Folgen und endliche Summen

2

2.1 Einführung

► Folgen

Auch dieses Kapitel über „Folgen" ist ein eher einfacher Ausschnitt aus der Mathematik, in dem allerdings bereits ein wirklich grundlegender mathematischer Begriff, nämlich der des Grenzwerts (oder Limes), auftritt. Der Begriff „Folge" (oder „Reihenfolge") ist auch in der Umgangssprache gebräuchlich und bezeichnet nicht nur eine diffuse „Menge", sondern nummeriert die Elemente – es gibt ein erstes, ein zweites, ein drittes usw. In der Mathematik sind solche Folgen meistens unendlich und bestehen oft aus Zahlen. Interessant wird es, wenn sich die Folgenglieder einer Zahl immer mehr annähern, wie etwa die Zahlen $1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots$ sich immer mehr der Zahl 0 nähern. Eine exakte Formulierung des zugrunde liegenden Grenzwertbegriffs gehört mit zu den wichtigsten Errungenschaften der modernen Mathematik.

► Summen in einer Anekdote über Gauß

Oft kommen in der Mathematik – aber natürlich auch im „täglichen Leben" – Summen vor. Ziemlich bekannt ist die folgende Anekdote aus der Kindheit des berühmten Mathematikers Gauß: Sein Lehrer in der Grundschule hatte einmal – wie man heute sagen würde – „Null Bock" und ließ seine Schüler als eine Art Beschäftigungstherapie die ersten einhundert Zahlen, also $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 100$, zusammenzählen. Nach wenigen Minuten meldete sich Klein-Gauß zum größten Erstaunen seines Lehrers mit dem richtigen Ergebnis: 5050. Was hatte Gauß wohl gemacht? Vielleicht hat er jeweils Paare von Zahlen zusammengefasst, die 101 ergeben (wie etwa $1 + 100$, $2 + 99$, $3 + 98, \ldots, 50 + 51$), und einfach 101 mit der Anzahl solcher Zahlenpaare, nämlich 50, multipliziert.

Y. Stry, R. Schwenkert, *Mathematik kompakt*, DOI 10.1007/978-3-642-24327-1_2,

	1	2	3	...	50	51	...	98	99	100
+	100	99	98	...	51	50	...	3	2	1
	101	101	101	...	101	101	...	101	101	101

In der Mathematik kann man dieses schöne Ergebnis noch verallgemeinern und wie folgt schreiben:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Also: Wenn man alle Zahlen von 1 ab bis zur n-ten zusammenzählt, dann kann man die Summe durch die einfache Formel $(n \cdot (n+1))/2$ berechnen. (Für $n = 100$ kommt wirklich $(100 \cdot 101)/2 = 5050$ heraus.)

► Vollständige Induktion

Solche eingängigen Formeln werden mit einem (mathematischen) Instrument bewiesen, welches den Dominosteinen abgeschaut erscheint, nämlich mit der so genannten *Vollständigen Induktion*.

► Dominosteine

Stellen Sie sich einfach eine Reihe von Dominosteinen nebeneinander gestellt vor, die Sie (etwa durch Anstoßen des ersten Steins) zum Umfallen bringen wollen. Natürlich müssen Sie darauf achten, dass die einzelnen Dominosteine nicht zu weit voneinander entfernt sind, denn schließlich soll jeder Stein beim Umfallen auch den jeweiligen Nachbarn mit umreißen. Man kann also sagen: Damit *alle* Dominosteine fallen, müssen die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sein:

1. Der *erste* Dominostein muss fallen.
2. Wenn der n-te Dominostein fällt, so muss auch der nächste, nämlich der $(n + 1)$-te Dominostein fallen.

► Vollständige Induktion im mathematischen Sinne

Wir können nun auch an das Fallen einer unendlich langen Kette von Dominosteinen denken! Und wenn Sie sich für jeden Dominostein die entsprechende Zahl vorstellen (für den ersten Stein die Zahl Eins, für den zweiten Stein die Zahl Zwei etc.), dann sind Sie zurückgekehrt zur Mathematik und haben gerade das Prinzip der Vollständigen Induktion formuliert: Jede Eigenschaft der Eins, die auch der Nachfolger jeder Zahl mit eben dieser Eigenschaft besitzt, kommt allen natürlichen Zahlen zu. Der italienische Mathematiker Peano hat (u. a.) eben dieses Prinzip der Vollständigen Induktion in sein Axiomensystem (d. h. sein System an Grundeigenschaften) der natürlichen Zahlen aufgenommen.

▶ Rekursion

In der Informatik und insbesondere beim Programmieren hat man es manchmal mit etwas Ähnlichem zu tun, nämlich mit Rekursion. In vielen Programmiersprachen heißt dies, dass eine Funktion sich selbst aufrufen kann. Derartige rekursive Algorithmen sind nicht gerade einfach zu programmieren, sie sind aber meist äußerst kurz und elegant. Typisch dabei ist, dass die Lösung eines Problems mit n Parametern auf ein einfacheres analoges Problem mit $n-1$ Parametern zurückgeführt wird (und dieses wiederum auf ein Problem mit $n-2$ Größen usw.).

Was es mit Folgen von Zahlen, ihren Eigenschaften und mit der Vollständigen Induktion auf sich hat, soll nun in diesem Kapitel besprochen werden.

2.2 Folgen und ihre Eigenschaften

Ausgehend von einer exakten Definition des Begriffs „Folge" werden wichtige Eigenschaften wie beispielsweise Konvergenz und Divergenz von Folgen untersucht. In diesem Zusammenhang sind Monotonie- und Beschränktheitseigenschaften von Folgen sehr hilfreich. Die bereits aus der Schulzeit bekannten Begriffe „Maximum" und „Minimum" werden um die Definition von „Infimum" und „Supremum" erweitert.

Im Allgemeinen besteht eine Folge aus einer Anordnung (nullter, erster, zweiter … Wert) von gewissen reellen Zahlen. Durch diese Anordnung wird jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ genau ein Wert $a(n)$ zugeordnet und eine Reihenfolge festgelegt: $a(0), a(1), a(2), \ldots$ Man definiert daher:

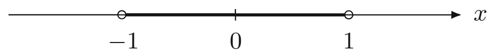
Folge
Eine Abbildungsvorschrift $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $a(n) = a_n$ heißt (unendliche) Folge. Hierfür schreibt man auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n) = a_0, a_1, a_2, \ldots$ Die reellen Zahlen a_n heißen Folgenglieder.

$\mathbb{N}_+$ Häufig beginnt die Abbildungsvorschrift nicht mit der Zahl Null, sondern mit der Eins. Im Folgenden benutzen wir deshalb die Bezeichnung $\mathbb{N}_+ := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ für die Menge der positiven natürlichen Zahlen.

Beispiel 2.1

a) **Bildungsgesetz** Die Folge $1, 3, 5, 7, \ldots$ der ungeraden natürlichen Zahlen kann man schreiben als $a_0 = a(0) = 1, a_1 = a(1) = 3, a_2 = a(2) = 5, a_3 = a(3) = 7$, usw. Das *Bildungsgesetz* für die Folgenglieder lautet offensichtlich $a_n = a(n) = 2n + 1$. Statt die Folge – wie eingangs – durch Aufzählung ihrer Glieder zu definieren, können wir daher auch $(2n+1)_{n\in\mathbb{N}}$ (Definition mittels Abbildungsvorschrift) schreiben.

