Widerstandsbeiwerte λ_1 und λ_3 der Vorländer gehen aus (9.42) hervor oder ohne Formbeiwert f unter der Annahme voll rauen Widerstandsverhaltens aus (9.45). Die benetzten Umfänge U_1 und U_3 sind entsprechend Abb. 9.14 anzusetzen.

Sohle des Hauptgerinnes: Mit τ_2 nach (9.251) liegt noch nicht die gesuchte Sohlenschubspannung τ vor. Zwar ist das Problem mit vorstehender Prozedur auf das eines Kompaktquerschnitts reduziert worden, jedoch kann die Rauheitsverteilung über dem benetzten Umfang des Hauptgerinnes unterschiedlich sein, so dass noch ein zweiter Rechenschritt nötig ist. Dieser geht von Abb. 9.15 und von (9.48) aus

Abb. 9.73 Beispiel zur Querschnittszerlegung



und führt mit den dort definierten Umfangslängen auf

$$\frac{\lambda_o}{\lambda} = 1 - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda} - 1 \right) \frac{l_1}{l_o} - \left(\frac{\lambda_2}{\lambda} - 1 \right) \frac{l_2}{l_o} \quad (9.254)$$

Darin ist λ_o der für die Sohle maßgebende Widerstandsbeiwert, und der Index 1 bzw. 2 kennzeichnet die linke bzw. rechte Uferböschung. Mit λ (ohne Index) ist der Widerstandsbeiwert des Hauptgerinnes gemeint, der sich mit den im ersten Schritt ermittelten Daten ($v = v_2$, $D = D_2$) als $\lambda = 2gID/v^2$ errechnet.

Die Werte λ_1 und λ_2 in (9.254), die nicht mit denen in (9.253) verwechselt werden dürfen, ergeben sich z. B. aus (9.45) unter Ausnutzung von (9.47). Es kann auch (9.42) unter Ansatz eines für den Hauptgerinnequerschnitt in Frage kommenden Formbeiwerts f ausgewertet werden.

Ist τ_2 das zuerst berechnete Umfangsmittel, τ (ohne Index) die gesuchte, auf die Sohlenbreite l_o entfallende Schubspannung, so ergibt sich schließlich aus dem mit (9.2) zu bildenden Verhältnis τ/τ_2 als *maßgebende Sohlenbeanspruchung*:

$$\tau = \tau_2 \frac{\lambda_o}{\lambda} \quad (9.255)$$

Diese Sohlenschubspannung, nicht etwa eines der Umfangsmittel, ist der Ermittlung des Feststofftransports zugrunde zu legen; dabei ist zu beachten, dass dem Hauptgerinne ein Trapezquerschnitt ohne Querneigung der Sohle angepaßt worden ist. In $\tau = \rho g I h$ (ebene Strömung, breites Gerinne) ist h daher als Breitenmittel der Wassertiefe aufzufassen, wenn diese Idealisierung den real vorliegenden Gegebenheiten nicht ganz entspricht.

Zu den vorstehend geschilderten Vorarbeiten ist noch anzumerken, dass nicht notwendigerweise das Modell von Könemann (1980), Abb. 9.15, benutzt werden muß; weitere Möglichkeiten sind von Bretschneider und Schulz (1985) gezeigt worden.

Bei dem mit (9.253) beschrittenen Weg wird der Vorlandabfluss häufig überbetont, weil das Weglassen der fiktiven Trennfläche im benetzten Umfang auf größere hydraulische Durchmesser führt als dem realen Vorgang entsprechen würde. Man kann dem in gewissem Umfang dadurch begegnen, dass man die Querschnittszerlegung nach Abb. 9.73 vornimmt. Bei dieser Modifizierung des Könemann-Konzepts ergeben sich etwas kleinere Vorlandquerschnitte als nach dem Original, vgl. Abb. 9.15.

Im übrigen zeigen diese Überlegungen, dass die rechnerischen Vorermittlungen, die schließlich auf die maßgebende Sohlenbeanspruchung τ führen, nicht ohne merkliche Streubreiten möglich sind. Diese sollte man durch mehrfache Variation der Einflussgrößen erkunden, ehe man τ für die weitere Bearbeitung des Sedimenttransportproblems festlegt. Es wird auch deutlich, dass die beschriebenen Vorarbeiten

größte Sorgfalt erfordern, ist doch τ die entscheidende Ausgangsgröße für die Quantifizierung der Transportvorgänge. Mit dem so ermittelten Sohlenschub τ können weitere Betrachtungen unter Annahme eines vertikal-ebenen Strömungsvorgangs angestellt werden.

9.4.3 Transportwirksame Schubspannung

Bei Normalabfluß und Transportgleichgewicht, wie vorausgesetzt, muß man stets davon ausgehen, daß eine zu Riffeln oder/und Dünen verformte Sohle vorliegt, es sei denn, die Strömungsverhältnisse und die Eigenschaften des Sohlenmaterials würden keine Transportkörper entstehen lassen. In natürlichen alluvialen Gerinnen ist die Bildung von Transportkörpern jedoch die Regel, und man hat bei der Berechnung von einem voll ausgebildeten Verformungszustand der Sohle auszugehen, bei dem im Mittel keine Veränderung der Sohlenstruktur mehr auftritt. Eine bewegliche Gerinnesohle ruft je nach Sohlenbeschaffenheit sowohl *Flächenwiderstand* τ' infolge Kornrauheit als auch *Formwiderstand* τ'' hervor:

$$\tau = \tau' + \tau'' \quad (9.256)$$

Formwiderstand wird durch etwaige geometrische Unregelmäßigkeiten der Sohle mobilisiert, bei beweglicher Sohle durch wandernde Sohlenformen (Transportkörper). Im Fall des strömenden Abflusses bei kleinen Froude-Zahlen handelt es sich dabei um *Riffel* oder *Dünen*. An deren Kontur tritt Flächenwiderstand auf, der dem transportwirksamen Schub entspricht, soweit der sohlennahe Transport als Geschiebe betroffen ist. Der Formwirksamen Schub entspricht, soweit der sohlennahe Transport als Geschiebe betroffen ist. Der Formwiderstand andererseits ist verbunden mit der Anfachung von Turbulenz, je nach Ausmaß der im Lee der Transportkörper auftretenden Ablösungswirbel. Diese sind als suspensionsfördernde Erscheinung maßgeblich mitbeteiligt am Schwebstofftransport.

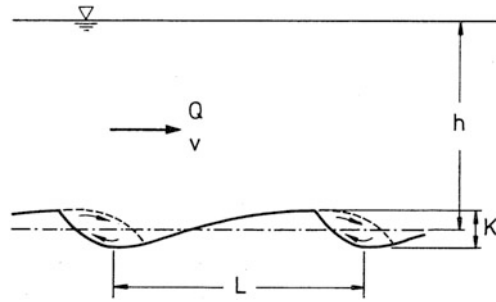
Zur Berechnung des Geschiebetransportes bringen die Autoren vieler Geschiebetransportformeln, wie z. B. Meyer-Peter/Müller (1949), eine um den Formrauheits-einfluß reduzierte Schubspannung als transportwirksam in Ansatz:

τ' für den *Geschiebetransport* m_G maßgebender Flächenwiderstand

τ'' für den *Schwebstofftransport* m_S maßgebender Gesamtwiderstand

In jüngerer Zeit entstanden aber immer wieder Zweifel an diesem zunächst auf nur vergleichsweise wenigen Meßdaten beruhenden Ansatz, die Wirkung der Formrauheiten bei der Geschiebebewegung zu berücksichtigen (s. z. B. Hunziker 1995, Zanke 1999/2001). Letztendlich ist eine solche Aufteilung in gewisser Weise willkürlich, eine Modellvorstellung. Insbesondere bei schwach überkritischen Strömungsbedingungen führt die rechnerische Reduzierung der Schubspannung oft dazu, daß sich überhaupt kein Geschiebetransport aus den Transportformeln ergibt, obwohl solcher vorliegt.

Abb. 9.74 Riffel- bzw. Dünenprofil



Reduzierte Transportstrecke: Zanke (1999/2001) schlug daher einen anderen Weg vor. Hier wird für den Sedimentstrom über den Transportkörperkamm die volle Schubspannung als geschiebetransportwirksam angesetzt. Weil wegen der Strömungsablösung in Lee der Transportkörperkämme aber nur auf etwa der Hälfte der Fließstrecke Geschiebetransport in Fließrichtung stattfindet (vgl. Abb. 9.74), werden Riffel oder Dünen durch Halbierung der berechneten Transportraten berücksichtigt.

Reduzierte Schleppspannung: Bei der „traditionellen“ Methode der Berücksichtigung von Formrauheiten wird hingegen die vorhandene Gesamtschubspannung τ reduziert:

$$\tau' = c \tau \quad (9.257)$$

Das für den Gesamtschub τ nach 9.4.2 erarbeitete Ergebnis erlaubt die Berechnung als „ebenes“ Strömungs- und Transportproblem, und es sind übliche eindimensionale Ansätze der Technischen Hydraulik verwendbar. Auf der Basis von $\tau = \rho g I h$ (für $D = 4 h$, breites Gerinne) und mit der Darcy-Weisbach-Gleichung (9.3) ist erkennbar, dass wegen (9.256) auch $I = I' + I''$ erhalten wird und folglich $\lambda = \lambda' + \lambda''$ gilt. Für den Reduktionsfaktor c in (9.257) ergibt sich also allgemein:

$$c = \frac{\lambda'}{\lambda} \quad (9.258)$$

Dabei hat die Indizierung die gleiche Bedeutung wie bei (9.256). Für die Bestimmung von c geht man davon aus, dass mit $\tau' = \frac{1}{8} \lambda' \rho v^2$ derjenige Widerstand τ gemeint ist, der sich mit $I'' = 0$ auf ebener, nicht verformter Sohle ergeben würde. Die der ebenen Sohle zukommende Rauheit k' ist daher allein vom Korndurchmesser d_m des Sohlenmaterials abhängig; man bezeichnet sie als *Kornrauheit*. Dagegen hat man bei verformter Sohle mit einer äquivalenten Sandrauheit k zu tun, die (bei dreidimensionalen Transportkörpern) von der Transportkörperhöhe K abhängig ist, vgl. Abb. 9.74; man bezeichnet sie meist als *Bettrauheit*, obwohl nur die Sohle in Betracht steht. Diesbezügliche Berechnungen können dank der unter 9.4.2 beschriebenen Vorarbeiten (τ -Ermittlung) wie bei einem vertikal-ebenen Transportvorgang durchgeführt werden ($D \approx 4 h$), wobei bedarfsweise, einer Empfehlung von Söhngen (1987) folgend, mit einem Formbeiwert $f = 0,6$ zu arbeiten ist.

Tab. 9.10 Orientierungshilfe zur Beurteilung der Bildung von Transportkörpern

Sohlenform	Korngröße ^a d in mm	Re_*	D_*	τ/τ_c	Steilheit K/L
Riffel	< 0,60	< 8	< 15	< 15	0,08–0,15
Riffel auf Dünen	> 0,20	8–24	> 5	< 14	–
Dünen	> 0,60	> 24	> 12	< 65	0,02–0,08

^aSand in Wasser, $\Delta\rho/\rho = 1,65$

Bettrauheit: Der in (9.258) benötigte Widerstandsbeiwert λ ist mit der bereits ermittelten Sohlenschubspannung τ von vornherein gegeben, denn es wird nun mit dem hydraulischen Durchmesser $D = 4 h$ (breites Gerinne) und mit $\tau = \rho g I h$ sowie $I = \lambda v^2 / 8 g h$ erhalten:

$$\lambda = \frac{8\tau}{\rho v^2} = 8 \frac{v_*^2}{v^2} \quad (9.259)$$

Darin ist $v_* = \sqrt{\tau/\rho}$ die schon mehrfach verwendete Schubspannungsgeschwindigkeit. Bei Kenntnis der zusammen mit τ maßgebenden Geschwindigkeit v (unter 9.4.2 als $v = v_2$ ermittelt) bedarf es also für die Bestimmung des Reduktionsfaktors c keiner weiteren Erhebungen. Es ist jedoch sinnvoll, sich eine Information über die äquivalente Sandrauheit k zu verschaffen, um mit dieser eine Plausibilitätskontrolle bezüglich der Sohlenstruktur vornehmen zu können.

Zu diesem Zweck ist (9.42) mit $f = 0,6$ hinsichtlich der relativen Rauheit $k/h = 4k/D$ auszuwerten, aus der sich schließlich die Bettrauheit k ergibt. Kann von großen Reynolds-Zahlen ausgegangen und voll raues Widerstandsverhalten angenommen werden, so wird erhalten:

$$\frac{k}{h} = 8,9 \exp\left(-\frac{1,15}{\sqrt{\lambda}}\right) \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \frac{k}{8,9h} \quad (9.260)$$

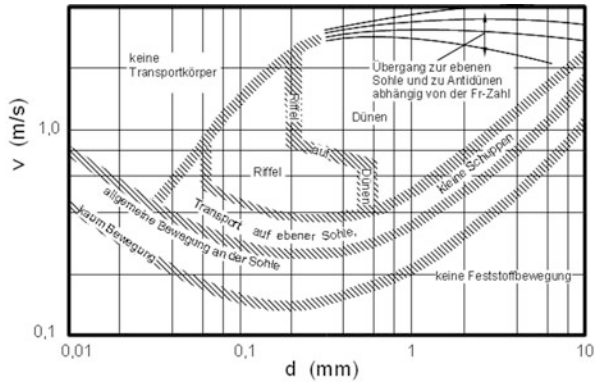
In dieser Formel ist $f = 0,6$ bereits enthalten. Unter Berücksichtigung dieses Formbeiwertes und $h = D/4$ sowie $f = 0,74$ bei ebener Sohle ist (9.260) praktisch identisch mit (9.41). Die damit errechnete Bettrauheitshöhe k ist im allgemeinen ungefähr gleich der Höhe der Transportkörper, die das Rauheitsmuster der Sohle bilden, $k \approx K$, vgl. Abb. 9.74. Daher kann man dieses Ergebnis auf seine Verträglichkeit mit anderweitigen Erkenntnissen über Transportkörper prüfen. Im folgenden werden diesbezüglich nur die wichtigsten Angaben über die hier in Betracht stehenden Transportkörperarten zusammengestellt.

Riffel und *Dünen* sind an verschiedene Existenz- und Entstehungskriterien gebunden, über die gegenwärtig noch immer keine restlose Klarheit besteht.

Die diesbezüglichen Daten der Tab. 9.10 sind der Versuch einer Zusammenfassung zahlreicher einschlägiger, teils ziemlich uneinheitlicher Literaturangaben, siehe u. a. Yalin (1972) oder Zanke (1976), Abb. 9.75. Bei der Festsetzung der den Transportkörpern zuzuordnenden äquivalenten Sandrauheitshöhe ist mit Tab. 9.10 zu prüfen, ob und mit welchen Sohlenformen zu rechnen ist. Eines der dafür maßgebenden Kriterien ist die sogenannte *sedimentologische Reynolds-Zahl*

$$Re_* = \frac{v_* d_m}{\nu} \quad (9.261)$$

Abb. 9.75 Auftrittsbedingungen von Riffeln und Dünen in Gewässern für Froude-Zahlen $Fr < 0,65$ (modifiziert nach Zanke 1976)



Im Ergebnis ähnliche Aussagen liefert Abb. 9.75.

Für Tab. 9.10 ist darin die Schubspannungsgeschwindigkeit $v_* = \sqrt{\tau/\rho}$ mit der Gesamtschubspannung τ zu bilden, und d_m ist der unter 9.4.1 erläuterte maßgebende Korndurchmesser; Werte ν der kinematischen Viskosität können Tab. 8.6 entnommen werden. Ein weiteres Kriterium ist die *dimensionslose Korngröße*

$$d_* = d_m \sqrt[3]{\frac{g'}{\nu^2}} \quad (9.262)$$

Diese wird mit einer die Auftriebswirkungen berücksichtigenden *modifizierten Erdbeschleunigung* gebildet:

$$g' = g \frac{\Delta\rho}{\rho}; \quad \Delta\rho = \rho_s - \rho \quad (9.263)$$

Die Dichtewerte ρ_s und ρ beziehen sich auf das Feststoffmaterial (Quarzsand: $\rho_s = 2650 \text{ kg/m}^3$, nicht Lagerungsdichte) und auf das transportierende Fluid (Wasser: $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$). Für von Wasser transportierten Sand wird meist mit $\Delta\rho/\rho = 1,65$ und $g' = 16,2 \text{ m/s}^2$ gerechnet. Die Definition von g' entspricht formal derjenigen von (9.213). Häufig wird anstelle g' benutzt $\rho'g$ mit $\rho' = (\rho_s - \rho)/\rho = \text{relative Dichte}$.

Als drittes Kriterium enthält Tab. 9.10 die relative Sohlenschubspannung τ/τ_c , in der τ_c die kritische Schubspannung bedeutet, bei deren Überschreitung Transport von Sohlenmaterial vorliegt, siehe unter 9.4.4. Die ergänzend angeführten Werte K/L der Transportkörpersteilheit sind Hilfen für die Abschätzung der Transportkörperhöhe bzw. der äquivalenten Sandrauheit.

Weitere Bedingungen für das Auftreten von Riffel n oder Dünen sind auf experimentellem Wege von Hill et al. (1969) ermittelt worden. Danach würden Riffel vorkommen wenn:

$$d_* > 1,38 \exp(0,192 Re_*) \quad (9.264)$$

Mit dieser empirischen Beziehung werden d_* -Werte erhalten, die als untere Grenzwerte anzusehen sind und eine Ergänzung zu der in Tab. 9.10 für Riffel genannten

Obergrenze von d_* darstellen. Für das Auftreten von Dünen ergibt sich analog die Forderung

$$d_* > 5,62 \exp(0,023 Re_*) \quad (9.265)$$

Beide Relationen beruhen auf Daten aus Laborversuchen, die mit verschiedenen Sanden ($\rho_s = 2650 \text{ kg/m}^3$) und Wasser als transportierender Flüssigkeit ($\Delta\rho/\rho = 1,65$) durchgeführt worden sind.

Das Verhältnis k/K betreffend besteht eine signifikante Abhängigkeit von der Transportkörpersteilheit K/L . So hat z. B. van Rijn (1984) folgenden, sowohl für Riffel als auch für Dünen geltenden Zusammenhang gefunden:

$$\frac{k}{K} = 1,10 \left[1 - \exp\left(-25 \frac{K}{L}\right) \right] \quad (9.266)$$

Danach ist $k \approx K$ bei einer Steilheit von $K/L \approx 0,1$ zu erwarten.

Es gibt viele weitere empirische Formeln für $k/K = f(K/L)$; von diesen sei hier nur die von Höfer (1984) genannt:

$$\frac{k}{K} = 10,5 \frac{K}{L} \quad (9.267)$$

In Ergänzung dieser Relation hat Höfer die Steilheit von Riffeln und nicht zu großen Dünen (Dünen, die noch als Rauheitselemente anzusehen sind und ein dreidimensionales, riffelähnliches Rauheitsmuster ergeben) durch folgende einfache Formel ausgedrückt:

$$\frac{K}{L} = \frac{1}{6} d_*^{-1/4} \quad (9.268)$$

Mit (9.267) ergibt dies, siehe auch bei Schröder (1985):

$$\frac{k}{K} = \frac{7}{4} d_*^{-1/4} \quad (9.269)$$

Hiernach wäre $k \approx K$, wenn der dimensionslose Korndurchmesser $d_* \approx 10$ beträgt.

In allen Fällen benötigt man eine Aussage über die Transportkörperhöhe K , um die äquivalente Sandrauheit k beziffern zu können. Umgekehrt kann man mit einem nach (9.260) berechneten k -Wert auf die Höhe K der Sohlenformen schließen und so die erwähnte Plausibilitätskontrolle durchführen.

Bei Riffeln liegen etwas weitergehende Informationen vor. So gilt z. B. für die Riffellänge L nach Yalin (1972) mit dem maßgebenden Korndurchmesser d_m die grobe Faustformel

$$L \approx 1000 d_m \quad (9.270)$$

Für $2 < d_* < 7$ kann die Riffelhöhe, späteren Angaben von Yalin (1985) zufolge, ausgedrückt werden durch

$$\frac{K}{d_m} = 193 - 21 d_* \quad (9.271)$$

Bei den K -Werten dieser Beziehung handelt es sich um durchschnittliche Größtwerte der Riffelhöhe, $K = K_{\max}$. Zum Vergleich mit der Höferschen Beziehung (9.268) lässt sich die Riffelsteilheit unter Hinzuziehung von (9.270) auch beschreiben mit Hilfe von

$$\frac{K}{L} = 0,193 - 0,021 d_* \quad (9.272)$$

Für $d_* \approx 3,3$ besteht hiernach Übereinstimmung mit der Höfer-Formel (9.268). Solche Gemeinsamkeiten der vorstehend genannten empirischen Formeln dürfen jedoch nicht darüber hinwegtäuschen, dass meist nur sehr unscharfe Ergebnisse erzielbar sind; Streubreiten, die einem Faktor 2 entsprechen, sind keine Seltenheit.

Das Thema Transportkörper abschließend, ist noch auf neuere Untersuchungen von Führböter (1991) und Kühlborn (1993) hinzuweisen, die das Entstehen von Riffeln und ihre Entwicklung bis zu einem voll ausgebildeten Endzustand sowie die *Riffelwanderung* betreffen. Danach stellt sich unter ausreichend langer Sohlenbelastung mit ein und demselben Sandmaterial der Sohle immer wieder das prinzipiell gleiche Riffelmuster mit den im wesentlichen gleichen Riffelabmessungen ein. Eine Änderung der Sohlenbeanspruchung führt lediglich zu einer entsprechenden Änderung der Wandergeschwindigkeit der Riffel; die Reaktion der beweglichen Sohle auf die veränderten Strömungsbedingungen besteht also (bei Riffeln im Gegensatz zu Dünen) nicht in einer Anpassung der Riffelgeometrie sondern in einer Verzögerung oder Beschleunigung der Riffelfortbewegung, solange der mit Tab. 9.10 umrissene Existenzbereich der Riffel nicht verlassen wird.

Die äquivalente Rauheit(shöhe) k einer Riffelsohle betreffend hat Kühlborn (1993) ferner gezeigt, dass diese nur dann mit $k \approx K$ angesetzt werden darf, wenn die Riffelhöhe K als durchschnittliche Höhe der größten Einzelriffel eines Feldes dreidimensionaler Riffel definiert ist. Wird K dagegen als mittlere Riffelhöhe aus einem Längsschnitt der Sohle gewonnen, so ist etwa mit $k \approx 2,3K$ zu rechnen. Die Untersuchungen haben darüber hinaus gezeigt, dass sich anscheinend unabhängig vom Korndurchmesser des Sohlenmaterials stets die gleiche Riffelhöhe mit etwa $K = 32 \text{ mm}$ ergibt, genügend Entwicklungsdauer und genügend Wassertiefe $h > 3K$ vor ausgesetzt. Dabei ist K als mittlere Höhendifferenz zwischen Tal und Kamm der Einzelriffel definiert.

Kornrauheit: Der zweite für c nach (9.258) benötigte Widerstandsbeiwert λ' betrifft die idealisierte ebene Sohle aus dem gleichen Sohlenmaterial wie bei der zu Riffeln oder Dünen verformten Sohle. Daher ist als äquivalente Sandrauheit der maßgebende Korndurchmesser anzusetzen, sofern es sich um enggestufte Kornfraktionen des Sohlenmaterials, sogenannten „Einkornsand“, handelt:

$$k' \approx d_m \quad (9.273)$$

Bei einer weniger gleichförmigen Sieblinie des Sohlenmaterials sind dagegen nur sehr unscharfe Empfehlungen für die Festsetzung der Kornrauheit k' bekannt, wie aus Tab. 9.11 hervorgeht. Auch mit k' werden also u. U. erhebliche Unsicherheiten in den weiteren Rechenprozeß eingeschleppt. Es geht bei k' allerdings nicht darum, eine reale ebene Sohle zu charakterisieren, sondern um die Gewinnung einer

Tab. 9.11 Empfehlungen zur Festsetzung der Kornrauheit

Vorschlag	Bezugswert d_i	k'/d_i
Einstein (1942)	d_{65}	1,00
Meyer-Peter (1949)	d_{90}	1,00
Taylor und Brooks (1962)	d_{50}	1,00
Engelund und Hansen (1966)	d_{65}	2,00
Mahmood (1971)	d_{84}	5,10
Ackers und White (1973)	d_{35}	1,25
Kamphuis (1974)	d_{90}	2,00
Hey (1979)	d_{84}	3,50
van Rijn (1984)	d_{90}	3,00

vergleichbaren Rauheit unter Annahme einer idealisierten, transportkörperfreien Sohle. Dazu genügt es, mit einer Proportionalität zwischen Rauheit und maßgebender Korngröße zu arbeiten:

$$k' = \alpha d_m \quad (9.274)$$

Darin ist d_m wie unter 9.4.1 abzuschätzen, und für den Proportionalitätsfaktor ist mindestens mit $\alpha = 1$ wie bei (9.273) zu rechnen; bei nicht zu flacher Kornverteilung des Sohlenmaterials hat sich nach Untersuchungen von Engelund und Fredsoe (1976) ein Faktor $\alpha = 2,5$ bewährt. Von Yalin (1992) wird ferner $\alpha = 2,0$ vorgeschlagen für den Fall, dass $d_m = d_{50}$ angenommen werden darf.

Reduktionsfaktor: Für den zur Ermittlung des transportwirksamen Schubspannungsanteils τ' benötigten Reduktionsfaktor c nach (9.258) ergeben sich unterschiedliche Ausdrücke, je nach verwendetem Widerstandsansatz für die Beiwerte λ' und λ . Meist wird dabei angenommen, dass voll raues Widerstandsverhalten vorliegt, obwohl oft (besonders bei λ') mit der vollständigen Prandtl-Colebrook-Formel zu rechnen wäre; der implizite Aufbau dieser Formel ist aber so störend, dass meist vorschnell von dieser Annahme ausgegangen wird. Man kann den mit der Auswertung der Prandtl-Colebrook-Formel (9.275) verbundenen Unannehmlichkeiten aber dadurch entgehen, dass man die von Zanke (1993) vorgeschlagene Näherung (9.276) benutzt, die im Ergebnis nahezu deckungsgleich mit (9.275) ist.

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \approx -2 \log \left(\frac{2,51}{f Re \sqrt{\lambda_0}} + \frac{k/h}{14,84 f} \right) \quad (9.275)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \approx -2 \log \left(\frac{2,7(\log Re)^{1,2}}{f Re} + \frac{k/h}{14,84 f} \right) \quad (9.276)$$

Die Hilfsgröße λ_0 wird nur hierfür benötigt und hat sonst keine weitere Bedeutung, siehe Schröder (1990).

Wird (9.276) für die Ermittlung von λ' und λ benutzt, so lautet der Reduktionsfaktor:

$$c = \left[\frac{\log \left(\frac{2,7(\log Re)^{1,2}}{f Re} + \frac{k/h}{14,84 f} \right)}{\log \left(\frac{2,7(\log Re)^{1,2}}{f Re} + \frac{k'/h}{14,84 f} \right)} \right]^2 \quad (9.277)$$

Es ist mit einem Formbeiwert $f = 0,6$ zu rechnen; k und k' sind die zuvor erläuterten äquivalenten Sandrauheitswerte für die Bett- und die Kornrauheit.

Wird statt dessen mit voll rauem Widerstandsverhalten (Annahme $Re \rightarrow \infty$, siehe unter 9.1.3) gerechnet, so lautet der mit (9.258) verlangte Korrekturfaktor, wobei ein Formbeiwert $f = 0,6$ schon berücksichtigt ist:

$$c = \left(\frac{\log(k/h) - 0,95}{\log(k'/h) - 0,95} \right)^2 \quad (9.278)$$

Man kann auch die Manning-Strickler-Formel bemühen und auf die zu dieser benannte λ -Näherung (9.10) zurückgreifen; dann ergibt sich

$$c = \sqrt[3]{\frac{k'}{k}} \quad (9.279)$$

Da k -Werte mit (9.12) in Manning-Beiwerte n umgerechnet werden können ($k \sim n^6$), folgt schließlich noch

$$c = \left(\frac{n'}{n} \right)^2 \quad (9.280)$$

Alle diese Beziehungen gehen mit $I = I' + I''$ von einer Widerstandsaufteilung aus, die in physikalisch plausibler Weise dem Energieliniengefälle zugewiesen wird. Danaben gibt es aber noch eine andere Auffassung, nach der I unberührt bleibt und statt dessen der hydraulische Radius, im vorliegenden Fall also die Wassertiefe, zerlegt wird in $h = h' + h''$. Dabei versteht man unter h' den von der Sohle beeinflussten Teil der Wassertiefe, vgl. z. B. bei Jäggi (1978), und setzt $\tau' = \rho g I h'$ an. Für das Verhältnis τ'/τ ergibt sich so $c = h'/h$ als Reduktionsfaktor. Werden h' und h mit der Darcy-Weisbach-Formel (9.3) eliminiert, folgt wieder (9.258); wird dazu aber die Manning-Strickler-Formel (9.11) benutzt, so ergibt sich

$$c = \left(\frac{n'}{n} \right)^{3/2} \quad (9.281)$$

Dieser Ansatz hat sich bei der Transportberechnung für grobes Sohlenmaterial durchaus bewährt; für feineres Material ist er dagegen offenbar weniger geeignet. Man sollte daher besser von einer der Beziehungen (9.277) bis (9.280) Gebrauch machen, zumal diese von einer physikalisch sinnvolleren Interpretation ausgehen.

9.4.4 Kritische Sohleschubspannung

Die meisten Ansätze zur Quantifizierung des Sedimenttransports beruhen darauf, dass eine aus kohäsionslosem Material bestehende Gerinnesohle der Schubbelastung durch die Strömung nur bis zu einer kritischen Schleppspannung τ_c standhalten kann. Nach diesem *Schwellenwertkonzept* bleibt das Sohlenmaterial in Ruhe, bis die transportwirksame Schubspannung τ' den kritischen Wert τ_c übersteigt. Bewegung an der Sohle tritt für $\tau' \geq \tau_c$ zunächst als Geschiebetransport ein, wobei es sofort

zur Bildung von Riffeln kommt, wenn die dafür erforderlichen Voraussetzungen gegeben sind, siehe unter 9.4.3. Bei sehr feinen Sedimenten kommt es sofort bei überkritischen Schubspannungen auch zu Schwebstofftransport während dies bei größeren Sedimenten erst bei höherer Sohlenbelastung eintritt. Insofern sind dann zwei kritische Sohlenbeanspruchungen zu definieren, nämlich τ_c für den Transportbeginn überhaupt und τ_{sc} für den Beginn des Schwebstofftransports. Bei abfallender Strömungsbelastung kommt bei größeren Körnern zunächst die Suspendierung zum Erliegen und danach erst die Geschiebebewegung: $\tau_{sc} \geq \tau_c$. Bei feineren Körnern hört zuerst die Geschiebebewegung auf. Unterhalb von τ_c kann bestehender Schwebstofftransport aber zunächst weiter existieren. Dieser klingt jedoch mit der Zeit aus, da wegen $\tau < \tau_c$ keine Neu-Suspendierung mehr stattfindet.

Die kritische Sohlenschubspannung (Schleppspannung) τ_c ist ausschließlich von den Eigenschaften der beteiligten Materialien abhängig, nicht von der aktuellen Schubbelastung: $\tau_c = f(d_m, \rho_s, \rho, v, \dots)$. Die Beschreibung dieses Zusammenhangs mit dimensionslosen Kennzahlen ist zweckmäßig. Außer der mit (9.261) bereits eingeführten *sedimentologischen Reynolds-Zahl* Re_* und der *dimensionslosen Korngröße* d_* nach (9.262) ist eine häufig benutzte Materialkennziffer die *granulometrische Reynolds-Zahl*

$$Re_s = \frac{1}{v} \sqrt{g' d_m^3} \quad (9.282)$$

Mit dieser nur formal einer Reynolds-Zahl gleichenden Kennzahl wird allerdings kein neuer Parameter definiert, denn mit (9.262) besteht folgender Zusammenhang:

$$d_* = Re_s^{2/3}; \quad Re_s = d_*^{3/2} \quad (9.283)$$

Mit diesen dimensionslosen Größen sind die für τ_c maßgebenden Materialeigenschaften von Korn und Fluid erfaßt: Maßgebender Korndurchmesser d_m , Zähigkeit v des Fluids (temperaturabhängig), Dichteunterschied $\Delta\rho = \rho_s - \rho$ und modifizierte Erdbeschleunigung g' nach (9.263). Wie schon weiter oben gesagt, wird anstelle g' häufig auch geschrieben $g\rho' = g \cdot (\rho_s - \rho)/\rho$.

Für die Schubspannung wird ferner eine *Strömungsintensität* definiert als

$$\theta = \frac{v_*^2}{g' d_m} \quad \text{bzw.} \quad \theta' = \frac{v_*'^2}{g' d_m} \quad (9.284)$$

Hierin sind $v_* = \sqrt{\tau/\rho}$ und $v_*' = \sqrt{\tau'/\rho}$ die beteiligten Schubspannungsgeschwindigkeiten (gesamt bzw. transportwirksam). Die Strömungsintensität entspricht dem Quadrat der *sedimentologischen Froude-Zahl* $Fr_* = v_*/\sqrt{g' d_m}$, die in der Literatur auch oft als dimensionslose Schubspannung τ^* bezeichnet wird.

Auf gleiche Weise wird auch die als *Shields-Wert* bezeichnete *kritische Strömungsintensität* interpretiert:

$$\theta_c = \frac{v_{*c}^2}{g' d_m} = \frac{\tau_c}{\rho g' d_m} = \tau_c^* \quad (9.285)$$

Statt der Strömungsintensität θ wird als *Bewegungsintensität* oft auch deren Kehrwert verwendet, ohne dass damit eine neue Aussage verbunden wäre:

$$\psi = \frac{1}{\theta} \quad \text{bzw.} \quad \psi' = \frac{\rho g' d_m}{\tau} \quad (9.286)$$

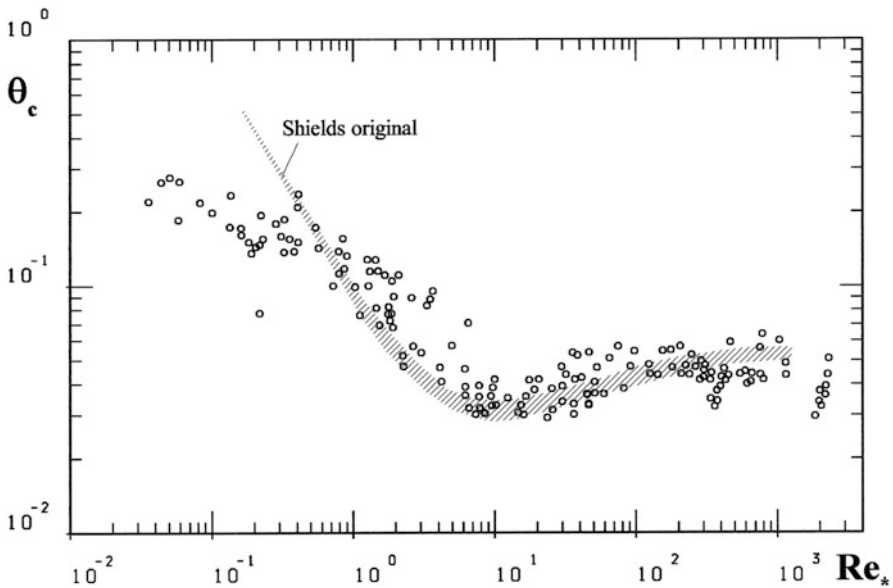


Abb. 9.76 Kritische Schleppspannung nach Shields, ergänzt um spätere Messergebnisse (implizite Darstellung)

Entsprechend wird auch mit einer kritischen Bewegungsintensität $\psi_c = 1/\theta_c$ gearbeitet.

Shields-Diagramm: Mit einer dimensionsanalytisch gestützten, äußerst vereinfachten Abschätzung der Bedingungen, unter denen ein Einzelkorn aus der ebenen Sohle herausgehoben und von der Strömung transportiert werden kann, hat Shields (1936) gezeigt, dass der so markierte Bewegungsbeginn einer Gesetzmäßigkeit $\tau_c = f(Re_*)$ folgen dürfte. Mit einer Reihe von Messwerten zum Bewegungsbeginn konnte er zeigen, dass deren dimensionslose Auftragung diese Erwartung bestätigt und zu dem in Abb. 9.76 wiedergegebenen *Shields-Diagramm* führt. Angesichts der verhältnismäßig großen Streuung seiner Messwerte hat Shields keinen strengen funktionalen Zusammenhang formuliert sondern nur einen Bereich markiert, in dem θ_c zu erwarten ist.

In der Abbildung ist dieser Bereich schraffiert dargestellt. Mit eingetragene spätere Messergebnisse zeigen, dass der Verlauf bei kleinen Re_* -Zahlen flacher ist als von Shields vermutet. Die Streuung hat ihre Ursache zum einen in unvermeidlichen Messunsicherheiten, zum anderen darin, dass der Bewegungsbeginn keine scharfe Grenze ist, sondern eine Bandbreite aufweisen muß. Diese Bandbreite reicht von sporadischer Bewegung einiger weniger Körner bis zur ständigen, flächendeckenden Bewegung. Der Grund hierfür liegt in der turbulenzbedingten Schwankung der lokal wirksamen Schubspannungen sowie in der unterschiedlichen Bettung der einzelnen Körner und letztendlich in dem zufälligen Zusammentreffen der beiden Effekte. Zanke (1990) hat das Risiko R der Sedimentbewegung untersucht und als praktisch nutzbare Lösung gefunden. Das Zusammenspiel von zufälliger Kornlage und zu falls verteiltes Strömungsbelastung wurde von Luckner (2002) untersucht.

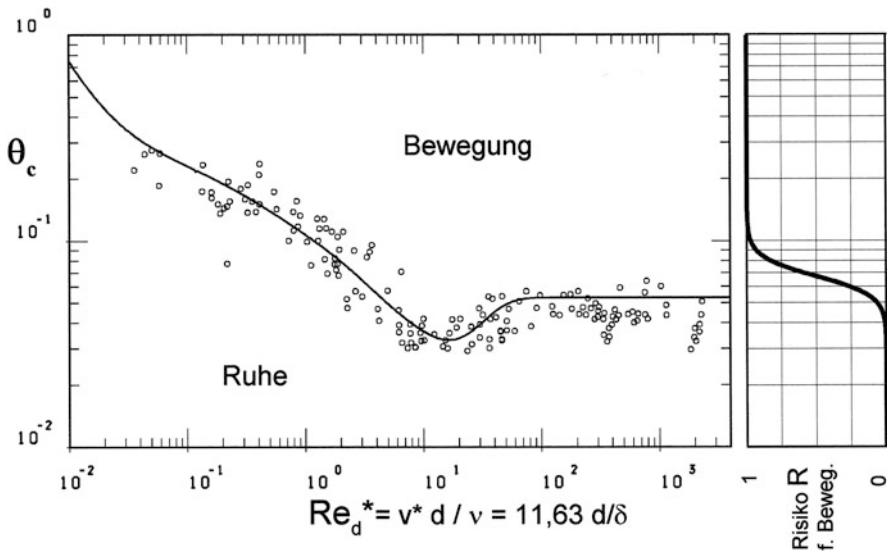


Abb. 9.77 Kritische Schleppspannung nach Gl. 9.287 (mit eingetragen ist das Risiko der Bewegung; bei der Shields-Kurve sind etwa 10 % der Sohle in Bewegung)

$$R \approx \left[10 \left(\frac{\theta}{\theta_c} \right)^{-9} + 1 \right]^{-1} \quad (9.287)$$

Nach Shields' berühmter Studie tritt der kritische Zustand der Sohle spätestens dann ein, wenn die auf ein Partikel einwirkende Auftriebskraft A das Partikelgewicht G (unter Wasser) übersteigt. Mit einem turbulenten Geschwindigkeitsprofil, z. B. nach (9.36) oder (9.39), kann man zeigen, dass A proportional zu den Druckschwankungen sein wird mit $A \sim \rho v_*^2 d_m^2 f(Re_*)$ angesetzt werden kann, während $G \sim \rho g' d_m^3$ ist. Werden die Proportionalitätsfaktoren in $f(Re_*)$ eingerechnet, so führt die Forderung $A > G$ auf $v_*^2 f(Re_*) > g' d_m$, und mit (9.284) ist ein deutlicher Zusammenhang $\theta_c = f(Re_*)$ zu vermuten. Die experimentelle Verifikation hat diese Erwartung bestätigt und zu dem in Abb. 9.76 wiedergegebenen *Shields-Diagramm* geführt; darin ist Re_* als Re_{*c} zu verstehen.

Zanke (2001/2003) hat den Bewegungsbeginn analytisch gelöst und folgende funktionale Abhängigkeit für die Shields-Kurve gefunden (s. Auch Abb. 9.77)

$$\theta_{c, Shields} = \frac{0,24K}{\left(1 + 1,8 \frac{u'_{rms,b}}{v_b}\right)^2 \left(1 + 0,14 \left(1,8 \frac{u'_{rms,b}}{v_*}\right)^2 K\right)} \quad (9.288)$$

In (9.288) sind u'_{rms} = Standardabweichung der Geschwindigkeitsschwankungen $u'(t)$, Index 'b' = am Boden in Höhe der Körner, wobei

$$\frac{u'_{rms,b}}{v_*} = 0,31 Re_* \cdot e^{-0,1 Re_*} + 1,8 \cdot e^{-0,88 d/h} \cdot (1 - e^{-0,1 Re_*}) \quad (288a)$$

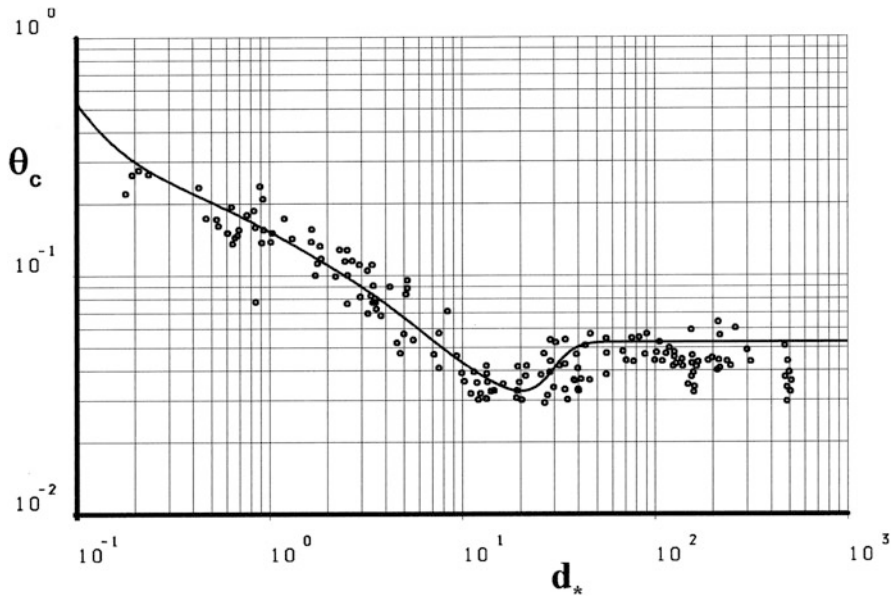


Abb. 9.78 Kritische Schleppspannung nach Gl. 9.287, explizite Darstellung

Der Wert $K \geq 1$ beschreibt die Kohäsionswirkung und ist für kohäsionsloses Material $K = 1$ (für näheres s. Zanke 2001).