Abb. 2.1 Die 1-Umgebung von $a = 0$



b) Die Folge $1^3, 2^3, 3^3, \ldots$ lässt sich auch durch $(n^3)_{n \in \mathbb{N}_+}$ angeben.
c) Die alternierende, nur aus zwei Werten bestehende Folge $1, -1, 1, -1 \ldots$ kann durch das Bildungsgesetz $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, definiert werden.

Abstand Um Grenzwerteigenschaften von Folgen untersuchen zu können, benötigt man Kenntnisse über das „Abstandsverhalten" von Folgengliedern. Nun ist der Abstand zweier reeller Zahlen x und a bekanntlich durch $|x - a|$ gegeben. Die Menge aller Punkte $x \in \mathbb{R}$, die von einem gegebenen Punkt a einen Abstand kleiner als eine vorgegebene Zahl ε haben, bilden eine *Umgebung* von a, genauer:

Umgebung
Für $\varepsilon > 0$ ist die ε-Umgebung von a definiert durch

$$\begin{aligned} U_\varepsilon(a) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}. \end{aligned}$$

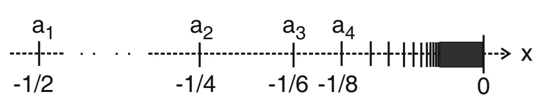
Beispiel 2.2
Mit $a = 0$ und $\varepsilon = 1$ erhält man $U_1(0)$ wie in Abb. 2.1.

Die ε-Umgebung eines Punktes a ist also ein offenes Intervall $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ der Länge 2ε mit dem Mittelpunkt a.

Konvergenzbegriff Der *Konvergenzbegriff* lässt sich exemplarisch an der Folge $(-\frac{1}{2n})_{n \in \mathbb{N}_+} = -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, \ldots$ und deren Visualisierung studieren (s. Abb. 2.2).
Die Folge hat die Eigenschaften:

a) Mit zunehmenden n werden die Folgenglieder a_n größer und unterscheiden sich dabei immer weniger von der Zahl 0.
b) In jeder noch so kleinen Umgebung der Zahl 0 ($U_\varepsilon(0)$, ε beliebig klein gewählt!) liegen fast alle Glieder der Folge. D. h. nur endlich viele Glieder liegen außerhalb der vorgegebenen Umgebung. Beispielsweise liegen in $U_{1/6}(0)$ alle Folgenglieder mit Ausnahme der ersten drei, in $U_{1/100}(0)$ alle mit Ausnahme der ersten fünfzig ($|a_{51}| < 1/100$), in $U_{1/1000}(0)$ alle mit Ausnahme der ersten fünfhundert ($|a_{501}| < 1/1000$), usw.

Abb. 2.2 Folgenglieder $a_n = -\frac{1}{2n}$ auf der Zahlengeraden



„Fast alle Folgenglieder" *Fast alle* Folgenglieder bedeutet somit: *alle mit Ausnahme von endlich vielen*. Für unsere Folge gilt für fast alle $n \in \mathbb{N}_+$

$$a_n \in U_\varepsilon(0) \quad \text{bzw.} \quad \left| -\frac{1}{2n} - 0 \right| < \varepsilon. \tag{$*$}$$

Es ist dabei egal, wie groß, oder vielmehr wie klein ε gewählt wird. Bei *jeder* Wahl für ε liegen nur endlich viele Folgenglieder außerhalb von $U_\varepsilon(0)$. Die Ungleichung $(*)$ $1/(2n) < \varepsilon$ kann äquivalent umgeformt werden in $n > 1/(2\varepsilon)$. Diese Ungleichung wird bereits von der kleinsten Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ erfüllt, die größer als $1/(2\varepsilon)$ ist. Ab $n_0 = 4$ bzw. $n_0 = 51$ bzw. $n_0 = 501$ liegen daher fast alle Folgenglieder in $U_{1/6}(0)$ bzw. $U_{1/100}(0)$ bzw. $U_{1/1000}(0)$.

Fast alle bedeutet also auch: *mindestens alle ab einem bestimmten Index n_0*. So wie sich unsere Beispielfolge der Zahl 0 nähert, kann sich eine Folge i. Allg. natürlich einer beliebigen Zahl $a \in \mathbb{R}$ nähern. Daher definieren wir:

Konvergenz bzw. Divergenz einer Folge
Die Folge (a_n) heißt konvergent mit dem Grenzwert (oder Limes) a, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl n_0 existiert, so dass für alle $n \geq n_0$, $n \in \mathbb{N}$, gilt $|a_n - a| < \varepsilon$. Man schreibt dann symbolisch (mit sog. Limeszeichen oder einfacher):

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \quad \text{oder} \quad a_n \to a.$$

Ist $a = 0$, so heißt (a_n) Nullfolge. Existiert keine derartige Zahl a, dann heißt (a_n) divergent.

Beispiel 2.3

a) Egal, welches beliebige ε man sich auch vorgibt, für die Folge $(-\frac{1}{2n})_{n\in\mathbb{N}_+}$ findet man immer ein geeignetes n_0, nämlich $n_0 > 1/(2\varepsilon)$. Somit gilt $|-1/(2n) - 0| < \varepsilon$ für $n > n_0$, also ist die Folge konvergent mit dem Grenzwert 0, d. h. eine Nullfolge.
b) Auch die durch $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}_+$, definierte Folge ist eine Nullfolge. Die Existenz der Zahl n_0 ergibt sich direkt aus der Umformung von Gleichung $|1/n - 0| < \varepsilon$ zu $n > 1/\varepsilon$. Für jede natürliche Zahl größer als $1/\varepsilon$ ist somit $|a_n - a| < \varepsilon$ erfüllt.

Trick: große Zahlen einsetzen! In vielen Fällen kann man – mit etwas Übung – den Grenzwert erraten. Ansonsten ist es aber auch hilfreich, große Zahlen in das Bildungsgesetz einzusetzen: Oft hat man sich damit dem Grenzwert schon sehr genähert.

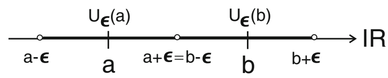


Abb. 2.3 Disjunkte Umgebungen

Übung 2.1

Durch das Bildungsgesetz $a_n = \frac{2n-1}{3n+7}$ sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert.

a) Bestimmen Sie die ersten fünf Folgenglieder. Wie lauten a_{100} und a_{1000}?
b) Ist $2/3 = 0{,}\overline{6}$ Grenzwert dieser Folge? Bestimmen Sie zu $\varepsilon = 10^{-3}$ ein entsprechendes n_0.

Lösung 2.1

a) Die ersten fünf Folgenglieder lauten $a_0 = -\frac{1}{7}$, $a_1 = \frac{1}{10}$, $a_2 = \frac{3}{13}$, $a_3 = \frac{5}{16}$, und $a_4 = \frac{7}{19}$. Ferner ist $a_{100} = \frac{199}{307} \approx 0{,}6482$ und $a_{1000} = \frac{1999}{3007} \approx 0{,}6648$.
b) Wir müssen zu jedem beliebig vorgegebenen (noch so kleinen) $\varepsilon > 0$ eine (natürlich von ε abhängige) Zahl n_0 finden, so dass $|a_n - \frac{2}{3}| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$ gilt. Dazu beachten wir

$$\left|\frac{2n-1}{3n+7} - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{6n-3-6n-14}{3(3n+7)}\right| = \frac{17}{3(3n+7)} < \varepsilon,$$

woraus sich $n > \frac{1}{3}\left(\frac{17}{3\varepsilon} - 7\right)$ ergibt. Ist nun z. B. $\varepsilon = 10^{-3}$ vorgegeben, dann muss $n > 1886{,}56$ gelten. D. h., dass alle Folgenglieder ab dem 1887. Glied von $\frac{2}{3}$ einen Abstand haben, der kleiner als 10^{-3} ist. Das gesuchte n_0 ist damit $n_0 = 1887$. Da man auf diesem Wege offensichtlich zu jedem beliebigem ε ein n_0 berechnen kann, ist die Folge konvergent mit dem Grenzwert $2/3$.