Die Original-Shields-Darstellung ist bezüglich τ_c implizit weil sowohl θ_c als auch Re_{*c} enthalten. Diesem Nachteil kann man mit folgendem Kennzahlzusammenhang abhelfen:

$$Re_*^2 = \theta \cdot d_*^3 \quad (9.289)$$

Man erhält so ein *modifiziertes Shields-Diagramm* $\theta_c = f(d_*)$, das es erlaubt, τ_c explizit aus den im dimensionslosen Korndurchmesser erfaßten Materialdaten zu bestimmen (Abb. 9.78).

Die explizite Kurve für den Bewegungsbeginn nach Abb. 9.78 lässt sich für praktische Belange durch einen Polygonzug beschreiben:

$$\begin{aligned} d_* < 0,2 &\Rightarrow \theta_c = 0,082 \cdot d_*^{-0,8} \\ 0,2 < d_* < 2,5 &\Rightarrow \theta_c = 0,15 \cdot d_*^{-0,43} \\ 2,5 < d_* < 17 &\Rightarrow \theta_c = 0,17 \cdot d_*^{-0,58} \\ 17 < d_* < 24 &\Rightarrow \theta_c = 0,033 \\ 24 < d_* < 42 &\Rightarrow \theta_c = 0,0026 \cdot d_*^{0,8} \\ 42 < d_* &\Rightarrow \theta_c = 0,052 \end{aligned} \quad (9.290)$$

$$\text{mit } \tau_c = \theta_c \cdot (\rho_s - \rho) \cdot g \cdot d_m \quad (9.291)$$

Darin ist g' nach (9.263) und d_m ggf. nach (9.251) zu bilden, falls nicht $d_m = d_{50}$ angenommen werden kann.

Man beachte, dass es sich für Quarzsand in Wasser mit $\Delta\rho/\rho = 1,65$ und $\nu = 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ bei $d_* < 3$ um maßgebende Korngrößen von $d_m < 0,14 \text{ mm}$, bei $d_* > 125$ um solche von $d_m > 5,9 \text{ mm}$ handelt.

Liu-Darstellung: Eine weitere Möglichkeit, die kritische Sohlschubspannung τ_c dimensionslos zu beschreiben, ist durch die Hinzuziehung der Sinkgeschwindigkeit w der Partikel gegeben, denn diese erfaßt alle für den kritischen Sohlzustand relevanten Materialgrößen: $w = f(d_m, \rho_s, \rho, \nu)$. Wie u. a. von Liu (1957) gezeigt wurde, ist dazu die Einführung einer weiteren, nach Laursen (1958) benannten Kennzahl zweckmäßig:

$$\vartheta = \frac{v_*}{w} \quad \text{bzw.} \quad \vartheta' = \frac{v'_*}{w} \quad (9.292)$$

Darin wird w durch die Reynolds-Zahl der Sinkgeschwindigkeit beschrieben:

$$Re_w = \frac{w d_m}{\nu} \quad (9.293)$$

Mit dieser und mit (9.261) kann der Laursen-Parameter auch interpretiert werden als $\vartheta = Re_*/Re_w$, und wegen (9.289) ergibt sich im transportkritischen Zustand folgender Kennzahlzusammenhang:

$$\theta_c = \frac{Re_w^2}{d_*^3} \vartheta_c^2 \quad (9.294)$$

Da ferner auch $Re_w = f(d_*)$ nur von den beteiligten Materialeigenschaften, die mit d_* zum Ausdruck gebracht werden, abhängt, wird deutlich, dass $\theta_c \sim \vartheta_c^2$ ist. Folglich müssen sich Shields-Werte θ_c in kritische Werte überführen lassen, die als *Liu-Werte* bezeichnet werden.

Statt der mit Abb. 9.76 und 9.78 beschriebenen Shields-Diagramme werden Liu-Darstellungen erhalten, die wiederum implizit als $\vartheta_c = f(Re_{*c})$ oder explizit als $\vartheta_c = f(d_*)$ möglich sind. Mit einer beispielsweise nach (9.299) für Sandkornformen in Rechnung gestellten dimensionslosen Sinkgeschwindigkeitsformel wird so das in Abb. 9.79 wiedergegebene *Liu-Diagramm* erhalten.

Das asymptotische Verhalten bei hohen d_* -Werten setzt nur scheinbar wesentlich früher ein als bei Shields, weil das charakteristische Minimum in dieser Auftragung deutlich flacher ausfällt und dadurch fast gar nicht in Erscheinung tritt. Die in der Liu-Darstellung enthaltenen Zahlenwerte ergeben sich auf Grund der verwendeten Sinkgeschwindigkeitsformel (9.299); andere Formeln können davon geringfügig abweichende Ausdrücke ergeben.

Anzumerken ist noch, dass Liu (1957) kritische Werte ϑ_c bestimmt hat, die den Beginn einer Riffelbildung markieren, vgl. z. B. Bogardi (1974).

Da eine ebene Sohle sofort mit dem Beginn des Sedimenttransports zu einer Riffelsohle verformt wird, wenn der Belastungszustand und die Materialdaten dies

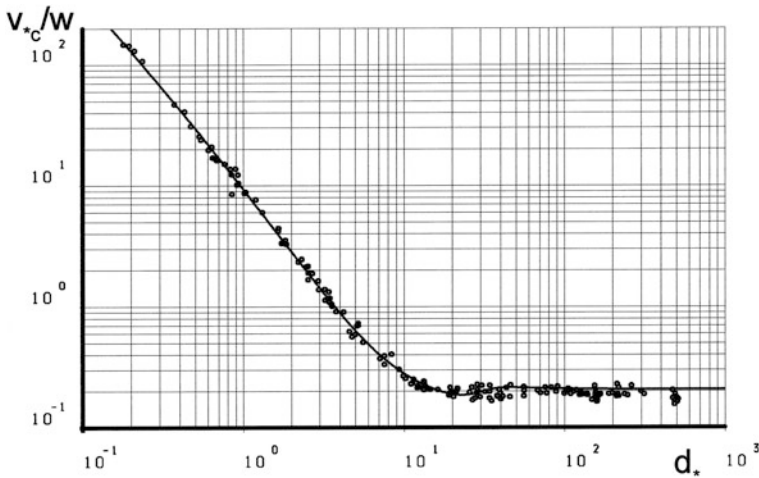


Abb. 9.79 Kritische Schubspannung in Liu-Darstellung mit umgerechneten Messwerten der Shields-Diagramme; Grundlage der Kurve: Gl. 9.287 und Gl. 9.299

erlauben (s. unter 9.4.3), entsprechen diese Liu-Werte v_{*c} zumindest annähernd der von Shields beschriebenen kritischen Sohlenbelastung. Nach der vorstehend gezeigten Überführbarkeit von θ_c in v_{*c} darf dies auch erwartet werden.

Sinkgeschwindigkeit: Für die stationäre Geschwindigkeit w , mit der zu Kugeln idealisierte Sohlenpartikel in ruhendem Wasser fallen, ergibt eine Impulssatzanwendung mit g' nach (9.263) die Relation

$$w = 2 \cdot \sqrt{\frac{g' d_m}{3 c_w}} \quad \text{bzw.} \quad Re_w = \frac{2 d_*^{3/2}}{\sqrt{3 c_w}} \quad (9.295)$$

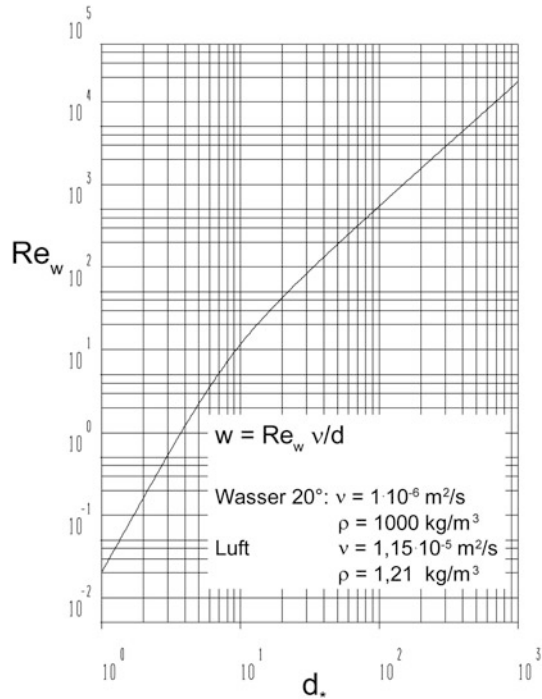
Darin ist c_w der Widerstandsbeiwert eines einzeln fallenden Sedimentkorns, dessen maßgebender Durchmesser d_m rechnerisch als Kugeldurchmesser aufgefaßt wird. Mit dieser Annahme wird einerseits erreicht, dass auf bekannte Gesetzmäßigkeiten (für Kugeln) zurückgegriffen werden kann; andererseits folgt daraus eine Restriktion dahingehend, dass die maßgebende Korngröße d_m dem „äquivalenten“ Kugeldurchmesser entsprechen sollte, wobei dieser durch gleiche Sinkgeschwindigkeiten von realen und zu Kugeln idealisierten Sedimentpartikeln (bei sonst gleicher Beschaffenheit) definiert ist.

Man mag gegen diese Idealisierung Einwände haben, z. B. dass die Kornform unberücksichtigt bleibt oder die Sinkgeschwindigkeit von Korngruppen nicht der des Einzelkorns entspricht; sie hat aber zumindest den Vorteil einer eindeutigen Festsetzung, wenn w bei der Bestimmung von v_{*c} als Bezugsgröße dienen soll.

Der Widerstandsbeiwert c_w einer Kugel kann auf Grund bekannter experimenteller Daten durch eine Beziehung $c_w(d_*)$ oder $c_w(Re_s)$ approximiert werden, vgl. (9.283). Unter zahlreichen diesbezüglichen Ansätzen hat sich u. a. bewährt:

$$c_w = 432 d_*^{-3} + 48 d_*^{-3/2} + 0,4 \quad (9.296)$$

Abb. 9.80 Sinkgeschwindigkeit von Kugeln, dimensionslos dargestellt



Ein asymptotischer Grenzfall dieser empirischen Beziehung, s. Abb. 9.80, ist wegen $d_*^3 = \frac{3}{4} c_w Re_w^2$ gegeben durch $c_w = 24/Re_w$ für $d_* \rightarrow 0$ (Stokes); die andere Asymptote ist für $d_* \rightarrow \infty$ (begrenzt durch $Re_w \leq 10^5$) mit $c_w = 0,4$ konstant.

Mit (9.298) folgt aus (9.297) als dimensionslose Sinkgeschwindigkeit sformel, Abb. 9.80:

$$Re_w = \frac{d_*^3}{\sqrt{324 + 36 d_*^{3/2} + 0,3 d_*^3}} \quad (9.297)$$

Eine andere Approximation ist nach Zanke (2002) für Partikel verschiedener Form gültig

$$c_w = \frac{a}{Re_w} + b \quad (9.298)$$

und daraus

$$Re_w = \frac{a}{2b} \left(\sqrt{1 + \frac{16}{3} \frac{b}{a^2} d_*^3} - 1 \right) \quad (9.299)$$

mit $a_{\text{kugel}} = 24$, $b_{\text{kugel}} = 0,4$ und $a_{\text{sand}} = 32$, $b_{\text{sand}} = 1,09$.

Mit (9.299) ist die zuvor erläuterte Umsetzung von Shields-Werten θ_c in Liu-Werte ϑ_c vorgenommen worden. Es gibt darüber hinaus zahlreiche weitere Sinkgeschwindigkeitsformeln; eine diesbezügliche Übersicht ist z. B. bei Zanke (1982) zu finden. Einige dieser Formeln berücksichtigen die von der Kugelform abweichende Kornform durch einen *Korn-Formfaktor* $FF = C/\sqrt{AB}$, der an einem die tatsächliche Korngestalt idealisierenden Ellipsoid mit A, B und C als Raumachsen orientiert ist, wobei A den größten Wert und C den kleinsten Wert hat. Natürlich vorkommende Sand- und Kiesmaterialien weisen einen durchschnittlichen Formfaktor $FF \approx 0,7$ auf, siehe bei Vanoni (1977). FF ist nicht zu verwechseln mit dem Formbeiwert f .

Suspensionsbeginn: Mit Überschreiten des als transportkritische Schubspannung bezeichneten Schwellenwerts τ_c beginnt zunächst der Geschiebetransport. Bei feinem Kornmaterial (im System Sand-Wasser ca. $d < 0,2$ mm) beginnt an dieser Schwelle auch eine Suspendierung der Sedimente. Bei größeren Sedimenten tritt Suspendierung erst nach weiterem Anwachsen der Sohlenbelastung ein. Der Übergang von der Bewegung als Geschiebe zu schwebend transportiertem Material ist fließend. Obwohl also eigentlich keine eindeutige Abgrenzung zwischen Geschiebe- und Schwebstofftransport besteht, wird üblicherweise dennoch oft von einem weiteren Schwellenwert τ_{sc} ausgegangen, dessen Überschreiten den Beginn des Schwebstofftransports markiert. Diese Schwelle ist aber, wie auch bei τ_c , keine scharfe Grenze sondern ein Übergangsbereich von erster, sporadischer Suspendierung bis zu voll entwickeltem Suspensionstransport.

Transport in Suspension ist grundsätzlich nur möglich, wenn die turbulenzbedingten, nach oben gerichteten vertikalen Schwankungsgeschwindigkeiten v' größer sind als die Sinkgeschwindigkeit w : $v' > w$. Weil die Exponierung der Sedimentkörner unterschiedlich ist und weil gleichzeitig die v' -Werte eine Spannbreite besitzen, besteht ein Risiko für Suspendierung, das zwischen 0 und 1 rangiert. Kleiner oder gleich 0 ist das Risiko, wenn auch die stärksten $v' \leq w$ sind. Bei steigender Geschwindigkeit treten dann erst einige, später mehr und mehr $v' > w$ auf. Wenn nahezu alle $v' > w$ sind, geht das Risiko für die Körner, in Suspension zu gelangen, gegen 1. Allerdings geht dann nicht die gesamte Sohle in Suspension, da wegen w und der abwärts gerichteten v' ständig Körner wieder an die Sohle zurück gelangen (s. hierzu 9.4.6. Schwebstofftransport).

Für die praktische Berechnung ist v' nicht ohne weiteres zu ermitteln. Jedoch korrelieren die v_* -Werte recht gut mit v'_* : $v_* \sim v'_*$, so dass Angaben zum Suspensionsbeginn in der Form

$$v_* = \vartheta_{sc} w \quad (9.300)$$

gegeben werden können. Die Werte ϑ_{sc} beinhalten im Sinne der vorstehenden Ausführungen auch eine Angabe des Risikos zur Suspendierung.

Darum sind die dafür empfohlenen ϑ_{sc} -Werte alles andere als einheitlich, wie Tab. 9.12 zeigt.

Die kleineren ϑ_{sc} -Werte der Tabelle sind nach der vorstehenden Risikobetrachtung erster, schwacher Suspendierung zuzuordnen, die höheren Werte beschreiben eher gegen 1 gehendes Risiko für die Körner, suspendiert zu werden.

Tab. 9.12 Orientierungshilfe zur Beurteilung des Suspensionsbeginns

Vorschlag	ϑ_{sc}
Engelund (1965)	0,25
Bagnold (1966)	1,00
Zanke (1982)	0,40
Raudkivi (1982)	1,20
van Rijn ^a (1984)	0,40

^afür $d_* > 10$

Stabilisierende Effekte: Die den Beginn des Sedimenttransports markierende kritische Schleppspannung ist nicht allein von der Beschaffenheit des Sohlenmaterials sondern auch vom Zustand der Gerinnesohle abhängig. Als Sohlenzustand ist dabei einerseits eine zu Riffeln (und/oder Dünen) verformte Sohle aufzufassen, andererseits kann die Gerinnesohle eine *Deckschicht* aufweisen, die dem Strömungsangriff mehr Widerstand entgegensetzt als das darunterliegende Sohlenmaterial allein. Deckschichten entstehen in natürlichen Gerinnen z. B. durch die Auswaschung der feineren Kornfraktionen des Sohlenmaterials, bei der die groben Bestandteile zurückbleiben und zu einer „Abpflasterung“ der Sohle führen.

Eine ganz andere Art von Deckschicht ergibt sich, wenn sich an der Sohle ein Algenbewuchs o.dgl. entwickeln kann, der die obersten Kornlagen verklammert. Auch in diesem Fall ist eine größere Sohlenbeanspruchung für die Sohlenerosion nötig. Ist die Deckschicht allerdings erst einmal zerstört, so sind wieder die Eigenschaften des ursprünglichen Sohlenmaterials maßgebend und keine stabilisierenden Wirkungen mehr vorhanden.

Wie unter 9.4.3 erläutert, ist allein schon die Verformung der Sohle zu einem Feld von Riffeln oder kleinmaßstäblichen Dünen ein die Sohle stabilisierender Faktor. Diesem wird mit der allgemein favorisierten Auffassung, dass bei einer Sohle mit Transportkörpern nur ein transportwirksamer Schleppspannungsanteil τ' für die Beurteilung des Transportbeginns in Frage kommt, durch eine Reduzierung der aktuellen Sohlenschubspannung τ Rechnung getragen, siehe (9.256)ff. Eigentlich sinnvoller und physikalisch richtiger wäre dagegen, die stabilisierenden Effekte bei der kritischen Schleppspannung τ_c zu berücksichtigen statt mit einer ereignisabhängigen τ -Reduzierung zu arbeiten. Dies würde die Erweiterung des Shields-Diagramms zu einer Kurvenschar $\theta_c = f(Re_*, k/d_m)$ bedeuten, sofern nur mechanische Einflussgrößen eine Rolle spielen, Schröder (1985). Mit k/d_m würde dabei dem Formwiderstand der Riffel bzw. Dünen durch Zuweisung einer äquivalenten Sandrauheit k entsprochen werden, die auf den maßgebenden Korndurchmesser zu beziehen ist. Dieser Zusatzparameter ergibt mit $k/d_m = 1$ die für eine ebene Sohle ohne Deckschicht geltende Shields-Kurve, Abb. 9.76; mit $k/d_m > 1$ kann die Verformung zu Riffeln/Dünen oder die Wirkung einer mechanischen Deckschicht erfaßt werden. Dass diese Vorgehensweise gerechtfertigt ist, hat Höfer (1984) mit seinen Untersuchungen an Riffeln und kleinmaßstäblichen Dünen gezeigt, Abb. 9.81. Dabei wurde allerdings mit einem asymptotischen Shields-Wert $\theta_c = 0,05$ (statt 0,06) für große Re_{*c} gearbeitet. Das Verhalten der Kurvenschar in diesem Bereich ist durch die Höferschen Messungen nicht belegt und stellt eine extrapolative Schätzung dar.

Abb. 9.81 Erweitertes Shields-Diagramm (mechanische Einflüsse)

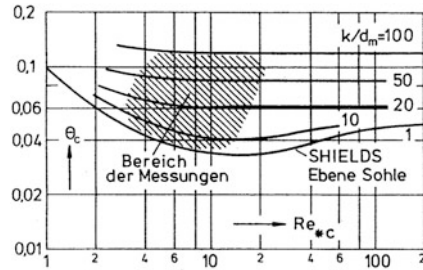
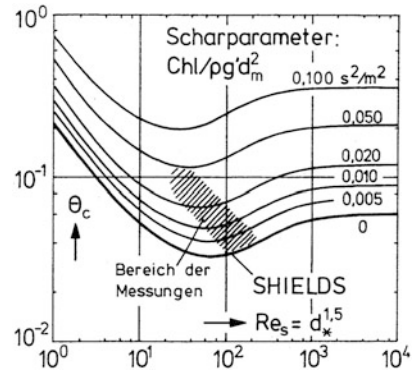


Abb. 9.82 Erweitertes Shields-Diagramm (biologische Einflüsse)



Analog können biologische Effekte berücksichtigt werden, wobei freilich völlig neue Parameter ins Spiel kommen. Eine diesbezügliche, wegweisende Untersuchung ist von Heinzelmann (1992) durchgeführt worden, wobei eine Monokultur von Diatomeen (*Navicula seminulum*) zur Bildung der biologischen Deckschicht verwendet wurde. Mit dieser hat sich gezeigt, dass der Scharparameter des erweiterten Shields-Diagramms mit Hilfe des Chlorophyllgehalts, Chl (Dimension: Masse pro Deckschichtflächeneinheit, kg/m²) gebildet werden kann. In der als exemplarisch zu wertenden 9.287 ist der Scharparameter $Chl/\rho g' d_m^2$ allerdings nicht dimensionslos. Eine Verallgemeinerung des Diagramms ist wegen der auf nur eine Art der Algendeckschicht beschränkten Untersuchung derzeit noch nicht möglich. Immerhin hat sich aber herausgestellt, dass die kritische Schleppspannung τ_c je nach Dichte des Algenbewuchs es ein Vielfaches des Shields-Wert es betragen kann. Damit hat sich auch für Binnengewässer eine Tendenz feststellen lassen wie sie von Führbötter (1983) im maritimen Bereich ermittelt wurde. Der durch Experimente abgedeckte Teil des Diagramms ist in Abb. 9.82 schraffiert.

9.4.5 Geschiebetransport

Transportmodelle für Geschiebe stehen in großer Anzahl zur Verfügung. Sie sind fast durchweg auf empirischer Basis konzipiert worden und beruhen auf mehr oder weniger ausgeprägten Vorstellungen vom Geschehen an der Sohle. Ohne Anspruch

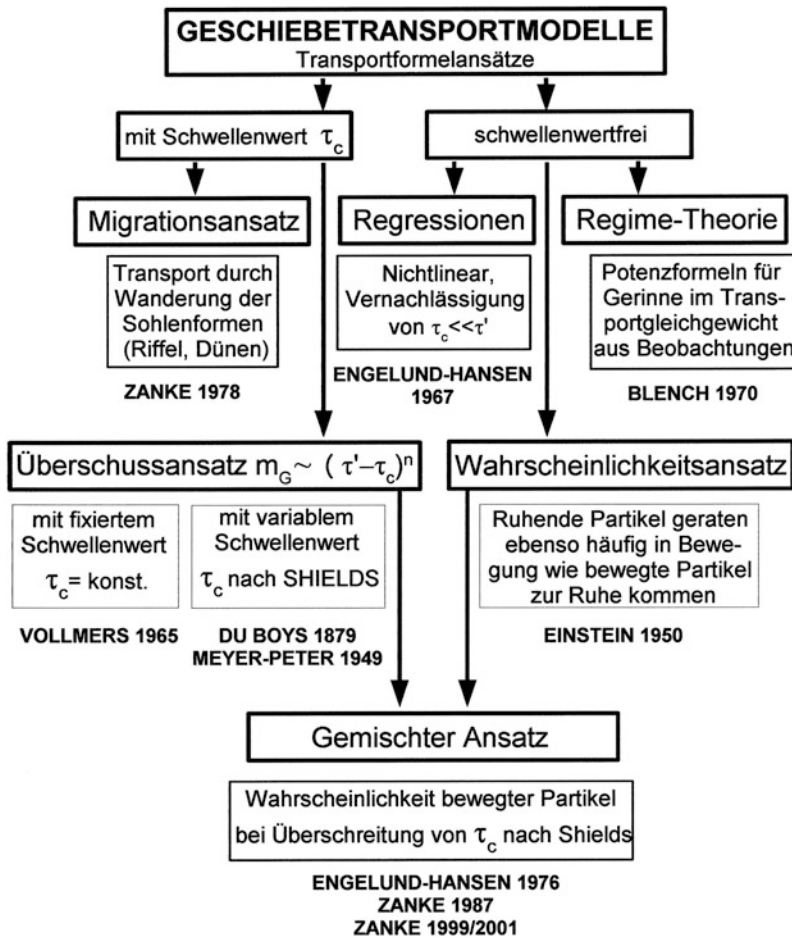


Abb. 9.83 Unterschiedlich konzipierte Transportformeln

auf Vollständigkeit vermittelt Abb. 9.83 einen diesbezüglichen Überblick. Nur einige der zahlreichen Geschiebetransportformeln können nachstehend genannt werden; zuvor sind aber folgende Definitionen erforderlich:

Unter *Geschiebetransport* ist der Transport von *Geschiebemasse* (nicht -volumen) pro Zeiteinheit durch einen Gerinnequerschnitt zu verstehen, M_G in kg/s. Als *Geschiebefracht* bezeichnet man die während eines Zeitabschnitts Δt transportierte Masse, $\int M_G dt$ in kg. Wichtigste Rechengröße ist aber die auf die Breitereinheit bezogene *Transportrate* in kg/(ms):

$$m_G = \frac{M_G}{b} \quad (9.301)$$

Darin ist b die Sohlenbreite des Gerinnes bzw. die Breite, auf der ein Geschiebetrieb stattfindet. Diese Definition von m_G entspricht der Auffassung des Transportproblems als vertikal-ebener Vorgang. Analoge Transportraten m_S und m (ohne Index) werden für den Schwebstofftransport und den Gesamttransport $m = m_G + m_S$ angesetzt.

Aus der Transportrate m_G ergibt sich das je Breiten- und Zeiteinheit transportierte Geschiebevolumen (mit Porenanteil) als $q_G = m_G/\rho_L$, worin ρ_L die *Lagerungsdichte* des Schüttguts Geschiebe ist. Nach Vanoni (1977) gelten für diese bei Sandmaterial Werte zwischen 1475 kg/m^3 und 2240 kg/m^3 . Üblicher Rechenwert ist $\rho_L = 1850 \text{ kg/m}^3$, einer Porosität von 0,7 entsprechend (Porenanteil $n = 30 \%$).

Die einheitliche Darstellung der Geschiebetransportformeln erfordert die Einführung einer dimensionslosen Transportrate, die seit Einstein (1950) als *Transportintensität* bezeichnet wird:

$$\phi_G = \frac{m_G}{\rho_S} \frac{1}{\sqrt{g' d_m^3}} \quad (9.302)$$

Für den Suspensionstransport gilt ϕ_S entsprechend, und der dimensionslose Gesamttransport ist $\phi = \phi_G + \phi_S$. Es bedeuten ρ_S die Dichte des Sedimentmaterials (reine Feststoffmasse ohne Porenanteil, nicht Lagerungsdichte), g' die nach (9.263) modifizierte Erdbeschleunigung und d_m den maßgebenden Korndurchmesser, z. B. $d_m = d_{50}$ bei „einkörnigem“ Material, vgl. unter 9.4.1.

Als Geschiebetransportformel in dimensionsloser Darstellung wird die Abhängigkeit dieser „Transportintensität“ von der „Strömungsintensität“ (9.284) bzw. von deren Kehrwert, der „Bewegungsintensität“ (9.286), angegeben: $\phi_G = f(\theta)$ oder $f(\theta')$ bzw. $\phi_G = f(\psi)$ oder $f(\psi')$. Nach Berechnung von ϕ_G folgt die Transportrate jeweils aus

$$m_G = \phi_G \rho_S \sqrt{g' d_m^3} \quad (9.303)$$

Alle diese Beziehungen setzen Transportgleichgewicht voraus und tragen damit dem erweiterten Normalabflussbegriff Rechnung, siehe unter 9.4.1.

Meyer-Peter-Formel: Die von Meyer-Peter und Müller (1949) entwickelte „Zürcher Geschiebeformel“ geht davon aus, dass die Transportrate vom Überschuss der transportwirksamen Schubspannung gegenüber der kritischen Schubspannung abhängt, $m_G \sim (\tau' - \tau_c)^n$ oder $m_G = C(v_*'^2 - v_{*c}^2)^n$. Durch ausgiebige Experimente gestützte theoretische Überlegungen haben dafür $n = 3/2$ und $C = 8\rho_S/g'$ ergeben, siehe auch Jäggi (1978). Nach neueren Messungen ist der Faktor nicht wirklich immer 8, sondern variiert in noch nicht bekannter Abhängigkeit etwas: $C = (5 \dots 8)\rho_S/g'$ (Hunziker 1995; Zanke 2002). Mit den in (9.284) und (9.302) definierten Intensitäten des Strömungsangriffs und des Transports ergibt sich so der einfache Zusammenhang

$$\phi_G = (5 \dots 8)(\theta' - \theta_c)^{3/2} \quad (9.304)$$

Darin sind θ' die mit der transportwirksamen Schubspannung $\tau' = c\tau$ gebildete reduzierte Strömungsintensität und θ_c der Shields-Wert, siehe unter 9.4.3 und Tab. 9.10.

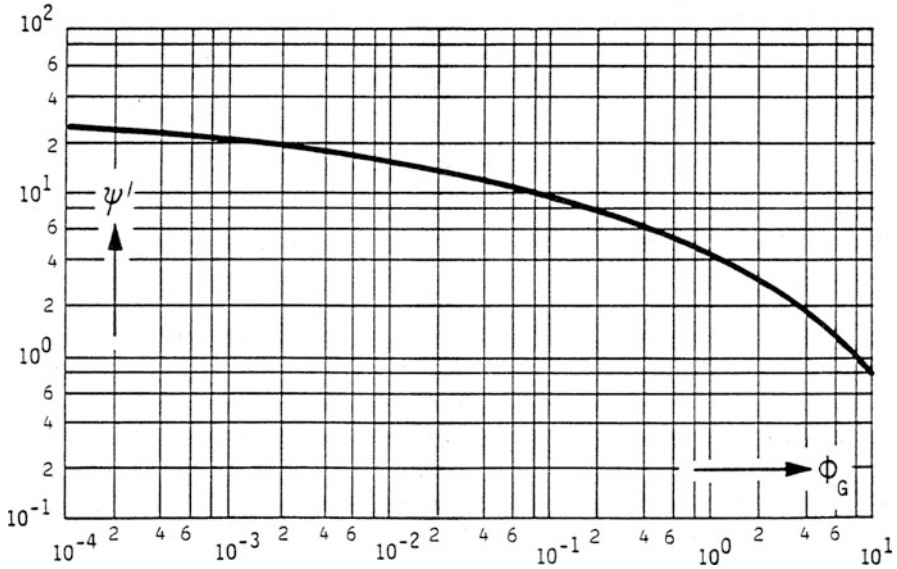


Abb. 9.84 Geschiebetransport nach Einstein

Die Meyer-Peter-Formel gilt vorzugsweise für gröberes Geschiebe ($d > \text{Grobsand}$). Ältere Fassungen dieser Formel enthalten statt des variablen Shields-Wertes θ_c einen konstanten Durchschnittswert von 0,047. Diesbezüglich und das im Vergleich zur dimensionslosen Darstellung weniger übersichtliche Original der Meyer-Peter-Formel betreffend ist u. a. auf Zeller (1963) zu verweisen.

Einstein-Formel: Bei Transportgleichgewicht ist davon auszugehen, dass Sohlenpartikel ebenso häufig in Bewegung geraten wie bewegte Teilchen zur Ruhe kommen. Mit einem hierauf beruhenden Wahrscheinlichkeitskonzept hat Einstein (1950) folgende schwellenwertfreie Bedingung für den Zusammenhang zwischen Transport- und Bewegungsintensität formuliert:

$$\frac{A\phi_G}{1 + A\phi_G} = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-B\psi' - C}^{B\psi' - C} e^{-x^2} dx \quad (9.305)$$

Konstanten: $A = 43,5$ $B = 0,143$ $C = 2,0$

Dabei ist ψ' mit der reduzierten Schleppspannung $\tau' = c\tau$ zu bilden, siehe unter 9.4.3. Der Verlauf von $\phi_G = f(\psi')$, der *Einstein bed load function*, ist aus Abb. 9.84 ersichtlich. Bei der Auflösung nach ϕ_G kann man (9.305) mit der Fehlerintegralfunktion $\text{erf}(z)$ auf eine für die Anwendung geeignetere Form bringen:

$$\phi_G = \frac{1}{A} \left(\frac{2}{\text{erf}(B\psi' + C) + \text{erf}(B\psi' - C)} - 1 \right) \quad (9.306)$$

Die Konstanten A, B und C sind bei (9.305) angegeben. Man beachte, dass $\operatorname{erf}(-z) = -\operatorname{erf}(z)$ ist. Die Fehlerintegralfunktion ist definiert als

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-x^2} dx \quad (9.307)$$

Funktionswerte $\operatorname{erf}(z)$ können aus Tabellen entnommen werden, zu denen man eher Zugang hat als zu solchen mit den in (9.305) verlangten Integralwerten.

Man kann auch mit einer der bei Abramowitz (1965) genannten Approximationen arbeiten; genügt z. B. eine Näherung, die bis einschließlich der vierten Dezimalstelle exakt ist, so gilt

$$\operatorname{erf}(z) = 1 - (a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3) e^{-z^2}; \quad t = \frac{1}{1 + a_0 z} \quad (9.308)$$

Konstanten: $a_0 = 0,47047$ $a_1 = 0,34802$ $a_2 = -0,09588$ $a_3 = 0,74786$

Die Einstein-Formel ist Teil einer Gesamttransportformel, die aber eine Aufteilung in Geschiebe- und Schwebstofftrieb erlaubt. Sie wurde darüber hinaus speziell für das fraktionsweise Berechnen des Sedimenttransports entwickelt. Mit dem maßgebenden Korndurchmesser d_m , siehe 9.4.1, ist (9.306) daher nur bei Kornmischungen mit sehr steiler Sieblinie erfolgreich auswertbar. Eine ausführliche Darstellung zu dieser Frage ist u. a. bei Graf (1971) zu finden; ein Vergleich mit anderen Geschiebetransportformeln ist von Jäggi (1978) vorgenommen worden.

Engelund-Fredsoe-Formel: Ohne das Überschusskonzept zu ignorieren haben Engelund und Fredsoe (1976) eine ebenfalls auf einem Wahrscheinlichkeitsansatz beruhende Geschiebetransportformel begründet. Die Transportwahrscheinlichkeit für das Sohlenmaterial, d. h. der zu erwartende Anteil der die Sohle bedeckenden Partikel, die in Bewegung sind, wird dabei in Abhängigkeit vom Schubspannungsüberschuss über dem Schwellenwert τ_c ausgedrückt. Dieser „gemischte“ Ansatz führt auf eine dreistufig auszuwertende Transportformel:

$$\phi_G = 5p(\sqrt{\theta'} - 0,7\sqrt{\theta_c}) \quad (9.309)$$

Auch hierbei ist θ' nach (9.284) mit der reduzierten Sohlenschubspannung $\tau' = c\tau$ zu bilden, vgl. unter 9.4.3. Für die Transportwahrscheinlichkeit p ist zunächst als Hilfsgröße folgende *Überschussfunktion* zu bestimmen:

$$f = \frac{\pi}{6} \frac{\tan \mu}{\theta' - \theta_c} \quad (9.310)$$

Darin ist μ der Gleitreibungswinkel des Geschiebematerials unter Wasser; für natürliche Sande ist $\mu = 27^\circ$ bzw. $\tan \mu = 0,51$ anzusetzen, gröberes Material hat etwas größere μ -Winkel. Mit f ergibt sich die in (9.309) benötigte Transportwahrscheinlichkeit als

$$p = \frac{1}{\sqrt[4]{1 + f^4}} \quad (9.311)$$

In der neueren Literatur wird $p = 1/f$ bevorzugt.

Die hiermit auszuwertende Geschiebetransportformel (9.309) gilt vorzugsweise für feines Geschiebe, siehe auch bei Jäggi (1978).

van Rijn-Formel: Eine weitere Geschiebeformel, die vom Überschusskonzept ausgeht, aber zusätzlich eine Abhängigkeit von der Korngröße ins Spiel bringt, ist von van Rijn(1984) vorgeschlagen worden. Sie beruht auf der Vorstellung, dass die Partikelbewegungen an einer zu Riffeln oder Dünen verformten Sohle infolge der durch die Leewirbel angefachten sohlennahen Turbulenz überwiegend sprungartig sind. Aus Sprunghöhe, Sprungweite und Teilchengeschwindigkeit hat sich daraufhin eine Gesetzmäßigkeit für den Transport der Partikel, die Kontakt mit der Sohle haben, herleiten und experimentell verifizieren lassen. Mit der hier einheitlich angewandten Notation lautet diese:

$$\varphi_G = \frac{0,053}{d_*^{0,3}} \left(\frac{\theta'}{\theta_c} - 1 \right)^{2,1} \quad 4 \leq d_* \leq 40 \quad (9.312)$$

Wieder ist θ' nach (9.284) mit $\tau' = c\tau$ in Rechnung zu stellen, siehe unter 9.4.3. Die Formel gilt mit Bezug auf Abb. 9.78 vorzugsweise im Bereich „Übergang“, wie die Beschränkung des dimensionslosen Korndurchmessers d_* ausweist.

Zanke-Formel (1999/2001): Mit dieser Formel wurde wurde der Grundidee gefolgt, daß der Geschiebetransport q_G als Produkt der Dicke s der bewegten Geschiebeschicht mit deren Geschwindigkeit u_G geschrieben werden kann:

$$q_G = s_G \cdot u_G \quad (9.313)$$

Für die Schichtdicke wird abgeleitet

$$\frac{s_G}{d} = 2,8 p (\theta - p \theta_c) \quad (9.314)$$

mit $p = (1 + 10 \cdot (\theta/\theta_c)^{-9})^{-1}$ als Wahrscheinlichkeit der Bewegung. Man beachte, daß s_G in 9.314 bezogen ist auf den Hohlraumgehalt im Ruhezustand, also keine Aussage zum erhöhten Hohlraumanteil im Bewegungszustand gibt, was aber für q_G nicht relevant ist. Diese vereinfachte Formel für s_G ergibt sich unter Ausschluß von sehr steilen Gerinnen und Fällen mit im Verhältnis zur Korngröße sehr flachem Wasser aus einer allgemeineren Lösung (s. Originalveröffentlichung). Weiter ist

$$u_G = \frac{1}{2} v_s \left(1 - 0,7 \frac{v_{*c}}{v_*} \right) = \frac{1}{2} v_s \sqrt{\frac{1}{\theta}} \left(\sqrt{\theta} - 0,7 \sqrt{\theta_c} \right) \quad (9.315)$$

mit v_s = Geschwindigkeit des Wassers an der Sohle (genauer: am Kraftangriffspunkt in der Geschiebeschicht). Damit läßt sich der Geschiebetransport dimensionslos schreiben als

$$\phi = 1,4 \frac{v_s}{v_*} p (\theta - p \theta_c) \left(\sqrt{\theta} - 0,7 \sqrt{\theta_c} \right) \quad (9.316)$$

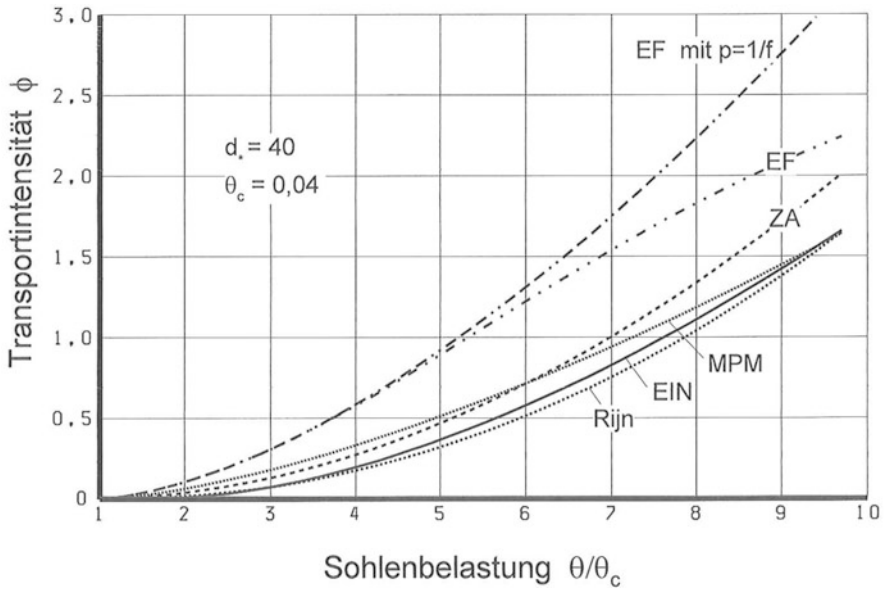


Abb. 9.85 Geschiebetrieb (geriffelte Sohle)

wobei

$$v_s/v_* = \left[[y_{SG}^+]^{-2} + p_{yt} \left[2,5 \ln \frac{y_{SG}}{k_s} + B \right]^{-2} \right]^{-1/2} \quad (9.317)$$

mit $y_{SG} = 0,1125d + s_G$, $y_{SG}^+ = y_{SG}v_*/\nu$, $k_s = 2d$, $B = 2,5 \ln \left(\frac{1}{0,033 + 0,11v_*k_s/\nu} \right)$. Weiter ist $p_{yt} = 1 - \exp(-0,08y_{SG}^+)$ die Wahrscheinlichkeit für Turbulenz im Sohlenabstand y_{SG} .

Die Formel gilt zunächst für die ebene Sohlen. Falls Riffel oder Dünen die Sohle bedecken ist die transportwirksame Schubspannung nicht um Formrauheitseinflüsse zu reduzieren wie bei den anderen vorstehend besprochenen Transportformeln. Stattdessen ist dann mit nur 50 % der für ebene Sohle berechneten Transportraten zu arbeiten.

Formelvergleich: Auf Grund der sehr unterschiedlichen Modellvorstellungen vom Transportmechanismus des Geschiebetriebs kann kaum erwartet werden, daß sich aus den fünf Geschiebetransportformeln völlig übereinstimmende Aussagen ergeben. Dies wird exemplarisch mit Abb. 9.85 demonstriert. Dabei handelt es sich mit einer dimensionslosen Korngröße $d_* = 40$ um einen Belastungsbereich, in dem noch mit ebener Sohle zu rechnen ist ($c = 1$; $\theta' = \theta$) vgl. 9.4.3.

Bei einer Darstellung von $\phi_G = f(\theta'/\theta_c)$ ist die Bewertung von Formeln, die außer dem Belastungswert θ'/θ_c weitere Parameter enthalten, durch eben diese erschwert. Daher beschränkt sich der hier angestellte Vergleich auf einen grundlegenden

strukturellen Vergleich einiger Formeln, hier Meyer- Peter/Müller (bevorzugt für grobe Sedimente anwendbar), Engelund-Fredsoe (bevorzugt für feine Sedimente) und Zanke 1999/2001 (grob und fein). Obwohl diese drei Formeln durch ganz unterschiedliche Überlegungen und einen unterschiedlichen Grad an Empirie zustande gekommen sind, haben Sie wesentliche Übereinstimmungen. Um dies herauszuarbeiten, sind die Formeln etwas umgestellt und nachfolgend gegenüber gestellt.

Meyer-Peter/Müller	$\phi_G = 8$	$(\theta' - \theta_c) \sqrt{\theta' - \theta_c}$	
oder	$\phi_G \approx 8,5 \dots 11,2$	$(\theta' - \theta_c) \left(\sqrt{\theta'} - 0,7\sqrt{\theta_c} \right)$	
Engelund-Fredsoe	$\phi_G = 5 p$	$\left(\sqrt{\theta'} - 0,7\sqrt{\theta_c} \right)$	alle θ'/θ_c
	$\phi_G = 18,74$	$(\theta' - \theta_c) \left(\sqrt{\theta'} - 0,7\sqrt{\theta_c} \right)$	$\theta \leq ca. 4 \cdot \theta_c$
Zanke 1999/2001	$\phi = 1,4 \frac{v_s}{v_*} p$	$(\theta - p\theta_c) \left(\sqrt{\theta} - 0,7\sqrt{\theta_c} \right)$	

Man beachte, daß die p -Werte in den Formeln EF und ZA nicht das Gleiche sind.

Lässt man für den strukturellen Formelvergleich einen möglichen Ufereinfluss und mögliche Formrauheiten außer Acht, ist $\theta' = \theta$. Setzt man weiter in der Zanke-Formel $p = 1$ und setzt für v_s/v_* einen Zahlenwert ein, sind die Formeln von Engelund-Fredsoe für $\theta' < 4\theta_c$ und die Zanke-Formel in ihren Abhängigkeiten gleich. Da das Verhältnis von $\sqrt{\theta' - \theta_c}$ und $(\sqrt{\theta'} - 0,7\sqrt{\theta_c})$ im Bereich $1 < \theta/\theta_c < 100$ nur zwischen 1,07 und 1,4 variiert und somit auch der Unschärfe des Vorfaktors 8 zugeschlagen werden kann, ist die MPM-Formel ebenfalls strukturell fast gleich. Das ist angesichts der existierenden mehrere Dutzend z. T. völlig unterschiedlich aufgebauten und zustande gekommenen Geschiebformeln eine wichtige Erkenntnis.