Eindeutigkeit des Grenzwertes Jede Folge (a_n) besitzt höchstens einen Grenzwert. Denn wären $b > a$ zwei verschiedene Grenzwerte von (a_n), so setze man $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$. Dann gilt für die ε-Umgebungen $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset$ (siehe auch Abb. 2.3). Da a Grenzwert ist, liegen aber alle bis auf endlich viele Folgenglieder in $U_\varepsilon(a)$. Somit befinden sich in $U_\varepsilon(b)$ nur endlich viele Folgenglieder, also kann b kein Grenzwert sein.

Divergente Folgen Es gibt auch Folgen, die keinen Grenzwert besitzen. Beispielsweise hat die Folge $a_n = (-1)^n$ keinen Grenzwert, da unendlich viele Folgenglieder gleich 1 $(a_0, a_2, a_4, \ldots)$, aber auch unendlich viele gleich -1 $(a_1, a_3, a_5, \ldots)$ sind. In keiner Umgebung $U_\varepsilon(1)$ bzw. $U_\varepsilon(-1)$ liegen also fast alle Folgenglieder.

Unter den in Beispiel 2.1 aufgeführten Zahlenfolgen zeigt die Folge $a_n = n^3$ ein interessantes Verhalten: Ihre Folgenglieder werden immer größer, schließlich „beliebig groß“. Mathematisch kann man dies wie folgt ausdrücken: Sei $M > 0$ eine reelle Zahl, dann sind nur endlich viele Folgenglieder kleiner als M. Fast alle Glieder, nämlich diejenigen a_n mit $n > \sqrt[3]{M}$ sind größer als M. Da die Wahl von M dabei belanglos ist, hat man die Aussage: Für alle $M > 0$ gilt, dass fast alle Folgenglieder größer als M sind. Selbstverständlich lassen sich auch Folgen finden, für die fast alle Folgenglieder kleiner als ein $M < 0$ sind. Man nehme z. B. $a_n = -n$. Daher definiert man:

Bestimmte Divergenz
Wenn für eine Folge (a_n) die Aussage „Für alle $M > 0$ bzw. $M < 0$ gilt, dass fast alle Glieder a_n größer bzw. kleiner als M sind" erfüllt ist, dann nennt man sie bestimmt divergent mit dem uneigentlichen Grenzwert ∞ bzw. $-\infty$. Man schreibt dann

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

Weitere wichtige Eigenschaften, mit deren Hilfe man Konvergenzuntersuchungen durchführen kann, seien nachfolgend definiert:

Beschränktheit und Monotonie
Eine Folge (a_n) heißt nach oben bzw. nach unten beschränkt, falls es eine Zahl M_o bzw. M_u gibt, mit

$$a_n \leq M_o \quad \text{bzw.} \quad a_n \geq M_u \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Eine Folge heißt **beschränkt**, falls sie sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.
Folgen, für deren Glieder

$$a_{n+1} \geq a_n \quad \text{bzw.} \quad a_{n+1} \leq a_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt, nennt man monoton wachsend bzw. monoton fallend.

Damit lässt sich nun ein wichtiges Ergebnis, das wir hier nicht beweisen wollen, formulieren:

Monotoniekriterium
Eine monoton wachsende, nach oben beschränkte bzw. monoton fallende, nach unten beschränkte Folge ist konvergent.

Beispiel 2.4

Die bereits untersuchte Folge $(a_n) = (-\frac{1}{2n})$, $n \in \mathbb{N}_+$, ist wegen $-\frac{1}{2(n+1)} > -\frac{1}{2n}$ monoton wachsend. Da sie durch die Zahl 0 nach oben beschränkt ist, konvergiert sie. Wir haben schon gezeigt, dass sie eine Nullfolge ist.

Beispiel 2.5

Wir zeigen jetzt die wachsende Monotonie der durch das Bildungsgesetz $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, $n \in \mathbb{N}_+$, definierten Folge. Dazu benutzen wir, dass hier $a_n > a_{n-1}$ zu $\frac{a_n}{a_{n-1}} > 1$ äquivalent ist:

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n-1}} &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \\ &= \frac{(n+1)^n}{n^n} \cdot \frac{(n-1)^n}{n^n} \cdot \frac{n}{n-1} \\ &= \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1}.\end{aligned}$$

Anwendung der Bernoulli-Ungleichung (siehe Aufgabe 3 unter „Vollständige Induktion", Abschn. 2.8) mit $x = -\frac{1}{n^2}$ liefert zunächst $(1 - \frac{1}{n^2})^n > 1 - \frac{1}{n}$ und damit gilt

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} > \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{n-1} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n-1} = 1.$$

Somit ist die wachsende Monotonie gezeigt. Man kann sogar beweisen, dass die Folge durch den Wert $M_o = 3$ nach oben beschränkt ist. Nach dem Monotoniekriterium konvergiert die Folge daher. Mittels tiefer gehender Untersuchungen lässt sich dieser Grenzwert ermitteln:

Euler'sche Zahl als Grenzwert einer Folge

$$\text{Es gilt:} \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} \approx 2{,}7182818.$$

Der Grenzwert der Folge ist die wichtige *Euler'sche Zahl* e.

Maximum, Minimum Wenn man von der Reihenfolge der Folgenglieder abstrahiert, so kann eine Folge auch als eine Menge reeller Zahlen aufgefasst werden. Besitzt diese Zahlenmenge einen größten bzw. kleinsten Wert, so nennt man diesen *Maximum* bzw. *Minimum*. Zur Folge $a_n = \frac{1}{n}$ gehört die Menge $\{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}_+\}$. Das Maximum ist die 1 ($a_1 = 1!$), während offensichtlich ein Minimum nicht existiert.

Infimum, Supremum Die Folge ist aber z. B. durch die Werte $-100, -10$ oder 0 nach unten beschränkt. Die *größte untere Schranke* – in unserem Beispiel die 0 – nennt man das *Infimum* der Folge. Die *kleinste obere Schranke* bezeichnet man als *Supremum*. In unserem Beispiel sind Supremum und Maximum identisch gleich 1.