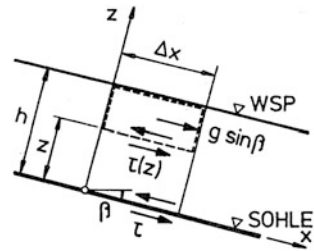
Bei der realen Berechnung wirkt sich allerdings merkbar aus, daß der Vorfaktor unterschiedlich ist:

- eine Konstante 8 bei MPM
- ein Wert $0 < 5p < 5$ bei EF als $f(\theta/\theta_c)$
- ein Wert $v_s/v_* = f(Re_*, \theta/\theta_c)$

Weiterhin entstehen Unterschiede wegen der ‚harten‘ Schwelle bei $\theta = \theta_c$ in MPM und EF im Gegensatz zur ‚weichen‘ Schwelle infolge der Bewegungswahrscheinlichkeit p in Za99/01 und der Schubspannungsreduktion in EF und MPM. Hierzu sei noch angemerkt, daß verschiedene neuere Vergleiche mit Messergebnissen bei MPM zu besseren Resultaten führten, wenn auf diese Reduktion verzichtet und gleichzeitig der Faktor von 8 auf 5 gesetzt wurde.

Man muß sich bei der Geschiebetransportberechnung also auf große Streubreiten der Rechenergebnisse einstellen und es ist daher ratsam, sich über deren Ausmaß z. B. durch vergleichende Messungen zu informieren. Mit solchen Messungen können die Zahlenfaktoren in der angewandten Formel auch für den konkreten Anwendungsfall „geichtet“ werden, wobei man aber wissen muß, daß Transportmessungen ebenfalls nur unscharfe Ergebnisse liefern können.

Abb. 9.86 Definitionen zur Schubspannungsverteilung



9.4.6 Schwebstofftransport

Schwebend transportiertes Sohlenmaterial, das durch die von der Sohle ausgehende Turbulenz in höhere Bereiche der Strömung gebracht worden ist, und den Sohlenkontakt bleibend verloren hat, wird mit der örtlich vorhandenen Fließgeschwindigkeit verfrachtet. Im Gegensatz zum Geschiebe, bei dem eine Abminderung der Sohlenschubspannung von τ auf τ' diskutiert werden kann und auch bei manchen Formeln angesetzt wird, ist für den Schwebstofftransport in jedem Fall die gesamte Sohlenschubspannung τ maßgebend. Bei der Transportrate m_s kommt es im wesentlichen auf das Produkt aus Schwebstoffverteilung $C(z)$ und Geschwindigkeitsverteilung $v(z)$ an.

Schwebstoffverteilung: Bei der Ermittlung des Konzentrationsprofils der Schwebstoffe über der Wassertiefe kann man von der unter 3.2.2 beschriebenen Fremdstofftransportbilanz ausgehen, mit der sich die Transportgleichung (9.227) ergeben hat. Im ebenen Normalabflusszustand ist die Konzentration der in Suspension befindlichen Sedimentpartikel nur vom Vertikalabstand z über der Sohle abhängig, $C = C(z)$. Wegen $\partial C / \partial x = \partial C / \partial y = 0$ wird bei Quellenfreiheit mit $S_c = 0$ die stationäre Beziehung $v_z \frac{dC}{dz} = \frac{d}{dz} \left(D_z \frac{dC}{dz} \right)$ erhalten. Dabei ist v_z die schwerkraftbedingte Geschwindigkeit, mit der sich die Partikel in z -Richtung bewegen wollen, also $v_z = -w$ (Sinkgeschwindigkeit). Der Diffusionskoeffizient D_z wird als sogenannte Partikeldiffusion $\epsilon_s(z)$ eingeführt, so daß man mit $w \frac{dC}{dz} + \frac{d}{dz} \left(\epsilon_s \frac{dC}{dz} \right) = 0$ die im vorliegenden Fall maßgebende Transportgleichung gewinnt. Mit $C = 0$ und $\epsilon_s = 0$ an der Wasseroberfläche $z = h$ erhält man mit der ersten Integration die überall im einschlägigen Schrifttum, zu findende Differentialgleichung

$$w C(z) + \epsilon_s(z) \frac{dC}{dz} = 0 \quad (9.318)$$

In dieser Gleichung sind die Abwärtsbewegung durch Schwerkraftwirkung und die Aufwärtsbewegung durch Turbulenz einander gegenübergestellt. Die Partikeldiffusion ϵ_s wird darin proportional zur turbulenten Diffusion ϵ , der sogenannten Wirbelviskosität, angenommen, vgl. (3.17):

$$\epsilon_s(z) = r \epsilon(z) \quad (9.319)$$

Letztere kann $\tau(z) = \rho \epsilon(z) dv/dz$ aus der Schubspannungsverteilung gewonnen werden, die sich mit Hilfe des Impulssatzes als linear herausstellt, Abb. 9.86:

$\tau(z) = \tau(1 - z/h)$ mit der Sohlschubspannung $\tau = \rho ghI$ bei ebener Strömung. Der Geschwindigkeitsgradient dv/dz kann ferner mit (9.35) eingebracht werden, so daß sich für den z -abhängigen turbulenten Diffusionskoeffizienten mit der Schubspannungsgeschwindigkeit $v_* = \sqrt{\tau/\rho}$ schließlich ergibt:

$$\epsilon(z) = \kappa v_* z (1 - z/h) \quad (9.320)$$

Für den Faktor r in (9.319) gibt es nur wenige Informationen, die einander teils sogar widersprechen. Er beinhaltet einerseits die Beeinträchtigung der turbulenten Diffusion durch die massereicheren und daher gegenüber den Wasserpartikeln trägeren Schwebstoffteilchen zum Ausdruck und andererseits den Schlupf zwischen Teilchen und Wasser bei Geschwindigkeitsfluktuationen des Wassers. Größere (massereichere) Teilchen benötigen eine längere Zeit, um sich an die Umgebungsströmungen anzupassen. Im Extremfall schwanken die Wassergeschwindigkeiten und die Teilchenbewegung ist davon unbeeinflusst. Da die Partikeldiffusion somit kleiner wird als die des Wassers, sollte stets $r < 1$ sein.

Von Zanke (1982) wird der r -Faktor favorisiert als $r = 1 - v_{*sc}/v_*$ mit v_{*sc} als kritische Schubspannungsgeschwindigkeit bei Suspensionsbeginn. Mit $m = \vartheta_{sc}$ entsprechend Tabelle 9.12 und dem Parameter $\vartheta = v_*/w$ nach (9.292) lautet der Zanke-Vorschlag verallgemeinert:

$$r = 1 - m/\vartheta \quad (9.321)$$

Dazu teilweise im Gegensatz steht ein von van Rijn (1984) empfohlener Ausdruck, der mit der gleichen Kennzahl wie folgt lautet ($1 \leq \vartheta \leq 100$):

$$r = \frac{\vartheta^2 + 2}{\vartheta^2 + 1,188 C_0^{2/5} \vartheta^{1/5} (\vartheta^2 + 2)} \quad (9.322)$$

Darin ist neben dem mit der Sinkgeschwindigkeit w gebildeten Schubspannungsparameter $\vartheta = v_*/w$ als Referenzkonzentration C_0 ein Wert enthalten, der sich auf die Höhe $z_0 = k$ bezieht, siehe C_a nach (9.330). Beide r -Wert-Vorschläge sind in Abb. 9.87 dargestellt; man erkennt eine gegenläufige Tendenz derselben, ungefähre Übereinstimmung besteht nur bei kleinen ϑ -Werten. Eingetragen sind auch die Grenzwerte der Randkonzentration. Hohe Werte von C_0 führen auch bei van Rijn auf Faktoren $r < 1$. Da mehr Schlupf zwischen Wasser und Teilchen zu geringerer Teilchendurchmischung führt, muß der r -Wert zu kleinen $\vartheta = v_*/w$ hin abnehmen. Die gegenläufige Zunahme bei v. Rijn könnte darauf hindeuten, daß weitere Effekte, wie z. B. veränderliches κ bei seinen Messungen beteiligt waren.

Mit (9.319) und (9.320) wird statt (9.318) erhalten:

$$wC(z) + \kappa r v_* z \left(1 - \frac{z}{h}\right) \frac{dC}{dz} = 0 \quad (9.323)$$

Darin ist die Kármán-Konstante bei Reinwasser und ebener Sohle mit $\kappa = 0,4$ anzusetzen. Das Produkt κr entspricht einem veränderten κ -Wert. Bei hohen Konzentrationen ist eine Verminderung des κ -Wertes zu beobachten während bei einer

Abb. 9.87 Empfohlene r-Faktoren

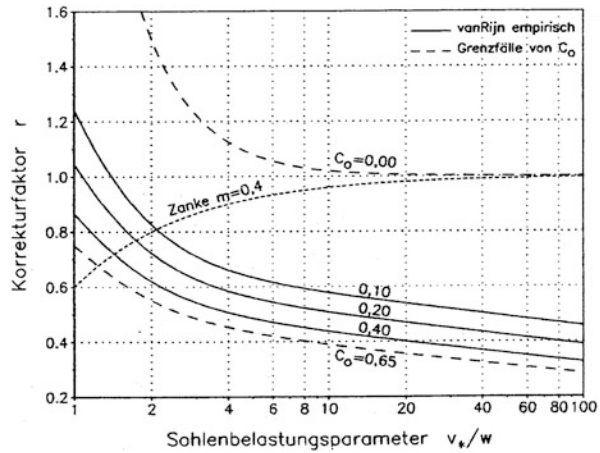
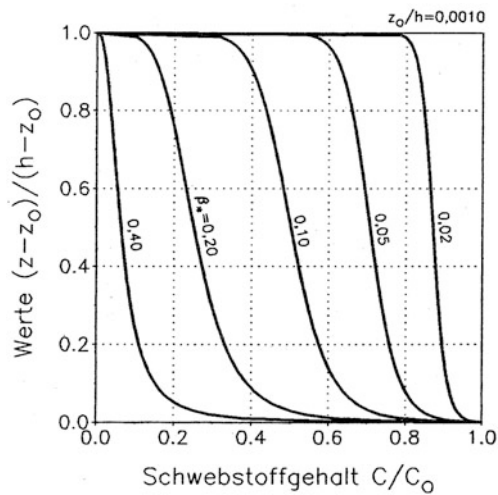


Abb. 9.88 Schwebstoffverteilung



Sohle mit Riffeln oder Dünen (s. z. B. bei Zanke 1982, S. 270) auch erhöhte κ -Werte beobachtet werden.

Die Integration führt unter Berücksichtigung einer Randkonzentration C_0 , die üblicherweise als *Referenzkonzentration* bezeichnet wird, auf die *Schwebstoffverteilung*

$$\frac{C(z)}{C_0} = \left(\frac{z_0}{z} \frac{h-z}{h-z_0} \right)^{\beta_*} \quad \text{mit} \quad \beta_* = \frac{w}{\kappa r v_*} \quad (9.324)$$

Darin ist β_* ein nach Vanoni und Rouse benannter Exponent, der den Belastungszustand und die Eigenschaften des Schwebstoffmaterials repräsentiert; er wird im Schrifttum oft auch als *z-Wert* oder als *Schwebstoffzahl* ausgewiesen, siehe z. B. Bechteler (1988). Je geringer dieser Exponent ausfällt, desto gleichmäßiger sind die Schwebstoffe auch über der Wassertiefe h verteilt, wie Abb. 9.88 veranschaulicht:

Die Grenzfälle $\beta_* \rightarrow 0$ bzw. $\beta_* \rightarrow \infty$ bedeuten vollständig gleichverteilte Schwebstoffe bzw. überhaupt keine Schwebstoffverteilung (nur Geschiebetransport.)

Analoge Aussagen über die Konzentrationsverteilung der Schwebstoffe werden auch nach anderen Berechnungsansätzen erhalten; diesbezüglich wird auf Graf (1971) und Bogardi (1974) sowie auf Raudkivi (1976) verwiesen.

Referenzkonzentration: Um (9.324) auswerten zu können, benötigt man eine Konzentrationsangabe $C_o = C(z_o)$ in einem Referenzniveau z_o , die z. B. durch eine Messung gewonnen werden kann. Im allgemeinen wird man aber nicht auf Beobachtungsdaten zurückgreifen können, sondern muß statt dessen mit einer Schätzung von $C_o = C(z_o)$ zufrieden sein, bei der z_o den unteren Rand der schwebführenden Schicht bzw. den oberen Rand der geschiebeführenden Schicht markiert, Abb. 9.72. Für z_o gibt es in der Literatur verschiedene Vorschläge. Entweder wird von einer Proportionalität zur Wassertiefe ausgegangen, meist $z_o = 0,05 h$, oder von einer Proportionalität zur Korngröße, $z_o \sim d$.

Zur Bestimmung der Referenzkonzentration $C_o = C(z = z_o)$ werden hier drei Vorschläge beschrieben. In allen Fällen handelt es sich, anders als unter 9.3, um Volumenkonzentrationen: Feststoffvolumen in der Volumeneinheit Feststoff-Wasser-Gemisch. Für die Bestimmung von C_o wird vorausgesetzt, daß die Konzentration der Schwebstoffteilchen am unteren Rand des Schwebstoffbereichs gleich der mittleren Konzentration der Partikel in der darunter liegenden geschiebeführenden Schicht ist. Einstein (1950) stellt mit (9.249) für diese „Nahtstelle“ $z_o = 2 d_m$ in Rechnung und ermittelt C_o aus der Geschiebetransportrate, d. h. mittels $m_G = \rho_s C_o z_o v_G$. Hierin ist v_G die sowohl über z_o als auch zeitlich gemittelte Partikelgeschwindigkeit, deren Proportionalität zur Schubspannungsgeschwindigkeit an der Sohle einleuchtet, $v_G \sim v_*$. Wird daraufhin angesetzt $v_G = E \cdot v_*$, worin E als „Einstein-Faktor“ bezeichnet werden möge, so ergibt sich zur Bestimmung von C_o die Geschiebetransportrate

$$m_G = 2E\rho_s C_o v_* d_m \quad (9.325)$$

Darin ist $z_o = 2 d_m$ gesetzt, wobei d_m den maßgebenden Korndurchmesser des Sohlenmaterials angibt. In dimensionsloser Form folgt so mit (9.284) und (9.302) die auf die Höhe z_o bezogene *Einstein-Referenzkonzentration*

$$C_o = \frac{1}{2E} \frac{\phi_G}{\sqrt{\theta}} \quad (9.326)$$

Diese Relation ergibt sich durch Bezug der Partikelgeschwindigkeit v_G auf die unverminderte Schubspannungsgeschwindigkeit v_* und leitet eine Modifizierung des ursprünglichen Einstein-Konzepts für die Berechnung des Schwebstofftransports ein. Im Original wurde nämlich mit der Auffassung, daß für v_G die reduzierte Schubspannungsgeschwindigkeit v'_* maßgebend ist, von $v_G \sim v'_*$ ausgegangen, und Einstein (1950) hat mit einer grenzschichttheoretisch gestützten Abschätzung der Partikelgeschwindigkeit den Zusammenhang $v_G = 11,63 v'_*$ formuliert. Daraus entstand als Referenzkonzentration der Ausdruck

$$C_o = 0,043 \frac{\phi_G}{\sqrt{\theta}} \quad (9.327)$$

Für den Einstein-Faktor E in der Verallgemeinerung (9.326) ist diese Aussage gleichbedeutend mit $E = 11,63\sqrt{c}$, wobei mit c der durch (9.258) definierte Reduktionsfaktor für die Schubabminderung gemeint ist. Wird jedoch bei der Schwebstofftransportberechnung insgesamt davon ausgegangen, daß der mit v_* bzw. θ erfaßte Gesamtschub an der Sohle, also τ , nicht nur τ' , maßgebend ist, so wächst dem E -Faktor die Aufgabe zu, das solchermaßen modifizierte Einstein-Modell an die realen Gegebenheiten anzupassen. Daher ist der E -Wert in (9.326) keine Konstante sondern von den Strömungs- und Materialparametern abhängig. Diesbezüglich wird auf 9.4.7 verwiesen.

Ebenfalls in der Höhe $z_o = 2 d_m$ ist eine von Engelund u. Fredsoe (1976) empfohlene Referenzkonzentration C_o definiert. Mit den aus der Geschiebetransportberechnung bekannten Werten für die Überschussfunktion f nach (9.310) und die Transportwahrscheinlichkeit p nach (9.311) ist zunächst eine sogenannte *lineare Konzentration* C_L zu bestimmen:

$$C_L = 6 \cdot \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{\theta'} (\theta_c + \frac{\pi}{6} p \tan \mu)}{1 + \frac{\Delta \rho}{\rho}}} \quad (9.328)$$

Wie beim Geschiebetransport wird auch hierbei mit der reduzierten Strömungsintensität θ' gerechnet, also τ' nach 9.4.3 berücksichtigt; für Sand ist ferner $\mu \approx 27^\circ$ anzusetzen.

Der Vorschlag beruht auf der Annahme, dass die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines bestimmten C_o -Wertes an der rechnerischen Geschiebeschicht-„Oberkante“ $z_o = 2 d_m$ der Transportwahrscheinlichkeit der Sedimentpartikel entspricht. Mit der linearen Konzentration C_L ergibt sich daraufhin als *Engelund-Fredsoe-Referenzkonzentration*:

$$C_o = 0,65 \left(\frac{C_L}{1 + C_L} \right)^3 \quad (9.329)$$

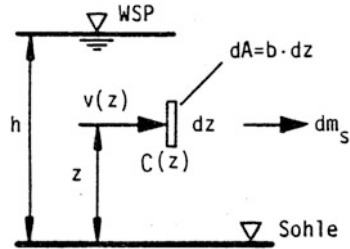
Wie schon zuvor bezieht sich der Index o mit dem maßgebenden Korndurchmesser d_m auf die Höhe $z_o = 2 d_m$ über der idealisierten ebenen Sohle.

Ein dritter Vorschlag, bei dem eine zu Riffeln und/oder Dünen verformte Sohle berücksichtigt wird, stammt von van Rijn (1984). Als Bezugsabstand für die Referenzkonzentration wird dabei aber nicht von $z_o = 2 d_m$ ausgegangen sondern eine Bezugshöhe $a = k$ über dem Nullniveau der Sohle gewählt. Dabei ist k im Sinne der unter 9.4.3 erläuterten „Betrauheit“ die der verformten Sohle zukommende äquivalente Sandrauheit. Für ein Sohlenmaterial, dessen maßgebende Korngröße durch $d_m = d_{50}$ beschrieben werden kann, gilt als zu $z = a$ gehörende Konzentration $C(a)$:

$$C_o = \frac{0,015 d_m}{d_*^3 k} \left(\frac{\theta'}{\theta_c - 1} \right)^{3/2} \quad (9.330)$$

Darin sind die dimensionslose Korngröße d_* durch (9.262), die Strömungsintensität θ' durch (9.284) und der Shields-Wert θ_c durch (9.285) definiert. Die der Beziehung

Abb. 9.89 Definitionen
für transportierten
Schwebstoffmasse



(9.260) genügende Rauheit k entspricht etwa der Transportkörperhöhe, $k \approx K$, vgl. unter 9.4.3. Für (9.330) wird ferner als Geltungsbereich $d < h/100$ angegeben, siehe auch Bechteler (1988). Liegen keine Transportkörper vor (ebene Sohle), so kommt statt k nur die Kornrauheit k' nach (9.273) bzw. (9.274) zum Ansatz; allerdings empfiehlt van Rijn (1984), dann mit $k' \approx 3d_{90}$ zu arbeiten.

Der C_a -Wert ist für eine etwaige Verwendung im Einstein-Modell nicht unmittelbar geeignet, denn dieses verlangt den Bezug auf $z_0 = 2 d_m$ statt auf $a = k$. Mit (9.324) kann (9.330) aber umgerechnet werden, und es ergibt sich als *van Rijn-Referenzkonzentration*:

$$C_o = C_a \left(\frac{a/h}{1 - a/h} \frac{1 - 2d_m/h}{2d_m/h} \right)^{\beta*} \quad (9.331)$$

Nur für $a = 2 d_m$ sind beide Konzentrationswerte gleich. Bei der Umrechnung gebe man acht auf die mit $C_{\max} = 0,65$ theoretisch maximal mögliche Konzentration; ein diesen Wert überschreitendes Rechenergebnis ist ein Indiz für unzutreffende C_a -Daten.

Transportierte Schwebstoffmasse: In Analogie zu (9.301) wird als Schwebstofftransportrate $m_s = M_s/b$ definiert, wobei M_s in kg/s den Suspensatransport im Gerinne der Breite b bedeutet. Durch ein in der Höhe z über der Sohle gelegenes Flächenelement mit der Höhe dz wird in der Breitereinheit die Feststoffmasse $dm_s = \rho_s C(z)v(z)dz$ transportiert, Abb. 9.89. Darin ist $C(z)$ die örtliche Volumenkonzentration entsprechend der mit (9.324) berechneten Schwebstoffverteilung, und $v(z)$ ist die Geschwindigkeit, mit der die Schwebstoffe verfrachtet werden.

Die Transportrate m_s ergibt sich durch Integration zwischen $z = z_0$ und $z = h$, wobei z_0 die „Unterkante“ der schwebführenden Schicht angibt, s. Abb. 9.72; dabei kommt es im wesentlichen auf das Produkt $C(z) \cdot v(z)$ an:

$$m_s = \int_{z_0}^h C(z)v(z)dz \quad (9.332)$$

Zweckmäßig ist eine dimensionslose Darstellung mit dem relativen Abstand $y = z/h$ von der Sohle:

$$\frac{m_S}{\rho_S v_* h} = \int_{y_0}^1 C(y) \frac{v(y)}{v_*} dy \quad (9.333)$$

Mit $z_0 = 2d_m$ nach (9.249) ist dafür $y_0 = z_0/h = 2 d_m/h$ anzusetzen, wobei d_m den maßgebenden Korndurchmesser bedeutet.

Aus (9.326) gewinnt man die Konzentrationsverteilung

$$C(y) = C_0 \left(\frac{y_0}{1 - y_0} \right)^{\beta_*} \left(\frac{1 - y}{y} \right)^{\beta_*} \quad (9.334)$$

Wurde die Referenzkonzentration mit (9.330) nach van Rijn bestimmt, so ist zuvor mit (9.331) die Umrechnung von C_a in C_0 vorzunehmen.

Für die Geschwindigkeitsverteilung $v(y)$ kann auf die für voll rauhes Widerstandsverhalten geltende Beziehung (9.39) zurückgegriffen werden:

$$\frac{v(y)}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \left(\ln y - \ln \frac{k/h}{30} \right) \quad (9.335)$$

Darin ist, abweichend vom Einstein-Verfahren, mit der vollen Schubspannungsgeschwindigkeit v_* (statt v'_*) zu rechnen, und k ist die Sohlenrauheit im Sinne der unter 9.4.3 erklärten Bettrauheit (nicht Kornrauheit).

Mit den so formulierten Profilen $C(y)$ und $v(y)$ ergibt die nach (9.333) verlangte Integration zunächst

$$\frac{m_S}{\rho_S v_* h} = \frac{C_0}{\kappa} \left(\frac{y_0}{1 - y_0} \right)^{\beta_*} \left[I1 \cdot \ln \frac{30}{k/h} - I2 \right] \quad (9.336)$$

Die Abkürzungen I1 und I2 vertreten darin folgende Integrale:

$$I1 = \int_{y_0}^1 \left(\frac{1 - y}{y} \right)^{\beta_*} dy \quad I2 = - \int_{y_0}^1 \left(\frac{1 - y}{y} \right)^{\beta_*} \ln y dy \quad (9.337)$$

Wie zuvor bedeutet $y_0 = 2 d_m/h$, und β_* ist der nach (9.324) mit der vollen Schubspannungsgeschwindigkeit $v_* = \sqrt{\tau/\rho}$ zu bildende Vanoni-Rouse-Exponent.

Bei der Bestimmung dieser Integralwerte, z. B. mit Hilfe der Simpson-Regel, muß beachtet werden, daß die in der Nähe von y_0 sehr steilen Gradienten der Konzentrations- und der Geschwindigkeitsverteilung entsprechend kleine Integrations-schrittweiten erfordern, vgl. Bechteler (1988). Für erste Überschlagsrechnungen kann man auch von den in Abb. 9.90 dargestellten Hilfsfunktionen HF1 und HF2 ausgehen, die mit den Integralen I1 und I2 folgendermaßen zusammenhängen:

$$I1 = 4,65 y_0 \left(\frac{1 - y_0}{y_0} \right)^{\beta_*} \text{ HF1} \quad I2 = 4,65 y_0 \left(\frac{1 - y_0}{y_0} \right)^{\beta_*} \text{ HF2} \quad (9.338)$$

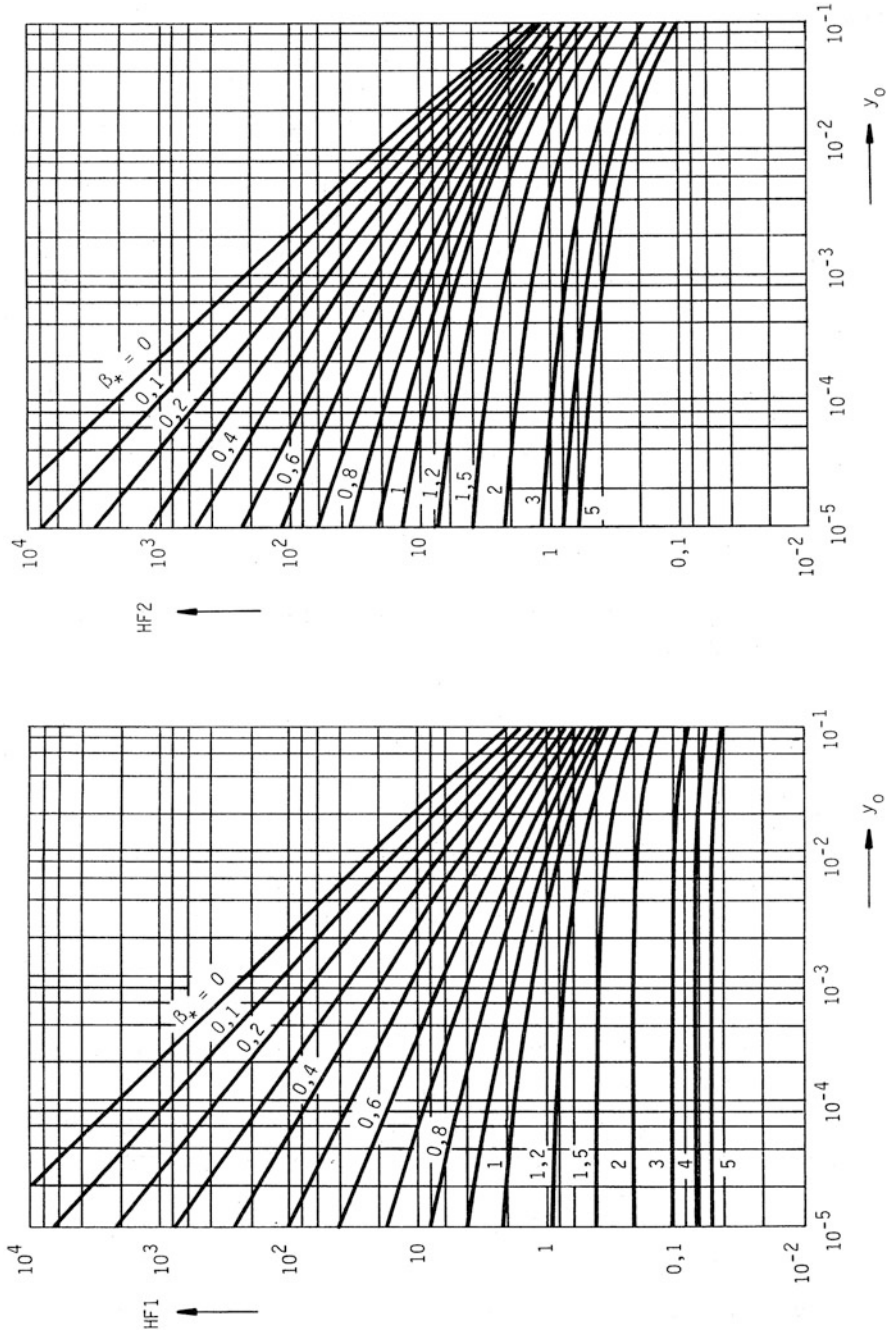


Abb. 9.90 Hilfswerte HF1 und HF2 für die Berechnung des Schwebstofftransports

Diese Ausdrücke gehen auf Einstein (1950) zurück und hängen zusammen mit der Referenzkonzentration nach (9.327): Der Faktor 4,65 entsteht als Produkt aus der Kármán-Konstanten $\kappa = 0,4$ und dem Einstein-Zahlenwert 11,63.

Nach erfolgreicher Kalibrierung des Konzentrationsprofils $C(y)$ mit dem Wertepaar (y_o, C_o) kann man die untere Grenze (nur diese!) der Integrale I1 und I2 variieren: Y_o statt y_o im Bereich $y_o < Y_o < 1$. Die Integralwerte (9.337) werden dann als Funktionswerte $f(Y_{o,*})$ erhalten und ergeben mit (9.336) den Schwebstofftransport oberhalb der durch Y_o markierten Höhe $z = Y_o h$ über der Sohle. Analog kann auch mit den Hilfsfunktionen der Abb. 9.90 verfahren werden.

Mit den Substitutionen (9.338) sowie mit der dimensionslosen Transportrate ϕ_s , die analog (9.302) zu bilden ist, entsteht durch Einsetzen der Referenzkonzentration (9.326) folgende modifizierte Form des Einstein-Modells:

$$\phi_s = \frac{4,65}{\kappa E} \phi_G \left[\text{HF1} \cdot \ln \left(\frac{30}{k/h} \right) - \text{HF2} \right] \quad (9.339)$$

$$\phi_s = \frac{1}{\kappa E} \phi_G \frac{1}{y_o} \left(\frac{y_o}{1 - y_o} \right)^{\beta_*} \left[\text{I1} \cdot \ln \left(\frac{30}{k/h} \right) - \text{I2} \right] \quad (9.340)$$

Weil für ϕ_G die reduzierte Schubspannung $\tau' < \tau$ bzw. θ' maßgebend ist, für ϕ_s dagegen der volle Schub, kommt die Schubspannungsreduktion nach (9.258) indirekt mit ins Spiel. Dazu muß angemerkt werden, daß die Originalversion von Einstein für alle Variablen in (9.340) die reduzierte Schubspannungsgeschwindigkeit v'_* vorsieht; es hat sich jedoch herausgestellt, daß auf diesem Wege vielfach unzutreffende Schwebstoffverteilungen und -transportraten erhalten werden. Wie van Rijn (1984) gezeigt hat, ist der Ansatz des unverminderten v_* -Wertes für den Vanoni-Rouse-Exponent en_* physikalisch sinnvoller; entsprechend gilt für die im Logarithmus von (9.340) anzusetzende Rauheit, daß die Betrauheit k (nicht die Kornrauheit k') maßgebend ist.

Mit diesen Vorgaben entsteht ein modifiziertes Einstein-Verfahren zur Berechnung des Schwebstofftransports, bei dem die klassische Konzeption nicht grundlegend verändert wird. Lediglich mit dem in Rechnung zu stellenden Einstein-Faktor E , der gemäß (9.325) die Partikelgeschwindigkeit des Geschiebes betrifft, wird eine Ergänzung eingebracht. Eingehende Analysen haben ergeben, daß der E -Wert sowohl von Material- als auch von Belastungsparametern abhängig sein dürfte, $E = f(d_*, d_m/h, \theta, \dots)$. Eine diesbezügliche Schätzformel wird mit (9.344) auf Grund einer Auswertung von Gesamttransportdaten vorgeschlagen.

Im übrigen sind einigermaßen zutreffende Aussagen über die Schwebstofftransportrate nach den zuvor genannten Rechenvorschriften nur zu erwarten, wenn ein Sohlenmaterial vorliegt, das guten Gewissens mit $d_m \approx d_{50}$ charakterisiert werden kann, also nahezu „einkörnig“ ist. Andernfalls wird fraktionsweise gerechnet werden müssen, wie es das Einstein-Verfahren ursprünglich vorgesehen hat; es wird diesbezüglich u. a. auf Graf (1971), Raudkivi (1976) und Vanoni (1977) verwiesen.

9.4.7 Gesamttransport

Soweit eine nach Geschiebe und Schweb getrennte Transportberechnung wie unter 9.4.5 und 9.4.6 durchgeführt wurde, ergibt sich die Gesamttransportrate durch einfache Superposition:

$$\phi = \phi_G + \phi_S \quad \text{bzw.} \quad m = m_G + m_S \quad (9.341)$$

Dabei sollten die beiden Komponenten nach den Rechenvorschriften ein- und desselben Autors gebildet werden, z. B. beide nach Engelund und Fredsoe (1976). Es besteht aber auch die Möglichkeit, auf eigens für den Gesamttransport entwickelte Formeln zurückzugreifen, die mit weniger Rechenaufwand auskommen; drei davon werden nachstehend dem klassischen Vefahren (9.341) gegenübergestellt.

Einstein-Formel: Die Zusammenfassung der Transportintensitäten des Geschiebes ϕ_G und des Schwebstoffs ϕ_S führt mit (9.306) und (9.339) auf folgende Gesamttransportformel:

$$\frac{\phi}{\phi_G} = 1 + \frac{1}{\kappa E} \frac{1}{y_o} \left(\frac{y_o}{1 - y_o} \right)^{\beta_*} \left(I1 \cdot \ln \frac{30}{k/h} - I2 \right) \quad (9.342)$$

$$\frac{\phi}{\phi_G} = 1 + \frac{4,65}{\kappa E} \left(HF1 \cdot \ln \frac{30}{k/h} - HF2 \right) \quad (9.343)$$

Darin sind die Integralfunktionen I1 und I2 sowie die Hilfsfunktionen HF1 und HF2 mit (9.337) und (9.338) erklärt, und β_* ist der Vanoni-Rouse-Exponent (9.324). Ferner ist E der bei (9.325) eingeführte Einstein-Faktor, und $y_o = 2 d_m/h$ gibt die Abgrenzung des schwebführenden vom geschiebeführenden Strömungsbereich an, Abb. 9.72, wobei d_m den maßgebenden Korndurchmesser des mit $d_m \approx d_{50}$ als nahezu „einkörnig“ vorausgesetzten Sohlenmaterials bedeutet.

Mit dem Ansatz der vollen Schubspannungsgeschwindigkeit im Exponenten β_* handelt es sich bei dieser Gesamttransportbeziehung um eine Modifizierung des Einstein-Modells, die formal auch durch den Einstein-Faktor E in Erscheinung tritt. Für diesen haben eingehende Analysen von Gesamttransportdaten signifikante Abhängigkeiten von d_m/h , d_* und θ erkennen lassen und zu folgendem Vorschlag geführt:

$$E = \frac{16,84}{\sqrt{d_m/h}} \frac{\theta}{d_*^4} \quad (9.344)$$

Darin ist die Strömungsintensität θ nach (9.284) mit dem unverminderten Sohlenschub τ zu bilden, und d_* ist der dimensionslose Korndurchmesser nach (9.262). Als Anwendungsgrenze für diese E -Wertformel ist nach oben hin mit etwa $\theta \leq d_*^2/3$ zu rechnen, während als untere Begrenzung ein θ -Wert gilt, für den $\theta' \geq \theta_c$ maßgebend ist, wobei der Zusammenhang zwischen θ' und θ durch (9.261) gegeben ist und θ_c den Shields-Wert darstellt.

In der physikalischen Interpretation kann E als eine Größe angesehen werden, mit der die Annahmen, daß die Geschwindigkeit der Geschiebepartikel proportional zur Schubspannungsgeschwindigkeit v_* sei, und daß die Dicke der geschiebeführenden Schicht $2 d_m$ betrage, den real vorliegenden Gegebenheiten entsprechend korrigiert werden. Es ist einleuchtend, daß dabei neben den in d_* zusammengefaßten Materialeigenschaften und der mit θ eingebrachten Sohlenbelastung auch die Wassertiefe h eine Rolle spielt. Man kann diesen Umstand auch als Einfluss der Reynolds-Zahl $Re = 4vh/\nu$ deuten.

Wird der Geschiebetransport ϕ_G nicht wie vorstehend nach Einstein (1950) sondern als (9.309) eingebracht, so hat man es mit einer formal gleichen

Engelund-Fredsoe-Formel zu tun, denn Engelund u. Fredsoe (1976) haben das Einsteinsche Schwebstofftransportmodell übernommen, gehen aber bei der Bestimmung der Transportintensität ϕ_G sowie bei der Referenzkonzentration C_o eigene Wege. Im Prinzip kann man ϕ_G in (9.342) auch mit der van Rijn-Formel (9.312) zum Ausdruck bringen, muß dann aber auf die Umrechnung von C_o nach (9.331) achten, denn in (9.342) wird der Bezug auf $y_o = 2d_m/h$ (statt k/h) verlangt.

Pernecker-Vollmers-Formel: Die umständliche Auswertung der Gesamttransportformel (9.342) hat zur Entwicklung einiger empirischer Formeln geführt, die sich nicht nur durch Benutzerfreundlichkeit sondern mehr oder weniger auch durch ihre Aussagekraft bewährt haben. Dazu gehört folgende, bezüglich θ_c modifizierte Beziehung:

$$\phi = \theta^{3/2} \left(\frac{\theta}{\theta_c} - 1 \right) \quad (9.345)$$

Das Original dieser Gesamttransportformel, Pernecker und Vollmers (1965), enthält den festen Shields-Wert $\theta_c = 0,04$ (vgl. 9.4.4). Transport- und Strömungsintensität sind mit (9.302) und (9.284) definiert worden; für θ ist die volle Sohlenschubspannung τ (nicht τ') in Ansatz zu bringen. Die Gesamttransportrate ergibt sich analog (9.303), wie auch bei den übrigen Gesamttransportformeln, als $m = \phi \rho_s \sqrt{g' d_m^3}$.

Engelund-Hansen-Formel: Eine schwellenwertfreie, ebenfalls sehr anwenderfreundliche Gesamttransportformel ist von Engelund und Hansen (1967) aufgestellt worden. Sie nimmt mit dem Widerstandsbeiwert λ Rücksicht auf die durch Riffler oder/und Dünen bedingte Rauheitsstruktur der Sohle (Betrauheit, s. 9.4.3) und lautet:

$$\phi = \frac{2}{5} \frac{\theta^{5/2}}{\lambda} \quad (9.346)$$

Dafür ist λ ggf. nach (9.276) mit einem Formbeiwert $f = 0,6$ in Rechnung zu stellen.

Ackers-White-Formel: Eine Gesamttransportformel, in der neben der Gesamtschleppspannung τ auch der mit dieser korrespondierende Widerstandsbeiwert λ sowie die Schubspannungsreduktion $c = \tau'/\tau$ eine Rolle spielen, ist von Ackers

u. White(1973) vorgeschlagen worden. Mit der hier verwendeten Notation kann sie auf folgende Form gebracht werden:

$$\phi = \frac{M}{\sqrt{(\lambda/8)^{1+n}}} \sqrt{\theta} \left(\frac{1}{N} \sqrt{c^{1-n}} \cdot \sqrt{\theta} - 1 \right)^m \quad (9.347)$$

Darin bezieht sich λ auf den vollen Sohlenschub, ebenso die Strömungsintensität θ , und c ist der Schubspannungsreduktionsfaktor (9.258). Die Konstanten M , N , m und n hängen ausschließlich von der dimensionslosen Korngröße d_* nach (9.262) ab und haben sich durch Regressionsrechnung im Geltungsbereich $1 \leq d_* \leq 60$ wie folgt ergeben:

$$\log M = 2,86 \log d_* - (\log d_*)^2 - 3,53 \quad N = 0,14 + \frac{0,23}{\sqrt{d_*}}$$

$$m = 1,34 + \frac{9,66}{d_*} \quad n = 1 - 0,56 \log d_*$$

In (9.347) entspricht N^2/c^{1-n} formal der transportkritischen Strömungsintensität; es wird $\phi = 0$ für $\theta_0 = N^2 c^{n-1}$ erhalten, so daß der verminderte Betrag $\theta'_0 = c\theta_0 N^2 c^n$ in etwa dem Shields-Wert θ_c gleichen muß. Auf diese Weise ist zumindest eine größenordnungsmäßige Plausibilitätskontrolle möglich.

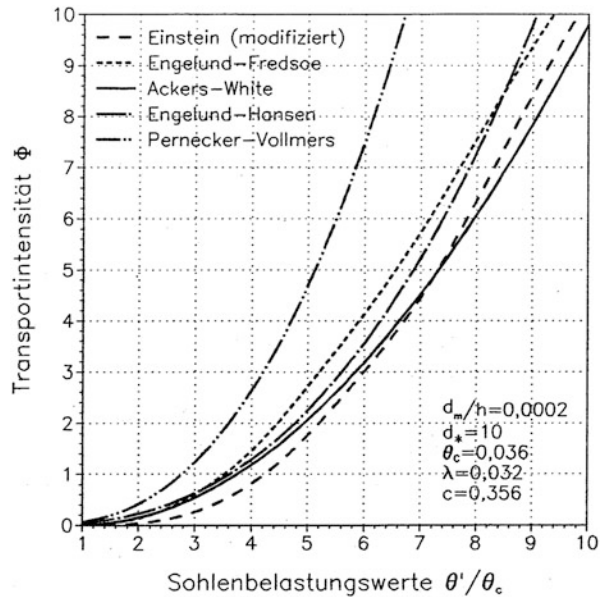
Formelvergleich: Bei den Gesamttransportformeln ist die Vergleichbarkeit der Zusammenhänge $\phi = f(\theta)$ insofern problematisch als mehr oder weniger fast jede Formel neben der Strömungsintensität θ weitere Einflussparameter enthält, die z. T. auch von θ abhängen. Eine vergleichende Darstellung dieser Beziehungen ist daher nur exemplarisch möglich, wie in Abb. 9.91; in geringerem Ausmaß gilt dies auch schon für den Vergleich der Geschiebformeln in Abb. 9.85. Das dargestellte Beispiel bedarf einiger ergänzender Anmerkungen, um etwaigen Fehlinterpretationen vorzubeugen:

Abgesehen von den gleichen Material- und Strömungsparametern sind in beiden Diagrammen mittels $\theta' = c\theta$ die gleichen Sohlenbelastungen θ'/θ_c aufgetragen; einem Belastungswert 10 entspricht im dargestellten Fall eine Strömungsintensität $\theta = 28 \theta_c$.

Die in Abb. 9.91 angegebenen Parameter sowie $r \cdot \kappa = 0,32$ sind sämtlich als Konstanten aufgefaßt worden, auch der Widerstandsbeiwert λ und der Schubreduktionsfaktor c . Diese beiden Einflussgrößen sind strenggenommen θ -abhängig, ausgenommen den Fall einer Riffelsohle, bei der wegen stets annähernd gleicher Riffelhöhen und folglich fixierter Bettraueheit k tatsächlich von etwa konstanten Werten λ und c ausgegangen werden kann.