Für die Bildung von Grenzwerten gelten gewisse Rechenregeln, die es erlauben, von den Grenzwerten einfacher Folgen – etwa (a_n), (b_n) – auf die Grenzwerte komplizierter Folgen, wie z. B. Summenfolge $(a_n + b_n)$ oder Produktfolge $(a_n \cdot b_n)$, zu schließen:

Grenzwertregeln

Für zwei konvergente Folgen (a_n) und (b_n) mit den Grenzwerten a und b gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) &= a + b, \\
\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) &= a - b, \\
\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) &= a \cdot b, \\
\lim_{n\to\infty} (c \cdot a_n) &= c \cdot a, \quad c = \text{const}, \; c \in \mathbb{R}, \\
\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) &= \frac{a}{b}, \quad \text{falls } b_n \neq 0, b \neq 0.
\end{aligned}$$

Ist eine der obigen Folgen bestimmt divergent, z. B. $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, dann gelten ähnliche Rechenregeln (dabei soll ∞ *keine Zahl* sein, sondern ein Symbol für bestimmte Divergenz):

Grenzwertregeln bei bestimmter Divergenz

$$\begin{aligned}
&„a \pm \infty = \pm\infty“, \quad &&„a \cdot \infty = \pm\infty“ \quad (a \neq 0), \\
&„\tfrac{a}{\infty} = 0“, &&„\tfrac{\infty}{a} = \pm\infty“ \quad (a \neq 0).
\end{aligned}$$

VORSICHT!! Ferner gilt auch „$\infty \cdot \infty = \infty$“. Man beachte aber, dass „$\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 0^0“ und „1^∞“ (0 steht dabei als Symbol für $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$) unbestimmte Formen sind und bei jedem Auftreten eine eigene Untersuchung erfordern. Es gilt lediglich „$\frac{b}{0} = \pm\infty$“, falls $b \neq 0$.

Beispiel 2.6

a) Da wir bereits wissen, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ (vgl. Beispiel 2.3) ist, können wir nun schließen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \cdot 0 = 0.$$

b) Um den Grenzwert der durch $a_n = \frac{4-n}{2n-1}$ definierten Folge zu bestimmen, benutzen wir $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ und erhalten

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4-n}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} \cdot \frac{(4/n)-1}{2-1/n} = \frac{4\cdot 0-1}{2-0} = -\frac{1}{2}.$$

Übung 2.2

a) Wie lautet der Grenzwert der Folge $\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}_+}$?
b) Unter Verwendung von Teil a) bestimme man den Grenzwert der durch $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}_+$, definierten Folge.

Lösung 2.2

a) Es ist $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1 + 0 = 1$.
b) Es gilt $a_n = \frac{1}{b_n}$ mit $b_n = \frac{n+1}{n}$. Aus Teil a) wissen wir bereits, dass $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$ ist. Aus den Grenzwertregeln folgt daher sofort $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} b_n} = 1$.

Ohne Beweise führen wir einige Grenzwerte von Folgen auf, deren Kenntnis für spätere Anwendungen wichtig ist:

Wichtige Grenzwerte

Es seien $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante und q eine reelle Zahl mit $|q| < 1$, dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty,$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

2.3 Endliche arithmetische und geometrische Folgen und Reihen

Vorgestellt werden hier Folgen mit besonderem Bildungsgesetz: arithmetische und geometrische Folgen. Von gravierender praktischer Relevanz in Wirtschaftswissenschaften und Finanzmathematik sind endliche arithmetische und geometrische Reihen, die aus jeweils endlich vielen Summanden der entsprechenden Folge bestehen.

Arithmetische und geometrische Folge

Eine Zahlenfolge (a_n) heißt arithmetische bzw. geometrische Folge, falls die Differenz k bzw. der Quotient q benachbarter Elemente konstant ist, d. h.

$$a_{n+1} - a_n = k \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Bei der geometrischen Folge ist natürlich $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erforderlich.

Unmittelbar aus der Definition folgt:

Bildungsgesetze
Arithmetische bzw. geometrische Folgen besitzen beide jeweils ein einfaches Bildungsgesetz:

$$a_n = a_0 + n \cdot k \qquad \text{bzw.} \qquad a_n = a_0 \cdot q^n.$$

Das „arithmetische“ Bildungsgesetz erkennt man sofort, das „geometrische“ Bildungsgesetz folgt aus

$$a_n = a_{n-1}q = (a_{n-2}q) \cdot q = (a_{n-3}q) \cdot q^2 = \ldots = a_0 q^n.$$

Beispiel 2.7

a) Durch $a_n = n/2$, d. h. $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$, ist eine arithmetische Folge mit $k = \frac{1}{2}$ definiert.
b) Durch $a_n = 2^n$, d. h. $(a_n) = 1, 2, 4, 8, 16, \ldots$, ist eine geometrische Folge mit $q = 2$ gegeben.

Übung 2.3

Welche Folgen sind durch a) $a_n = 5n + 3$ und b) $a_n = (\frac{1}{4})^n$ gegeben?

Lösung 2.3

a) Die Folge $(5n + 3)_{n\in\mathbb{N}}$, d. h. $3, 8, 13, 18, 23, \ldots$, ist eine arithmetische Folge mit $k = 5$.
b) Die Folge $((\frac{1}{4})^n)_{n\in\mathbb{N}}$, d. h. $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \ldots$, ist eine geometrische Folge mit $q = \frac{1}{4}$.

Nun kann man endlich viele Glieder der obigen Folgen auch aufsummieren, man spricht dann von *endlichen Reihen*. Diese Reihen haben viele praktische Anwendungen. So benötigt man sie z. B. bei der Berechnung von einfachen Zinsen, Zinseszinsen oder Hypothekendarlehen. Wir definieren daher:

Endliche arithmetische und geometrische Reihe
Sind $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ Glieder einer endlichen arithmetischen bzw. geometrischen Folge, dann heißt die Summe

$$s_n := a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}_+,$$

endliche arithmetische bzw. geometrische Reihe.

Summenzeichen Summen, die aus vielen Summanden bestehen, schreibt man in der Regel bequemer durch Benutzung des *Summenzeichens* $\sum$. So z. B. unsere obige Summe in der Form

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i := a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}.$$

Definitionsgemäß ist dabei der *Summationsindex* i der Reihe nach durch die Zahlen 0 bis $n-1$ zu ersetzen. Allgemein lässt sich dann die Summe der Summanden $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$; $n \geq m$, schreiben als

$$\sum_{i=m}^{n} a_i := a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n.$$

Es gibt einfache Formeln, mit denen man den Wert der Reihen sofort berechnen kann:

Wert von endlicher arithmetischer und geometrischer Reihe
Ist $s_n := a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}$ eine endliche arithmetische Reihe, dann gilt:

$$s_n = \frac{n}{2}(a_0 + a_{n-1}).$$

Ist $s_n := a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}$ eine endliche geometrische Reihe mit dem Quotienten $q := a_{k+1}/a_k \neq 1$, dann gilt:

$$s_n = a_0 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Die Formel für die arithmetische Reihe lässt sich mit der Idee von Klein-Gauß (siehe Aufgabe 3 aus „Endliche arithmetische und geometrische Reihen", Abschn. 2.8) leicht herleiten. Um die Formel für die geometrische Reihe zu zeigen, benutzen wir deren Bildungsgesetz und erhalten zunächst

$$s_n = a_0 + a_0 q + a_0 q^2 + \ldots + a_0 q^{n-1}.$$

Multiplikation dieser Gleichung mit $q \neq 0$ liefert nun

$$q s_n = a_0 q + a_0 q^2 + a_0 q^3 + \ldots + a_0 q^n.$$

Subtraktion der vorletzten Gleichung von der letzten ergibt

$$q s_n - s_n = a_0 q^n - a_0 \iff s_n(q-1) = a_0(q^n - 1).$$

Falls $q \neq 1$ (nicht konstante Folge), können beide Seiten durch $q - 1$ dividiert werden. Dies führt zur behaupteten Formel.

Übung 2.4

a) Eine endliche arithmetische Reihe besteht aus 10 Elementen. Es ist $a_0 = 20$ und $a_4 = 40$. Wie lauten k und s_{10}?
b) Ein gemütlicher Student beschließt, sich durch die bevorstehende Prüfung nicht stressen zu lassen. Er hat noch 12 Tage Zeit und will sich folgendermaßen vorbereiten: am ersten Tag 1 Minute, am zweiten Tag 2 Minuten, an jedem weiteren Tag will er den Arbeitsaufwand lediglich verdoppeln. Wie lange ist seine Vorbereitungszeit am 12. Tag? Wie lange ist die gesamte Vorbereitungszeit?

Lösung 2.4

a) Es muss gelten $40 = a_4 = a_0 + 4k = 20 + 4k$, woraus $k = 20/4 = 5$ folgt. Zur Berechnung der Reihe benötigen wir zunächst den letzten Summanden: $a_9 = a_0 + 9k = 65$. Damit ergibt sich $s_{10} = \frac{10}{2}(20 + 65) = 425$.
b) Es handelt sich um eine geometrische Folge mit $a_0 = 1$, $q = 2$ und $n = 12$. Der Arbeitsaufwand am 12. Tag ist $a_{11} = a_0 q^{11} = 1 \cdot 2^{11} = 2048$. Also lediglich gut 34 Stunden! Hier wird das *exponentielle Wachstum* geometrischer Reihen deutlich. Insgesamt muss der Student $s_{12} = a_0 \frac{q^{12}-1}{q-1} = 1 \cdot \frac{2^{12}-1}{2-1} = 4095$ Minuten arbeiten. Dies sind ca. 68 Stunden. Bei gleichmäßiger Arbeitsbelastung von ca. 5,6 Stunden pro Tag lässt sich die Prüfung also gut meistern.

Die (unendliche) geometrische Reihe, die aus unendlich vielen Summanden besteht, wird in Abschn. 7.2 behandelt.

2.4 Vollständige Induktion

Mit der Vollständigen Induktion wird im Folgenden ein Beweisverfahren angesprochen, welches die Gültigkeit einer Formel für alle natürlichen Zahlen zeigt. Der Induktion sehr ähnlich ist die Rekursion; so kann man etwa Zahlenfolgen rekursiv definieren.

Das Beweisprinzip der Vollständigen Induktion lautet:

Beweisprinzip der Vollständigen Induktion

Um die Gültigkeit einer Aussage $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ zu beweisen, muss man zweierlei zeigen:

- $A(0)$ ist wahr, d. h. die Aussage gilt für $n = 0$ (Induktionsbeginn),
- Aus $A(n)$ folgt $A(n + 1)$, d. h. wenn die Aussage für eine beliebige natürliche Zahl n gilt, dann gilt sie auch für die nachfolgende Zahl $n + 1$ (Induktionsschluss).

Der Induktionsbeginn besagt also: $A(0)$ gilt. Durch den Induktionsschluss folgt, dass die Aussage auch für den Nachfolger 1 der Zahl 0 gilt: also $A(1)$. Wiederum durch den Induktionsschluss folgt, dass die Aussage auch für den Nachfolger 2 der Zahl 1 gilt: also $A(2)$, usw. Damit kann man $A(n)$ für jede beliebige natürliche Zahl n zeigen.

Bemerkungen Zum Prinzip der Vollständigen Induktion sei noch Folgendes bemerkt:

- Anstelle von „Induktionsbeginn" spricht man auch von „Induktionsanfang" oder „Induktionsbasis"; für den „Induktionsschluss" sind ebenso die Begriffe „Induktionsschritt" oder „Schritt von n auf $n + 1$" gebräuchlich.
- Der Induktionsbeginn muss nicht bei 0 liegen, auch 1 oder irgendeine andere natürliche (oder sogar ganze) Zahl sind üblich.
- Es gibt Möglichkeiten der Verallgemeinerung der Vollständigen Induktion: Man kann etwa im Induktionsschritt von $A(0), A(1), \ldots, A(n)$ auf $A(n+1)$ schließen, also nicht von *einer* Zahl auf die nächste, sondern von mehreren Vorgängern aus. Andererseits gelten Aussagen nur für alle geraden bzw. ungeraden Zahlen, wenn man von $A(n)$ auf $A(n+2)$ im Induktionsschluss folgern kann.

Beispiel 2.8

Das klassische Beispiel, welches am besten das Beweisverfahren der Vollständigen Induktion verdeutlicht, ist der Beweis der folgenden Summenformel:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}. \qquad (*)$$

Induktionsbeginn: Gezeigt wird Formel $(*)$ für $n = 1$.

Für $n = 1$ besteht die Summe auf der linken Seite nur aus einem einzigen Summanden, nämlich der 1. Auf der rechten Seite ergibt $\frac{n(n+1)}{2}$ nach Einsetzen von $n = 1$ ebenfalls $\frac{1\cdot(1+1)}{2} = \frac{1\cdot 2}{2} = 1$, womit dann die Formel $(*)$ für $n = 1$ bewiesen wäre. Und wie so oft ist hier der Induktionsbeginn der einfachere Teil des Beweises.

Induktionsschluss: Wir setzen jetzt voraus, dass die Formel $(*)$ für n gilt, und zeigen, dass sie dann auch für $n + 1$ richtig ist. Also formal aufgeschrieben:

Induktionsvoraussetzung: (Das wird vorausgesetzt!)

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \qquad (**)$$

Induktionsbehauptung: (Das ist zu zeigen!)

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2} \qquad (***)$$

Auf die Induktionsbehauptung wiederum kommt man, indem man in der Induktionsvoraussetzung überall, wo n steht, dieses durch $n + 1$ ersetzt (auf Klammersetzung achten!).

Beim Induktionsschluss kommt es nun darauf an, (∗∗∗) aus (∗∗) herzuleiten – man wird also auch irgendwo in der Beweiskette das Bekannte, also (∗∗), benutzen müssen. Wir starten mit der linken Seite der Induktionsbehauptung:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) = \underbrace{[1 + 2 + 3 + \ldots + n]}_{=\frac{n(n+1)}{2}} + (n+1)$$

nach Induktionsvoraussetzung (∗∗), und fahren fort mit dem Ausklammern von $(n+1)$:

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1) \cdot \left[\frac{n}{2} + 1\right] = (n+1) \cdot \frac{(n+2)}{2}.$$

Damit haben wir die rechte Seite der Induktionsbehauptung (∗∗∗) stehen – was zu beweisen war!

Übung 2.5

Beweisen Sie durch Vollständige Induktion:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2.$$

Lösung 2.5

Der Induktionsbeginn ist wiederum einfach: $1 = 1^2$. Für den Induktionsschluss schreiben wir explizit die Induktionsvoraussetzung

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$$

und die Induktionsbehauptung

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) + (2n+1) = \sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = (n+1)^2$$

hin. Die Induktionsbehauptung ist mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung recht einfach zu zeigen:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) + (2n+1) = n^2 + (2n+1) = (n+1)^2.$$

Die Aussage der Formel lässt sich übrigens leicht veranschaulichen (siehe Abb. 2.4).