Diese Voraussetzung ist jedoch an die Existenz von Riffeln als Rauheitsmuster der belasteten Sohle gebunden, man hat daher die in Tab. 9.10 angegebenen Grenzen zu beachten. Danach sind Riffel nur bei einer Sohlenbelastung mit zu erwarten, sofern die dimensionslose Korngröße $d_* < 15$ ist. Für das in Abb. 9.91 dargestellte

Abb. 9.91 Gesamttransportformeln im Vergleich



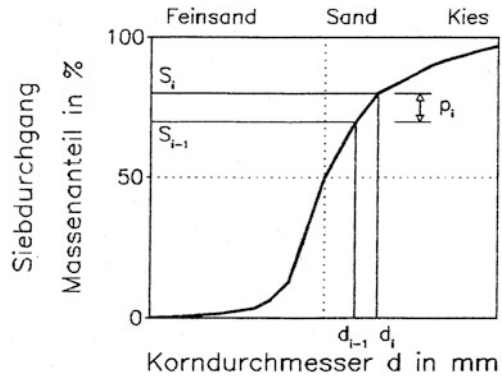
Beispiel bedeutet dies, daß bis zu $\theta'/\theta_c \approx 5$ mit Riffeln, darüber hinaus aber schon mit Dünen zu rechnen ist. In der rechten Diagrammhälfte sind die Annahmen, daß λ und c von θ unabhängig sind, streng genommen unzutreffend: Wachsende Dünen steigern die Rauheit k und den Widerstandsbeiwert λ , senken demzufolge den Reduktionsfaktor c .

Transport fraktionsweise: Bei der Berechnung des Sedimenttransports kann vielfach nicht davon ausgegangen werden, daß es sich bei dem bewegten kohäsionslosen Sohlenmaterial um mineralisches Lockersediment mit einheitlicher Körnung handelt. Im Gegenteil wird man fast immer mit einem Korngemisch zu tun haben, das nur bei einer sehr steilen Körnungslinie einigermaßen zutreffend mit einem als maßgebend angesehenen Korndurchmesser, z. B. nach (9.250) oder einfach als $d_m = d_{50}$, zu charakterisieren ist. Es leuchtet ein, daß sich mit einer derart einschneidenden Vereinfachung bei der Berechnung der Transportraten von Geschiebe und Schweb große Unsicherheiten ergeben können. Man kann dem in gewissem Umfang dadurch begegnen, daß man die Transportberechnung fraktionsweise durchführt. Dabei wird unterstellt, daß die Massenanteile der einzelnen Kornfraktionen im bewegten Sohlenmaterial denen in der Körnungslinie entsprechen. Hat eine Kornfraktion i den Anteil p_i am Korngemisch, Abb. 9.92, so kommt ihr eine anteilige Gesamttransportrate m_i zu wie folgt:

$$m_i = p_i \phi_i \rho_s \sqrt{g' d_{mi}^3} \quad (9.348)$$

Darin ist ϕ_i die Transportintensität nach (9.341), jedoch berechnet mit der für die Fraktion i maßgebenden Korngröße d_{mi} , so als gäbe es nur dieses Material allein.

Abb. 9.92 Fraktion i einer Körnungslinie



Mit Bezug auf Abb. 9.92 kann d_{mi} durch einen der üblichen Mittelwerte ausgedrückt werden; bewährt hat sich das geometrische Mittel

$$d_{mi} = \sqrt{d_{i-1} d_i} \quad (9.349)$$

Mit diesem sind alle jeweils benötigten Rechengrößen zu bilden, also z. B. θ_i nach (9.284) oder β_{*i} nach (9.324) sowie die d_m -abhängigen Materialparameter d_{*i} , θ_{ci} usw. Der zu berechnende Gesamttransport ergibt sich damit schließlich als

$$m = \sum m_i = \rho_s \sqrt{g'} \sum p_i \phi_i d_{mi}^{3/2} \quad (9.350)$$

Dabei ist p_i entsprechend Abb. 9.92 definiert und durch $\sum p_i = 1$ gekennzeichnet; mit g' als modifizierter Erdbeschleunigung nach (9.263) werden ferner die Einflüsse von Schwerkraft und Auftrieb berücksichtigt. Dem Fall des „einkörnigen“ Sohlenmaterials entspricht $i=1$ bzw. $p_i = 1$. Zwecks Vergleichbarkeit mit den für diesen geltenden Transportformeln ist (9.350) in dimensionsloser Darstellung geeigneter:

$$\phi = \sum p_i \phi_i \left(\frac{d_{mi}}{d} \right)^{3/2} \quad (9.351)$$

Die Bezugskorngröße d ist dafür so zu wählen wie die Korngröße d_m in der zum Vergleich herangezogenen „Einkorn“-Transportformel, z. B. $d = d_{50}$.

Im Prinzip kann für das zuvor angedeutete Rechenschema jede der Gesamttransportformeln (9.342) bis (9.347) herangezogen werden. Die nach Kornfraktionen gestufte Transportberechnung ist aber insbesondere mit dem Verfahren von Einstein (1950) verbunden, siehe bei Vanoni (1977) oder bei Bechteler (1988). Die Zusammenfassung von (9.350) und (9.342) liefert dafür in der modifizierten Form den Ausdruck

$$m = \rho_s \sqrt{g'} \sum p_i \phi_{Gi} d_{mi}^{3/2} \left[1 + \frac{4,65}{\kappa E_i} \left(\text{HF1}_i \ln \frac{30}{k/h} - \text{HF2}_i \right) \right] \quad (9.352)$$

Darin ist $\phi_{Gi} = f(\psi')$ für die i -te Kornfraktion nach (9.306) zu berechnen, Abb. 9.83, und die Hilfsfunktionen HF1_i und HF2_i ergeben sich mit I1_i und I2_i nach (9.337)

Tab. 9.13 Sedimentologische Parameter und Kennzahlen, Teil 1: Material- und Systemgrößen

Kennzahl Parameter	Bezeichnung, Einheit Formelhinweis	Indizierung Kennzeichnung	Definition, Zusammenhänge Bemerkungen
ρ	Dichte, kg/m ³	ohne: Wasser S: Feststoff L: Lagerung	$\Delta\rho = \rho_S - \rho$ $\Delta\rho/\rho = \text{rel.}$ Dichteunterschied $\rho_L = (1 - n) \rho_S$ $n = \text{Porenanteil}$
g'	modifizierte Erdbeschleunigung, m/s ² (9.263)	–	$g' = g \Delta\rho/\rho$ erfaßt die Auftriebswirkungen
d_m	maßgebender Korndurchmesser, m (9.251)	ggf.i: Kornfraktion	vielfach: d_{50} für „Einkorn“
w	Sinkgeschwindigkeit, m/s (9.297)	ggf.i: Kornfraktion	$w = f(c_w, d_*)$ Einzelkorn in ruhemdem Wasser
Re_w	Sinkgeschwindigkeits- Reynolds-Zahl, dim.los (9.293)	–	$Re_w = f(d_*)$ diverse Re_w -Formeln verfügbar
d_*	Dimensionslose Korngröße, dim.los (9.262)	ggf.i: Kornfraktion	$d_* = Re_S^{2/3}$ enthält g' und v
Re_S	Granulometrische Reynolds-Zahl, dim.los (9.282)	–	$Re_S^2 = d_*^3$ wird oft statt d_* verwendet
z_o	Schichtdicke des Geschiebes, m (9.282)	–	$y_o = z_o/h$ relativ, Vorschlag Einstein: $z_o = 2 d_m$ Zanke (1999): $z_o = 2,8 \cdot d_m(\theta - \theta_c)$

bzw. (9.338). Mit d_{mi} nach (9.349) ist ferner auch der Einstein-Faktor E_i gemäß (9.344) zu bestimmen. Das gleiche gilt für die Parameter y_{oi} und β_{*i} der beiden Hilfsfunktionen.

Wird für die fraktionsweise Berechnung eine Gesamttransportformel benutzt, die vom Überschusskonzept ausgeht, vgl. Abb. 9.82, so kann es vorkommen, daß sich in Fraktionen mit größeren Korndurchmessern keine Transportrate ergibt. Daran wird deutlich, daß die Annahme, die Beteiligung der Fraktionen am Transport entspreche ihrem Anteil an der Körnungslinie, nicht in jedem Fall haltbar ist. Vielmehr werden damit Entmischungserscheinungen erkennbar, die auf instationäre Änderungen der Sohlenbeschaffenheit hinweisen und nicht mehr der strengen Forderung nach Transportgleichgewicht gerecht werden. Abgesehen davon hat die beschriebene Superposition der Transportraten von Kornfraktionen den Nachteil, daß sie interaktive Prozesse, z. B. Partikelkollisionen, außer Acht läßt. Dennoch kann bei Korngemischen davon ausgegangen werden, daß mit der Transportberechnung fraktionsweise eher vertrauenswürdige Resultate gefunden werden als mit der „Einkorn-Methode“.

Kennzahlen-Übersicht: Mit der zweiteiligen Tab. 9.13 und 9.14 wird an dieser Stelle eine Zusammenstellung von Kennzahlen und Parametern vorgenommen, die bei den Sedimenttransportberechnungen eine Rolle spielen.

Tab. 9.14 Sedimentologische Parameter und Kennzahlen, Teil 2: Belastungs- und Transportgrößen

Kennzahl Parameter	Bezeichnung, Einheit Formelhinweis	Indizierung Kennzeichnung	Definition, Zusammenhänge Bemerkungen
v_*	Schubspannungsgeschwindigkeit, m/s (9.259)	ohne: gesamt': transp.wirksam c: kritisch	$\tau = \rho v_*^2$ Sohlenschub $\tau' = c \tau$ reduzierter Schub
c	Schubreduktionsfaktor, dim.los (9.258)	–	$c = \lambda' / \lambda$ mehrere c-Formeln verfügbar
θ	Strömungsintensität, dim.los (9.284)	ohne: gesamt': transp.wirksam c: kritisch	$\theta = Re_*^2 / d_*^3$, oft auch: Fr_*^2 θ_c = Shields-Wert
ψ	Bewegungsintensität, dim.los (9.286)	ohne: gesamt': transp.wirksam c: kritisch	$\psi = 1/\theta$ Einstein-Notation
ϑ	Belastungsparameter nach Laursen, dim.los (9.292), (9.300)	ohne: gesamt': transp.wirksam c: krit.Geschiebe sc: krit.Schweb	$\vartheta = Re/Re_w$ ϑ_c = Liu-Wert
Re_*	Sedimentologische Reynolds-Zahl, dim.los (9.261)	ohne: allgemein c: kritisch	$Re_*^2 = \theta d_*^3$ $Re_{*c} = Re_*(\theta_c)$
r	Diffusions-Korrektur, dim.los (9.319)	–	$r = \epsilon_s / e$ ϵ = Wirbelviskosität
β_*	Vanoni-Rouse-Exponent, dim.los (9.324)	–	$\beta_* = 1(\kappa r \vartheta)$ v.Kármán: $\kappa = 0,4$
C	Schwebstoffkonzentration, dim.los (9.325)	ohne: $C(z)$ o: Referenzkonz.	Volumenkonzentration $C_o = C(z_o)$
m	Transportrate, kg/(ms) (9.340)	ohne: gesamt G: Geschiebe S: Schwebstoff	$M = b m$ auf Breite b , kg/s $m = \rho_s \phi (g' d_m^3)^{1/2}$
ϕ	Transportintensität, dim.los (9.340)	ohne: gesamt G: Geschiebe S: Schwebstoff	$\phi = \phi_G + \phi_s$ Einstein-Notation

Diese Übersicht ist am Ende der Abhandlungen über das sogenannte Transportgleichgewicht angebracht, weil die einzelnen Formelgrößen je nach Anfall im Text des Abschn. 9.4 verstreut definiert sind. Die Tabelle unterscheidet zwischen Basisparametern und dimensionslosen Kennzahlen und weist auf Kennzahlzusammenhänge hin.

9.4.8 Eintiefung und Auflandung

Der Berechnung des unter 9.1.8 behandelten ungleichförmigen Abflusses in Gerinnen mit fester Sohle entspricht bei Vorliegen einer beweglichen Sohle die *Sohlenlagenberechnung*. War „Nicht-Normalabfluss“ im ersten Fall das Charakteristikum der Ungleichförmigkeit, so ist es bei der beweglichen Sohle das

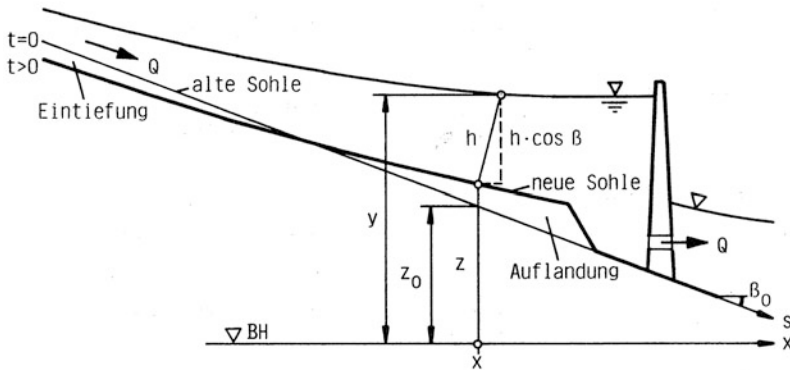


Abb. 9.93 Sohlenlagenänderung in einer Stauhaltung

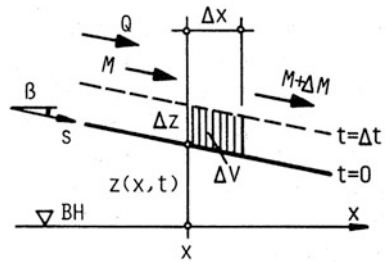
„Nicht-Transportgleichgewicht“, d. h. der Transport von Sediment durch das Gerinne ist in Fließrichtung veränderlich. Ein Transportüberschuss führt zu einer Zunahme der Sohlenhöhe (Auflandung, Sedimentation, Aggradation); ein Transportdefizit, bei dem aus einem Gerinneabschnitt mehr Sedimentmaterial hinaus transportiert werden kann als ihm zugeführt wird, ergibt dagegen eine Abnahme der Sohlenhöhe (Eintiefung, Erosion, Degradation).

In jedem Fall hält die Sohlenlagenänderung so lange an, bis ein neuer Gleichgewichtszustand erreicht ist, stationären Durchfluss vorausgesetzt. Natürliche alluviale Gerinne haben allerdings ein ständig wechselndes Abflussregime, das zwangsläufig immer wieder zu Sohlenlagenänderungen führt, so dass bestenfalls „im zeitlichen Mittel“ von einem dem Transportgleichgewicht ähnelnden Zustand die Rede sein kann. Entsprechend verhält es sich im Tidegebiet, wo nicht nur die Strömungsgröße sich im Gezeitenrhythmus ändert, sondern auch noch die Strömungsrichtung zwischen Flut und Ebberichtung wechselt.

Die dabei auftretenden Erscheinungen sind vielfältig; sie hängen vor allem davon ab, unter welchen Bedingungen das instationäre Verhalten der Gerinnesohle erzwungen wird. Diesbezüglich sind die folgenden Ausführungen auf Gerinne beschränkt, die strömend durchflossen werden ($Fr < 1$) und kleine Sohlengefälle mit $\cos \beta \approx 1$ aufweisen, so dass die Wassertiefen genügend genau vertikal gemessen werden können.

Ein Beispiel ist die in Abb. 9.93 schematisch dargestellte Stauhaltung in einer Kette derartiger Staustufen. Dabei ist durch die Errichtung der Stauanlage eine nachhaltige Störung des bis dahin herrschenden Transportgleichgewichts eingetreten. Die obere Stauanlage (in Abb. 9.93 nicht dargestellt) hat die Zufuhr von Sedimentmaterial unterbunden, während das Transportvermögen der Strömung am oberen Haltungsende erhalten geblieben ist. Als Folge dieses Defizits kommt es dort zur *Erosion* der Gerinnesohle, die Sohlenhöhe wird verringert, verbunden mit entsprechenden Konsequenzen für viele andere hydraulische Parameter wie etwa die Wasserspiegellagen.

Abb. 9.94 Sohlenhöhenzunahme bei Abnahme der Transportkapazität, $\Delta z > 0$ wenn $\Delta M < 0$



Am unteren Haltungsende ist dagegen infolge des Aufstaus eine starke Verminderung des Transportvermögens zu verzeichnen, die zur *Auflandung* des herantransportierten Materials führt. Zwischen beiden Bereichen herrscht, abflussabhängig mehr oder weniger ausgeprägt, aber ebenfalls nicht beständig, Transportgleichgewicht. Alle Sohlenumbildungsprozesse sind instationär, auch wenn der Abfluss Q konstant ist.

Maßgebend für die Beurteilung des Transportvermögens ist der „örtliche“ Gesamttransport $M = b \cdot m$. Statt dessen kann mit dem „örtlichen“ Geschiebetransport $M_G = b \cdot m_G$ gerechnet werden, wenn grobes Sohlenmaterial vorliegt und Schwebstoffe keine Rolle spielen. Die Transportrate m bzw. m_G geht, wie unter 9.4.5 und 9.4.7 beschrieben, vom Transportgleichgewicht aus und wird daher in die Sohlenlagenberechnung als *Transportkapazität* eingeführt.

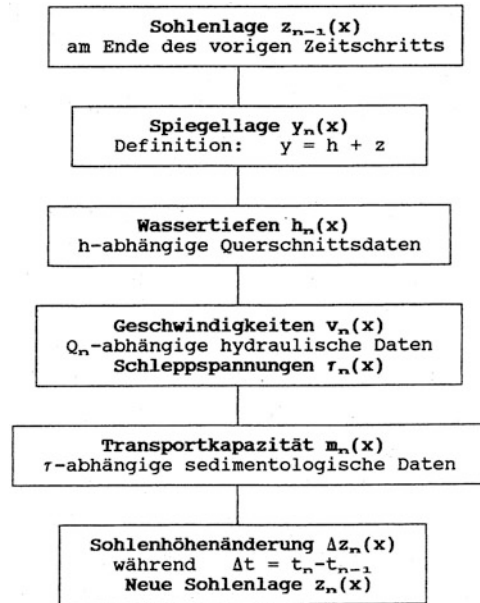
Die Bestimmung der Sohlenlage $z(x,t)$ beruht auf der Auswertung einer einfachen Feststoffkontinuitätsbedingung. Für ein Gerinne mit Rechteckquerschnitten und geringer Sohlenneigung, die wegen $\cos \beta \approx 1$ erlaubt, Δs durch Δx zu ersetzen, kann aus Abb. 9.94 unmittelbar $\rho_L \Delta V + \Delta M \Delta t = 0$ abgelesen werden. Darin ist das abgelagerte Feststoffvolumen durch $\Delta V = b \Delta x \Delta z$ gegeben, während für die Änderung des Feststofftransports $\Delta M = b \Delta m$ zu setzen ist mit Δm als Änderung der Transportkapazität (in der Breitereinheit). Mit ρ_L wird die Lagerungsdichte des abgesetzten Sedimentmaterials berücksichtigt (n = Porenanteil):

$$\rho_L = (1 - n) \rho_s \quad (9.353)$$

Häufig wird $(1 - n) = \rho_L / \rho_s$ als *Porosität* p bezeichnet und dann meist mit $p = 0,7$ in Rechnung gestellt; ρ_s ist die hohlraumfreie Feststoffdichte (bei Quarzsand 2650 kg/m^3).

Für den in Abb. 9.93 schematisch dargestellten Fall einer Sohlenhöhenzunahme ist $\Delta M < 0$, und längs Δx liegt abnehmende Transportkapazität vor. Umgekehrt führt steigende Transportkapazität zu abnehmender Sohlenhöhe ($\Delta z < 0$). Mittels Grenzübergang ergibt sich so die mitunter auch als Exner-Gleichung bezeichnete Sediment-Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{\rho_L} \frac{\partial m}{\partial x} = 0$ des Feststoffvolumenstroms. Sie ist im allgemeinen instationären Strömungsfall zusammen mit den deSaint-Venant-Gleichungen (9.127) und (9.130), einem Gesamttransportgesetz nach Abschn. 9.4.7 und einem Reibungsansatz nach Art der Darcy-Weisbach-Beziehung (9.3) auszuwerten. Bei Bedarf ist eine Erweiterung vorzunehmen, z. B. bei seitlichem Zufluss bzw. Sedimenteintrag mit einem entsprechenden Quellen-/Senken-Term.

Abb. 9.95 Quasi-stationäre
Sohlenlagenberechnung
(Prinzip)



Quasi-stationäre Berechnung: Im Vergleich zum instationären Abflussgeschehen vollziehen sich die Sohlenlagenänderungen sehr langsam, besonders in dem mit Abb. 9.92 angedeuteten unterkritischen Strömungsfall ($Fr < 1$) und bei mäßigem Gefälle ($\cos \beta \approx 1$). Es ist daher näherungsweise zulässig, die Sohlenlagenberechnung in jedem Zeitschritt Δt unter Annahme einer momentanen stationären Sohlenlage sowie mit einem während Δt stationären Durchfluss $Q = \text{konst}$ vorzunehmen. Statt der differentiellen Bilanzgleichungen kann für die Wasserspiegellagermittlung unter diesen Bedingungen auch deren integrale Form herangezogen werden, also eines der unter 9.1.8 beschriebenen stationären Spiegellinienberechnungsverfahren benutzt werden. Für einen n-ten Zeitschritt Δt sieht dann der prinzipielle Berechnungsgang etwa so aus wie in Abb. 9.95 gezeigt. Dabei ist wie in Abb. 9.93 mit $\cos \beta \approx 1$ von $y = h + z$ auszugehen. Mit der ermittelten neuen Sohlenlage und dem dann gemäß Abflussganglinie anzusetzenden neuen Abfluss wird diese Schleife für das nächste Δt erneut durchlaufen. Das mit Abb. 9.95 skizzierte Rechenschema entspricht der einfachsten Form eines expliziten Differenzenverfahrens und neigt in starkem Maße zu numerischer Instabilität. Man hat bei dieser Vorgehensweise auf genügend kleine Zeitschritte Δt zu achten (Courant-Kriterium), muss das Rechenprogramm ggf. mit numerischen Stabilisatoren ausstatten oder überhaupt von einem geeigneteren Differenzenschema ausgehen. Diesbezügliche Empfehlungen sind u. a. bei Preissmann (1974), Jansen (1979) und Vreugdenhil (1989) zu finden.