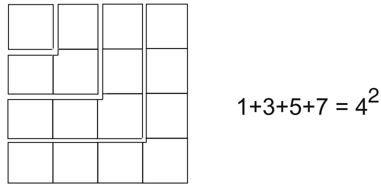


Abb. 2.4 Spezialfall von $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

Rekursion, Fakultät Vollständige Induktion ist eng verwandt mit Rekursion, was folgendes Beispiel gut verdeutlicht: Fakultäten sind bekanntlich definiert als $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ (vgl. Abschn. 1.4.1), etwa $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Wenn man nun aber $5! = 120$ kennt, wäre es doch dumm, $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ auszurechnen – das geht nämlich einfacher: $6! = 6 \cdot 5! = 6 \cdot 120 = 720$. Dass man, wie gesehen, $6!$ auf $6 \cdot 5!$ *zurückführen* kann, wird mit dem Begriff *Rekursion* bezeichnet. Wir halten fest:

Beispiel 2.9

Fakultäten kann man rekursiv definieren: $0! := 1$, $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$.

Übung 2.6

Definieren Sie entsprechend Summen $s_n := \sum_{i=0}^{n-1} a_i$ rekursiv.

Lösung 2.6

$s_1 = a_0$, $s_{n+1} = s_n + a_n$.

Potenzen Ein anderes Beispiel für eine rekursive Definition sind Potenzen:

Beispiel 2.10

$a^0 = 1$, $a^{n+1} = a^n \cdot a$.

Wenn man nun noch Potenzen für negative Exponenten wie folgt erklärt:

$$a^{-n} = (a^{-1})^n = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n},$$

dann gelten (zunächst für ganze Zahlen m, n) die bekannten *Potenzgesetze*:

Potenzgesetze

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Übung 2.7

Vereinfachen Sie $(\frac{9x^2y}{25a^2b^2})^2 \cdot (\frac{3axy^2}{5b^2})^{-3}$.

Lösung 2.7

$$\begin{aligned}\left(\frac{9x^2y}{25a^2b^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3axy^2}{5b^2}\right)^{-3} &= \frac{9^2x^4y^2}{25^2a^4b^4} \cdot \frac{5^3b^6}{3^3a^3x^3y^6} = \frac{9^2x^4y^2}{25^2a^4b^4} \cdot \frac{5^3b^6}{3^3a^3x^3y^6} \\ &= \frac{3^4 \cdot 5^3}{5^4 \cdot 3^3} \cdot \frac{x^4}{x^3} \cdot \frac{y^2}{y^6} \cdot \frac{1}{a^4 \cdot a^3} \cdot \frac{b^6}{b^4} = \frac{3}{5} \cdot x \cdot \frac{1}{y^4} \cdot \frac{1}{a^7} \cdot b^2 \\ &= \frac{3xb^2}{5y^4a^7}\end{aligned}$$

Rekursive Definition von Zahlenfolgen Ein anderes Beispiel: Man kann Zahlenfolgen bilden, indem man die erste Zahl (den Startwert) a_0 vorgibt, sowie eine Rekursionsvorschrift, wie sich die $(n+1)$-te Zahl a_{n+1} aus der n-ten Zahl a_n berechnet. So ist etwa durch $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n})$ eine Zahlenfolge rekursiv definiert. Durch iteratives Verwenden der Rekursionsformel erhält man $a_1 = \frac{1}{2}(a_0 + \frac{2}{a_0}) = 1{,}5$, $a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + \frac{2}{a_1}) \approx 1{,}4157$, $a_3 = \frac{1}{2}(a_2 + \frac{2}{a_2}) \approx 1{,}4142$ usw. (Diese Folge ist übrigens schon seit über 2000 Jahren bekannt. Als „Verfahren von Heron" liefert sie mit wachsendem n immer bessere Näherungswerte für $\sqrt{2}$.)

Übung 2.8

a) Welche Zahlenfolge ist durch $a_0 = 1;\ a_{n+1} = 2a_n + 1$ gegeben? Berechnen Sie $a_1, a_2 \ldots, a_5$ und erraten Sie ein *Bildungsgesetz*!
a) Beweisen Sie dieses Bildungsgesetz mittels Vollständiger Induktion.

Lösung 2.8

a) Die ersten Zahlen aus der rekursiv definierten Folge lauten: $a_1 = 3$, $a_2 = 7$, $a_3 = 15$, $a_4 = 31$, $a_5 = 63$. Es sind die um Eins verminderten Zweierpotenzen $4, 8, 16, 32, 64$. Das Bildungsgesetz der Folge ist daher einfach $a_n = 2^{n+1} - 1$.
b) Für $n = 0$ ergibt sich $a_0 = 2^{0+1} - 1 = 1$ (Induktionsbeginn). Der Induktionsschluss läuft wie folgt: Durch die rekursive Definition erhalten wir: $a_{n+1} = 2a_n + 1$. Die Induktionsvoraussetzung liefert: $a_n = 2^{n+1} - 1$. Also gilt insgesamt: $a_{n+1} = 2a_n + 1 = 2 \cdot (2^{n+1} - 1) + 1 = 2^{n+2} - 2 + 1 = 2^{n+2} - 1$. $a_{n+1} = 2^{n+2} - 1$ ist aber gerade die Induktionsbehauptung.

2.5 Kurzer Verständnistest

(1) Das 5. Glied der Folge $1, -3, 9, -27, \ldots$ lautet:

☐ 36 ☐ 48 ☐ 63 ☐ 81

(2) Das 6. Glied der Folge $(\frac{1+(-1)^n}{n^2})_{n\in\mathbb{N}_+}$ lautet:

☐ 0 ☐ $\frac{1}{8}$ ☐ $\frac{1}{18}$ ☐ $\frac{1}{36}$

(3) Für die durch $a_n = \frac{1-n^2}{n}$ definierte Folge gilt: $\lim_{n\to\infty} a_n = \ldots$

☐ $-\infty$ ☐ ∞ ☐ 0 ☐ 1

(4) Folgende Folgen sind beschränkt:

☐ $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ☐ $(1/n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ ☐ $(-n^3)_{n\in\mathbb{N}}$ ☐ $(2n)_{n\in\mathbb{N}}$

(5) Für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_+} := (\frac{(-1)^n}{2n})_{n\in\mathbb{N}_+}$ gilt:

☐ (a_n) ist beschränkt ☐ $-\frac{1}{2}$ ist Infimum

☐ $\frac{1}{4}$ ist Supremum ☐ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(6) Sind zwei Folgen $(a_n), (b_n)$ divergent mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, dann gilt $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \ldots$

☐ ∞ ☐ $-\infty$ ☐ 0 ☐ unbestimmt

(7) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine arithmetische Folge und $s_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i$ die entsprechende arithmetische Reihe. Dann gilt:

☐ $a_{n+1} = a_n + k$ ☐ $s_n = a_0 \frac{q^n-1}{q-1}$

☐ $a_{n+1} = a_n \cdot q$ ☐ $s_n = \frac{n}{2}(a_0 + a_{n-1})$

(8) Die geometrische Reihe mit $a_0 = 3$ und $a_5 = \frac{3}{32}$ hat den Quotienten $q = \ldots$

☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{1}{3}$ ☐ $\frac{1}{4}$ ☐ $\frac{1}{8}$

(9) Vollständige Induktion wird zum Beweis von Aussagen verwendet, die … gelten.

☐ für alle natürlichen Zahlen ☐ für alle reellen Zahlen

☐ für Brüche ☐ in der Geometrie

(10) Was ist $8x^2 \cdot (4x^3)^{-1}$?

☐ $\frac{2}{x}$ ☐ $32x^5$ ☐ $32x^6$ ☐ $2x^{-1}$

(11) Das 5. Glied a_4 der durch $a_0 = a_1 = 1$ und $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ für $n \geq 1$ rekursiv definierten Folge lautet:

☐ 1 ☐ 3 ☐ 5 ☐ 8

Lösung: (x $\simeq$ richtig, o $\simeq$ falsch)
1.) ooox, 2.) ooxo, 3.) xooo, 4.) xxoo, 5.) xxxx, 6.) ooox, 7.) xoox, 8.) xooo, 9.) xooo,
10.) xoox, 11.) ooxo

2.6 Anwendungen

2.6.1 Beweise in der Mathematik

Zur Mathematik gehören Beweise – wie das Amen zur Kirche, wie Versuche zur Experimentalphysik, wie Messungen zu den Ingenieurwissenschaften. Dass die Mathematiker es dabei besonders genau nehmen, gibt der folgende Witz gut wieder: Ein Ingenieur, ein Physiker und ein Mathematiker fahren im Zug durch Schottland und sehen ein schwarzes Schaf. Sagt der Ingenieur: „Alle Schafe in Schottland sind schwarz." Sagt der Physiker: „Es gibt in Schottland mindestens ein schwarzes Schaf." Und sagt der Mathematiker: „Es gibt in Schottland mindestens ein Schaf, welches auf mindestens einer Seite schwarz ist."

Beweise sind aber in allen exakten Wissenschaften wirklich wichtig, denn ein bloß intuitives Verständnis kann – das ist auch eine Alltagserfahrung – leicht täuschen. Dabei gibt es auch in der Mathematik ganz unterschiedliche Beweistypen, von denen die im vorliegenden Kapitel diskutierte „Vollständige Induktion" nur in relativ wenigen Fällen angewandt werden kann, nämlich in der Regel dann wenn eine Eigenschaft bewiesen werden soll, die für alle natürlichen Zahlen gilt. „Vollständige Induktion" ist also eher ein Nebendarsteller in einem großen Ensemble von Beweisstrategien.

Mathematische Aussagen haben oft die Gestalt „Wenn A, dann B". In der Logik verwendet man dafür die Abkürzung „A $\Rightarrow$ B" und nennt die logische Verknüpfung „Implikation". Aber nicht immer kann man „A $\Rightarrow$ B" *direkt* zeigen, d. h. mit Zwischenschritten „A $\Rightarrow Zw_1 \Rightarrow Zw_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow Zw_n \Rightarrow$ B" herleiten. Manchmal kommt man auf scheinbaren Umwegen weiter.

Ein solcher vermeintlicher Umweg ist der so genannte „Beweis durch Kontraposition". Hier zeigt man anstelle von „A $\Rightarrow$ B" die *Kontraposition* „$\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$" (wobei $\overline{A}$ für die Verneinung von A steht). Dass „A $\Rightarrow$ B" und „$\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$" äquivalent (also logisch gleichwertig) sind, lernt man in der Logik – dort lernt man übrigens auch, dass „A $\Rightarrow$ B" etwas ganz anderes als „B $\Rightarrow$ A" ist.

Eine andere Möglichkeit, eine Aussage „A $\Rightarrow$ B" zu beweisen, ist der so genannte Widerspruchsbeweis. Er funktioniert *indirekt*: Man setzt „$A \wedge \overline{B}$" (A und nicht-B) voraus und leitet daraus einen Widerspruch ab. Ein Glanzstück solcher mathematischer Beweiskunst ist etwa der Beweis Euklids, dass es unendlich viele Primzahlen geben muss: Euklid nahm an, es gebe nur endlich viele Primzahlen und leitete daraus einen Widerspruch her.

Euklid (etwa 3. Jahrhundert v. Chr.) liefert auch das Stichwort für eine weitere wichtige Charakterisierung der Mathematik im Zusammenhang mit Beweisen: die so genannte *axiomatische Vorgehensweise*. Euklid selbst gilt als einer der Urväter der Mathematik, sein 13-bändiges Werk „Elemente" war das am weitesten verbreitete wissenschaftliche Werk überhaupt. Euklid hat in ihm systematisch die Geometrie beschrieben – nicht mit bunten Bildern oder mit genauen Zeichnungen, sondern auf axiomatische Weise: Er postuliert (d. h. fordert) ganz am Anfang Sätze, so genannte Axiome, also Grundannahmen, die einfach als gültig vorausgesetzt werden. Aus ihnen versucht man dann, möglichst viele Folgerungen herzuleiten. Ein Beweis ist in der Mathematik also nicht dem Urknall, einer

Schöpfung aus dem Nichts zu vergleichen, sondern bedeutet ein strenges Herleiten aus vorausgesetzten Axiomen.

„Four colors suffice" (Vier Farben genügen) – das stand auf einem Sonderstempel der Post von Illinois und hatte einen mathematischen Hintergrund, nämlich den Beweis des so genannten *Vierfarbensatzes*. Er besagt, dass vier Farben ausreichen, um auf einer beliebigen Landkarte die Staaten zu kolorieren (derart, dass für streckenweise nebeneinander liegende Staaten verschiedene Farben verwendet werden). Der (erste) Beweis dieses Satzes stammt von zwei Mathematikern – und dem Kollegen Computer, der mit fast zwei Monaten Rechenzeit seinen Anteil beisteuerte. Hier war der Computer nur auf das Durchtesten von vielen Möglichkeiten programmiert worden – Wer aber kann garantieren, so wandten einige Mathematiker ein, dass der Computer keinen Fehler gemacht hat? Im Gegenteil, konterten Informatiker (dort gibt es Fachrichtungen, die sich „Automatisches Beweisen" oder „Künstliche Intelligenz" nennen), in Zukunft wird ein Beweis nur noch gelten, wenn ihn ein Computer überprüft hat... (Skeptiker, die sich bei solchen Äußerungen in Science-Fiction-Romanen wähnen, seien daran erinnert, dass bereits vor einigen Jahren ein Computer, genannt „Deep Blue", über den Schachweltmeister Kasparov siegte.)

Dass mathematische Beweise immer komplizierter werden, ist auch kein Geheimnis. Manchmal kann ein solcher Beweis nur einer größeren Gemeinschaft von Wissenschaftlern gelingen. So waren etwa an der Klassifikation der so genannten endlichen Gruppen (s. auch Abschn. 4.3) mehr als 100 Mathematiker beteiligt. Und es besteht das Gerücht, dass der einzige von ihnen, der den Beweis in seiner vollen Länge verstanden habe, inzwischen verstorben sei.

Andere Beweise sind das Werk einzelner Genies, die dafür aber oft Jahre oder Jahrzehnte gebraucht haben – so etwa der Mathematiker Andrew Wiles von der amerikanischen Universität Princeton für den Beweis des so genannten Fermat'schen Satzes. Dieser Klassiker der Mathematikerzunft hat folgenden Hintergrund: Bekanntlich gibt es Zahlentripel (x, y, z), die die Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ erfüllen, etwa $(3, 4, 5)$ die Gleichung $3^2 + 4^2 = 5^2$. Wie steht es nun mit der Gleichung $x^n + y^n = z^n$? Gibt es andere natürliche Zahlen n, so dass sich entsprechende Zahlentripel mit n als Exponenten finden lassen? Die Antwort ist – nein.