Instationäre Berechnung: Eine präzisere Darstellung der hochgradig interaktiven instationären Prozesse beim unterkritischen ($Fr < 1$) aber transportüberkritischen

($\tau > \tau_c$) Abfluss in einem Gerinne mit beweglicher Sohle erfordert dagegen die simultane Auswertung von Beziehungen, bei denen in der Regel Rechteckquerschnitte des Gerinnes, mit $\cos \beta \approx 1$ geringe Sohlenneigungen und Ausgleichsbeiwerte $\alpha \approx 1$ vorausgesetzt werden. Mit diesen Vereinfachungen ist der Bezug auf Horizontalabstände x (statt auf s) möglich, und die Wassertiefe h wird vertikal gemessen; ferner kann bei einem prismatischen Gerinne in (9.130) mit dem Profilwert $P=0$ gearbeitet werden. Auf diese Weise ergibt sich ausgehend von (9.127) und (9.130) unter Hinzunahme von (9.3) folgender Gleichungssatz:

$$\text{Kontinuität Sediment:} \quad \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{\rho_L} \frac{\partial m}{\partial x} = 0 \quad (9.354)$$

$$\text{Transportkapazität:} \quad m = \rho_S \sqrt{g' d_m^3} \phi(\theta, \theta_c, \dots) \quad (9.355)$$

z. B. nach (9.342)

$$\text{Kontinuität Abfluss:} \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(vh) = 0 \quad (9.356)$$

$$\text{Bewegungsgleichung:} \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial y}{\partial x} + gI = 0 \quad (9.357)$$

mit $y = z + h$

$$\text{Reibungsgefälle:} \quad I = Kv^2 \quad \text{bzw.} \quad Kl|v|v \quad (9.358)$$

mit $K = \lambda/(2gD)$

Dabei ist x wie bei Abb. 9.93 in Fließrichtung positiv zu zählen, so dass bei Sohlenerosion $\partial m/\partial x > 0$, bei Auflandung $\partial m/\partial x < 0$ vorliegt. Der Gleichungssatz ist für die Bestimmung der fünf abhängigen Variablen h , v , z , m und I , die sämtlich Funktionen von x und t sind, prinzipiell ausreichend; die Auswertung ist, abgesehen von Spezialfällen oder stark gekürzten Bestimmungsgleichungen, nur auf numerischem Wege möglich.

Diffusionsanalogie: Bei der Auswertung des zuvor genannten Gleichungssatzes kann wegen der sehr langsamen Sohlenlagenänderungen bei stationärem Durchfluss $Q = \text{konst}$ in einem Rechteckgerinne mit konstanter Breite b guten Gewissens angenommen werden, dass $\partial v/\partial t$ und $\partial h/\partial t$ vernachlässigbar sind. Die Kontinuitätsgleichung (9.356) lautet dann $\partial(vh)/\partial x = 0$ bzw. $vh = \text{konst}$, und die Bewegungsgleichung (9.357) verkürzt sich mit $Fr^2 = v^2/(gh)$ zu $\frac{\partial z}{\partial x} + (1 - Fr^2) \frac{\partial h}{\partial x} + I = 0$. Eine wesentlich gewagtere weitere Annahme ist die Vernachlässigung des Ausdrucks $(1 - Fr^2) \partial h/\partial x$ gegenüber den übrigen Größen dieser Gleichung; sie entspricht vor allem der Streichung von Trägheitswirkungen, die in der Froude-Zahl Fr zum Ausdruck kommen. Die so verstümmelte Bewegungsgleichung lautet

$$\frac{\partial z}{\partial x} + I = 0 \quad (9.359)$$

Danach ist das Reibungsgefälle von wesentlichem Einfluss; es kann nach Darcy-Weisbach wie bei (9.259) mit Hilfe von $Q = vbh = \text{konst}$ ausgedrückt werden durch

$I = \frac{\lambda b}{8gQ} v^3$, so dass aus (9.359) folgende Relation hervorgeht:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{3} \frac{v}{I} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad (9.360)$$

Diese Aussage wird für die Auswertung von (9.354) benötigt, weil darin $\frac{\partial m}{\partial x}$ als $\frac{dm}{dv} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$ zu bilden ist, wenn die Transportkapazität m statt mit (9.355) durch folgendes Potenzgesetz in Rechnung gestellt wird:

$$m = \rho_L a_1 v^{a_2} \quad (9.361)$$

Dieser Ansatz ist schwellenwertfrei, reicht aber für die vorliegende Aufgabe aus; a_1 und a_2 sind Konstanten, die durch Anpassung an eine der in Frage kommenden Transportformeln zu bestimmen sind. Mit $dm/dv = a_2 m/v$ wird aus (9.354) erhalten:

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{a_2}{\rho_L} \frac{m}{v} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (9.362)$$

Die Zusammenfassung mit (9.360) liefert zunächst $\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial_2 m}{3\rho_L I} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$. Wird mit $m \approx m_0 = \text{konst}$ und $I \approx I_0 = \text{konst}$ linearisiert, wobei diese Daten den Anfangszustand (Transportgleichgewicht) des Gerinnes angeben, so entsteht schließlich

$$\frac{\partial z}{\partial t} - K \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \quad \text{mit} \quad K = \frac{a_2 m_0}{3\rho_L I_0} \quad (9.363)$$

Der Faktor K ist als Pseudo-Diffusionskonstante aufzufassen. Die Auswertung ist zumindest numerisch möglich; in einfacheren Fällen lassen sich auch analytische Lösungen herbeiführen.

Die mit (9.363) zu berechnende Störung des Transportgleichgewichts wird hervorgerufen durch eine am Gerinneanfang $x=0$ oder -ende $x=L$ erzwungene Sedimenttransportänderung $\Delta m(0, t)$ bzw. $\Delta m(L, t)$, welche die Sohlenlagenänderungen $z(x, t) - z_0$ veranlasst. Meist wird mit einem konstanten Δm_0 gerechnet, zumal mit $Q = \text{konst}$ quasi-stationäre Verhältnisse zugrunde liegen. Der durch $\Delta m_0 = \text{konst}$ ausgelöste instationäre Transportvorgang ist bestrebt, für den durch $m_0 + \Delta m_0$ vorgegebenen neuen Zustand des Gerinnes erneut Transportgleichgewicht herbeizuführen. Dabei sind in einer Gerinnestrecke, die den genannten Voraussetzungen genügt, gemäß Tab. 9.15 vier „Betriebsfälle“ zu unterscheiden, vgl. auch Abb. 9.93.

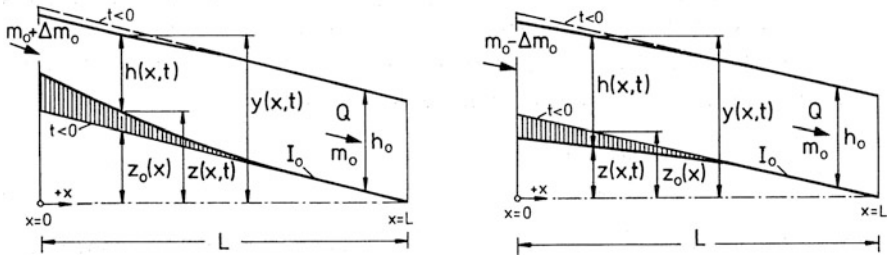
Der z. B. durch Errichtung einer Stauanlage erzwungenen Änderung Δm_0 der Transportrate ist ein Randwert Δz_0 der Sohlenhöhenänderung nach einer Beziehung zugeordnet, die sich aus (9.354) und (9.363) ergibt als

$$\Delta m(x, t) = m(x, t) - m_0 = -\rho_L K \left(\frac{\partial z(x, t)}{\partial x} + I_0 \right) \quad (9.364)$$

Darin sind m_0 und I_0 die konstanten Werte der Transportkapazität und des Sohlengefälles im stationären Anfangszustand des Gerinnes (Normalabfluss, Transportgleichgewicht), und ρ_L bezeichnet die Lagerungsdichte nach (9.353); K ist bei (9.363) erklärt. Im übrigen wird auf Abb. 9.96 verwiesen.

Tab. 9.15 Vier Typen der Sohlenlagenänderung in einem prismatischen Gerinne

Änderung der Transportrate	Ort im Gerinne	Änderung der Sohlenlage	Fortschrittsrichtung
$\Delta m_0 > 0$	oben	Aggradation	stromab
$\Delta m_0 < 0$	oben	Degradation	stromab
$\Delta m_0 > 0$	unten	Degradation	stromauf
$\Delta m_0 < 0$	unten	Aggradation	stromauf

**Abb. 9.96** Aggradation und Degradation in einem strömend durchflossenen prismatischen Gerinne

Es hängt ganz von den einzuarbeitenden Anfangs- und Randbedingungen ab, welche Lösung sich aus (9.363) ergibt, und ob diese nur auf numerischem Wege oder auch analytisch erzielbar ist. Dies wird nachstehend demonstriert mit den beiden in Abb. 9.96 dargestellten Fällen von stromab fortschreitender *Aggradation* und *Degradation*. Dabei handelt es sich um ein Rechteckgerinne konstanter Breite b , an dessen oberem Ende die Sedimentzufuhr gesteigert bzw. gedrosselt wird. Das System und seine Beaufschlagung sind durch folgende Daten festgelegt:

- Abfluss $Q = \text{konst}$ (quasi-stationärer Vorgang)
- Wassertiefe $h_0 = \text{konst}$ (Normalabfluss als Anfangszustand)
- Sohlengefälle $I_0 = \text{konst}$ (im Anfangszustand)
- Transportrate $m_0 = \text{konst}$ (Transportgleichgewicht)
- Sohlengeometrie: $z_0(L) = 0$, $z_0(x) = (L - x) \cdot I_0 = (1 - x/L) \cdot z_0(0)$
- Beaufschlagung: $\Delta m_0 > 0$ Aggradation, $\Delta m_0 < 0$ Degradation

Für beide Fälle sind als formal identische Anfangs- und Randbedingungen zu berücksichtigen:

$$\begin{aligned}
 \Delta m(0, t) &= \pm \Delta m_0 & \text{bzw.} & & m(0, t) &= m_0 \pm \Delta m_0 & \text{für } t > 0 \\
 z(x, 0) &= z_0(x) & & & \text{Anfangslage der Sohle} \\
 z(L, t) &= 0 & & & \text{wegen } z_0(L) = 0 \text{ für } t \geq 0 \\
 \left(\frac{\partial z(x, t)}{\partial x} \right)_{x=0} &= -I_0 - \frac{1}{\rho_L K} \Delta m_0 & & & \text{auf Grund von (9.364)}
 \end{aligned}$$

Eine Näherungslösung von (9.363) für die mit Abb. 9.96 exemplarisch behandelten Fälle wird möglich, wenn statt der Anfangsbedingung Δm_0 mit einer Anfangs-Sohlenlagenänderung Δz_0 gearbeitet wird. Dazu ist die Einführung der

Sohlenhöhenänderung zweckmäßig, so dass als Anfangs- und Randbedingungen anzusetzen sind:

$$\begin{aligned}\Delta z(0, t) &= \Delta z_0 = \text{konst} \quad \text{für } t > 0 \\ \Delta z(x, 0) &= 0 \quad \text{Anfangslage der Sohle} \\ \Delta z(L, t) &= 0 \quad \text{für } t \geq 0\end{aligned}$$

Wird auch noch eine sehr große Gerinnelänge, $L \rightarrow \infty$, vorausgesetzt, so kann auf eine von Daily u. Harleman (1966) angegebene Lösung der Diffusionsgleichung (9.363) zurückgegriffen werden, wobei in dieser $\Delta z(x, t)$ an die Stelle von $z(x, t)$ tritt und $\text{erf}(\dots)$ mit (9.307) erklärt ist:

$$\frac{\Delta z(x, t)}{\Delta z_0} = 1 - \text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{Kt}}\right) \quad (9.365)$$

Diese Aussage ist freilich nur qualitativ von Wert, indem sie die Tendenz der Sohlenlagenänderung beschreibt, denn zu einem konstant angenommenen Δz_0 gehört auf Grund von (9.364) eine Änderung des Sedimenteintrags $\Delta m(0, t)$, die zumindest anfangs nicht den real gegebenen Möglichkeiten entspricht. Mit $\Delta z = z - z_0$ folgt nämlich aus (9.364), dass $\Delta m(x, t) = -\rho_L K \frac{\partial}{\partial x} \Delta z(x, t)$ ist und sich mit (9.365) folglich ergibt:

$$\Delta m(x, t) = \rho_L \Delta z_0 \sqrt{\frac{K}{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Kt}\right) \quad (9.366)$$

$$\Delta m(0, t) = \rho_L \Delta z_0 \sqrt{\frac{K}{\pi t}} \quad (9.367)$$

Danach ist die für $\Delta z_0 = \text{konst}$ nötige Änderung des Sedimenteintrags umgekehrt proportional zu \sqrt{t} , d. h. für $t \rightarrow 0$ wäre ein unrealistisch großer Betrag von Δm erforderlich, um diese Forderung zu erfüllen.

Genauere analytische Lösungen sind u. a. von Jaramillo und Jain (1983) und von Gill (1983) publiziert worden. Ferner ist auf eine nichtlineare Lösung von Gill (1987) hinzuweisen, die auf Konstanz des Pseudo-Diffusionskoeffizienten K verzichtet und die Nichtlinearität mit Hilfe der Störungsrechnung erfasst. Auf diese Ergebnisse kann hier aus Platzgründen nicht näher eingegangen werden, zumal sich die Frage stellt, ob ein derartiger analytischer Lösungsaufwand zu rechtfertigen ist, wenn andererseits bei den Bestimmungsgleichungen kaum noch zu verantwortende Vernachlässigungen getroffen werden und das zu untersuchende Gerinne derart idealisiert wird, dass nur wenig Ähnlichkeit mit einem natürlich vorkommenden alluvialen Gerinne besteht. Dennoch muss gerechterweise angemerkt werden, dass sich die exakten analytischen Lösungen trotz aller Systemvereinfachungen im Vergleich mit der Natur häufig erstaunlich gut bewährt haben.

Hyperbolisches Modell: Eine wesentliche Verbesserung der Sohlenlagenberechnung ergibt sich, wenn die zu (9.359) vorgenommene Vernachlässigung der konvektiven Beschleunigung unterbleibt, so dass unter sonst gleichen Annahmen $(\partial v / \partial t$

und $\partial h/\partial t$ können ignoriert werden) statt (9.359) mit folgender Kurzform der Bewegungsgleichung zu rechnen ist:

$$\frac{\partial z}{\partial x} + (1 - Fr^2) \frac{\partial h}{\partial x} + I = 0 \quad (9.368)$$

Darin kann die Variabilität von $Fr^2 = v^2/(gh)$ ignoriert und $Fr^2 \approx v_o^2/(gh_o)$ gesetzt werden, wobei der Index o den stationären Anfangszustand im Gerinne (Normalabfluss, Transportgleichgewicht) markiert. Wird das Reibungsgefälle wie bei (9.359) eingearbeitet, so geht (9.368) über in

$$\frac{\partial z}{\partial x} + (1 - Fr^2) \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\lambda b}{8gQ} v^3 = 0 \quad (9.369)$$

Diese Beziehung ist mit folgenden Ansätzen für die variablen Größen auszuwerten: $v = v_o + \Delta v$, $z = z_o + \Delta z$, $h = h_o - \Delta z + \Delta y$ und $m = m_o + \Delta m$. Mit diesen Substitutionen werden nur die Änderungen gegenüber dem mit o indizierten Ausgangszustand in Betracht gezogen; Δy bezeichnet die infolge von Δz eintretende Wasserspiegellagenänderung, vgl. Abb. 9.96. Aus (9.369) ergibt sich so zunächst $(1 - Fr^2) \frac{\partial \Delta y}{\partial x} + Fr^2 \frac{\partial \Delta z}{\partial x} + 3 \frac{I_o}{v_o} \Delta v = 0$. Aus Kontinuitätsgründen ist ferner $v_o h_o = (v_o + \Delta v)(h_o - \Delta z + \Delta y)$, woraus sich nach Streichung von Produkten, die von höherer Ordnung klein sind, die Relation $\frac{\Delta v}{v_o} = \frac{\Delta z - \Delta y}{h_o}$ ergibt. Damit nimmt die Bewegungsgleichung schließlich folgende Form an:

$$(1 - Fr^2) \frac{\partial \Delta y}{\partial x} + Fr^2 \frac{\partial \Delta z}{\partial x} + 3 \frac{I_o}{h_o} (\Delta z - \Delta y) = 0 \quad (9.370)$$

Für die Transportrate $m = m_o + \Delta m$ ergibt sich mit (9.361) der Ausdruck $m = m_o(1 + \Delta v/v_o)^{a_2} \approx m_o[1 + \frac{a_2}{h_o}(\Delta z - \Delta y)]$, so dass die Kontinuitätsgleichung (9.354) des Sediments übergeht in

$$\frac{\partial \Delta z}{\partial t} + \frac{a_2 m_o}{\rho_L h_o} \frac{\partial \Delta z}{\partial x} - \frac{a_2 m_o}{\rho_L h_o} \frac{\partial \Delta y}{\partial x} = 0 \quad (9.371)$$

Wird aus den so gewonnenen beiden Bestimmungsgleichungen die Wasserspiegellagenänderung Δy eliminiert, wozu beide Gleichungen nach x differenziert werden, so ergibt ihre Zusammenfassung eine hyperbolische partielle Differentialgleichung:

$$\frac{\partial \Delta z}{\partial t} - (1 - Fr^2) \frac{h_o}{3I_o} \frac{\partial^2 \Delta z}{\partial x \partial t} - \frac{a_2 m_o}{3\rho_L I_o} \frac{\partial^2 \Delta z}{\partial x^2} = 0 \quad (9.372)$$

Zwecks besserer Vergleichbarkeit mit der parabolischen Diffusionsgleichung (9.363) kann durch Resubstitution von $\Delta z(x, t) = z(x, t) - z_o(x)$ statt dessen auch geschrieben werden:

$$\frac{\partial z}{\partial t} - N \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} - K \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \quad \text{mit} \quad N = (1 - Fr^2) \frac{h_o}{3I_o} \quad (9.373)$$

Darin ist $Fr^2 = v_o^2/(gh_o)$ zu setzen, und K nach (9.363) hat die gleiche Bedeutung wie bei der Diffusionsanalogie. Die nahe Verwandtschaft zu dieser ist auch erkennbar durch den Übergang vom hyperbolischen zum parabolischen Gleichungstyp für

$N \rightarrow 0$. Die Leistungsfähigkeit des hyperbolischen Modells ist jedoch wesentlich größer als bei der Diffusionsanalogie; beispielsweise lassen sich auch wandernde Ablagerungsfronten wie etwa in Abb. 9.93 erfassen, die mit der Diffusionsanalogie nicht beschrieben werden können.

Für die mit Abb. 9.96 exemplarisch untersuchten Fälle ist (9.372) bzw. (9.373) mit folgenden Rand- und Anfangsbedingungen auszuwerten:

$$\begin{aligned}\Delta m(0, t) &= \Delta m_o = \text{konst} \quad \text{bzw.} \quad m(0, t) = m_o + \Delta m_o \quad \text{für } t > 0 \\ \Delta z(x, 0) &= 0 \quad \text{bzw.} \quad z(x, 0) = z_o(x) \quad \text{Transportgleichgewicht} \\ \Delta y(x, 0) &= 0 \quad \text{bzw.} \quad y(x, 0) = h_o + z_o(x) \quad \text{Normalabfluss} \\ \Delta z(L, t) &= 0 \quad \text{bzw.} \quad z(L, t) = 0 \quad \text{wegen } z_o(L) = 0, \quad \text{für } t \geq 0 \\ \Delta y(L, t) &= 0 \quad \text{bzw.} \quad y(L, t) = h_o \quad \text{dgl. für } t \geq 0\end{aligned}$$

Darüber hinaus gilt die Volumenbedingung $\Delta m_o t = \rho_L \int_0^L \Delta z(x, t) dx$, die auf eine Beziehung zwischen $\Delta z(0, t)$ und $\Delta y(0, t)$ führt. Nach zeitlicher Differentiation lässt sie sich unter Beachtung vorstehender Randwerte überführen in

$$\Delta m_o = 3\rho_L K \frac{I_o}{h_o} [\Delta z(0, t) - \Delta y(0, t)] \quad (9.374)$$

Wird statt mit $\Delta m_o = \text{konst}$ wieder mit $\Delta z(0, t) = \Delta z_o = \text{konst}$ gerechnet, wie bei (9.365), so kann in Anlehnung an eine von Lenau und Hjelmfeld (1992) benannte asymptotische Lösung von (9.372) auf folgende, für lange Gerinne ($L \rightarrow \infty$) geltende Näherung zurückgegriffen werden, die wiederum das Fehlerintegral (9.307) benutzt:

$$\frac{\Delta z(x, t)}{\Delta z_o} = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4Kt + 2Nx}}\right) \quad (9.375)$$

Die Näherungslösung (9.365) des Diffusionsmodells weicht hiervon um so mehr ab, je größer x wird. Auch dieser Ausdruck kann aber nur als qualitatives Merkmal der mit Abb. 9.96 betrachteten Vorgänge gelten, weil die Annahme von $\Delta z_o = \text{konst}$ unrealistisch ist, wie schon mit (9.367) erläutert. Exakte Lösungen für ähnlich gelagerte Fälle von Sohlenlagenveränderungen sind u. a. bei Ribberink und VanDerSande (1985) sowie bei Lenau und Hjelmfeld (1992) zu finden.

Wegen der mitunter einschneidenden Vernachlässigungen von Einflüssen und Systemeigenschaften, die einer Linearisierung der maßgebenden Gleichungen im Wege stehen, sind geschlossene Lösungen, wie die zuvor beschriebenen, in der Praxis häufig nur im Sinne begleitender Kontrollen der numerischen Auswertung von Nutzen. Real vorkommende natürliche Gerinne machen fast immer eine numerische Behandlung des Problems erforderlich.



<http://www.springer.com/978-3-642-05488-4>

Hydraulik für den Wasserbau

Zanke, U.

2013, XVII, 331 S. 213 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-642-05488-4