Andrew Wiles ist für den Beweis des Fermat'schen Satzes mit dem Wolfskehl-Preis ausgezeichnet worden. Der Preis wurde Ende des 19. Jahrhunderts von dem deutschen Industriellen Paul Wolfskehl gestiftet – nachdem er, selbst studierter Mathematiker, sich aus Liebeskummer das Leben nehmen wollte und, fasziniert durch den Fermat'schen Satz, wieder Interesse am Weiterleben fand.

Fermat selbst war ein Hobby-Mathematiker des 17. Jahrhunderts, sein täglich Brot verdiente er mit der Juristerei. Er lieferte nur den Fermat'schen Satz, nicht aber seinen Beweis – Fermat bemerkte nur lässig in einer Randnotiz, er habe einen wahrhaft wunderbaren Beweis des Satzes gefunden, aber leider passe dieser nicht auf den Rand der Seite. Dieser Beweis wurde dann jahrhundertelang von Mathematikern gesucht, es wurden wichtige Vorarbeiten geleistet, aber letztlich gelang er erst 1994 Andrew Wiles, der dafür 8 Jahre seines Lebens investierte. Ein Buch von Simon Singh, „Fermats letzter Satz“, stand als spannender Wissenschaftsthriller monatelang auf den englischen und deutschen Beststellerlisten.

2.6.2 Börsenkurs und Rendite einer Anleihe

Bankangebote für Kunden zum Kauf von Wertpapieren haben meist die Form

Zins	Anleihenbeschreibung	Kurs	Rendite	Restlaufzeit
7 %	Inhaberschuldverschreibung	96,01	8,00 %	5 Jahre
10 %	Öffentlicher Pfandbrief	105,56	6,93 %	2 Jahre
…	…	…	…	…

Wichtige Entscheidungskriterien für den Käufer sind dabei der *Nominalzins* (oben 7 % bzw. 10 %), der *Börsenkurs*, die *Rendite* und die *Restlaufzeit*.

Der *Börsenkurs* gibt – wie der Name schon sagt – den jeweiligen Kurs der Anleihe an der Börse an. So müsste man im obigen Fall für nominal 100 Euro der Inhaberschuldverschreibung nur 96,01 Euro bezahlen, nominal 100 Euro des Pfandbriefes würden aber 105,56 Euro kosten. Wie wird nun dieser Börsenkurs bestimmt? Dazu wollen wir im Folgenden auf den Zusammenhang der obigen Kennzeichen von Anlagen (Nominalzins, Kurs, Rendite, Restlaufzeit) eingehen:

- Der *Nominalzins* liefert die für den Anleger zunächst interessanteste Angabe, nämlich wie viel Zinsen er für sein angelegtes Geld pro Jahr (= p. a. „pro anno“) erhält. Zu nominal 100 Euro der obigen Inhaberschuldverschreibung gehören 7 Euro, zu nominal 10.000 Euro entsprechend 700 Euro, nämlich 7 %. Beim Pfandbrief liegt der Nominalzins entsprechend höher, nämlich bei 10 %.
- Die *Restlaufzeit* gibt an, auf wie viele Jahre das Geld festgelegt (und natürlich auch verzinst) wird.

Die oben angebotenen Anlagen lassen sich mathematisch auch als (endliche) Zahlenfolgen auffassen. Wenn Sie eine Anleihe mit jährlicher Zinszahlung K (Kupon) und einer Laufzeit von n Jahren kaufen, dann entspricht dies der Zahlenfolge

$$(a_0 = 0,\, a_1 = K,\, a_2 = K,\, \ldots,\, a_{n-2} = K,\, a_{n-1} = K,\, a_n = K + T).$$

Das heißt, dass Sie jedes Jahr Ihre Zinszahlung K erhalten und am Ende der Laufzeit natürlich neben der Zinszahlung K auch das eingesetzte Kapital, den sog. *Tilgungsbetrag* T, zurückbekommen. In unserem Beispiel: Zu nominal 10.000 Euro der obigen Inhaberschuldverschreibung gehört die Zahlenfolge (0, 700, 700, 700, 700, 700 + 10.000 = 10.700). Und zu nominal 10.000 Euro des Pfandbriefs lautet die Zahlenfolge (0, 1000, 1000 + 10.000 = 11.000).

Jede Anleihe wurde vom Emittenten mit einem *festen Nominalzins*, dem die Zahlungen K entsprechen, versehen. Dieser Zins weicht natürlich in der Regel von der derzeit auf dem Markt erzielbaren *Rendite* r ab. Der *faire Börsenkurs* entspricht daher dem *Barwert* BW der Zahlenfolge unter Zugrundelegung der Rendite r („Was müsste man heute bei der Bank anlegen, um die Zahlenfolge zu realisieren?").

Der Barwert berechnet sich dabei wie folgt: Möchte man etwa nach einem Jahr eine Zahlung von 700 Euro bei einem Zinssatz von 5 % erhalten, so muss man heute 666,67 Euro anlegen. Nach einem Jahr werden dann mit Zinsen 700 Euro ($666{,}67 \cdot 1{,}05 = 700$) ausbezahlt. Will man hingegen *nach zwei Jahren* eine Auszahlung von 700 Euro erhalten, so sind heute 634,92 Euro festzulegen ($634{,}92 \cdot 1{,}05^2 = 700$). Die jeweils berechneten Anlagebeträge nennt man Barwerte. Allgemein ist also der Barwert der Zinszahlung K im Jahre t bei einer Rendite r mit $K \cdot (1+r)^{-t}$ anzusetzen.

Bei einer Zahlenfolge der Gestalt ($a_0 = 0$, $a_1 = K$, $a_2 = K$, ..., $a_{n-2} = K$, $a_{n-1} = K$, $a_n = K + T$) erhält man den Barwert entsprechend als Summe zu

$$BW = \sum_{t=1}^{n} K(1+r)^{-t} + T(1+r)^{-n} = K\sum_{t=1}^{n}(1+r)^{-t} + T(1+r)^{-n}. \qquad (*)$$

Setzt man $q := (1+r)^{-1}$, so ist $\sum_{t=1}^{n}(1+r)^{-t} = \sum_{t=1}^{n} q^t$. Die Summanden dieser Reihe bilden eine geometrische Folge $(q^1, q^2, q^3, \ldots, q^n)$, da der Quotient benachbarter Elemente konstant gleich q ist. Damit haben wir eine *geometrische Reihe*, deren Wert sich zu (man setze $a_0 = q$ in der Formel in Abschn. 2.3)

$$\sum_{t=1}^{n} q^t = q\frac{q^n - 1}{q-1} = \frac{1}{1+r} \cdot \frac{(1+r)^{-n} - 1}{(1+r)^{-1} - 1} = \frac{(1+r)^{-n} - 1}{-r}$$

ergibt. Erweiterung von Zähler und Nenner jeweils mit $(1+r)^n$ liefert dann

$$\sum_{t=1}^{n} q^t = \frac{((1+r)^{-n} - 1) \cdot (1+r)^n}{-r \cdot (1+r)^n} = \frac{1 - (1+r)^n}{-r(1+r)^n} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r}(1+r)^{-n}.$$

Setzt man dieses Ergebnis in Formel ($*$) ein, so erhält man eine einfache Formel zur Bestimmung des Börsenkurses BW einer Anleihe:

$$BW = \frac{K}{r} + \left(T - \frac{K}{r}\right)(1+r)^{-n}. \qquad (**)$$

Auf unsere Inhaberschuldverschreibung angewandt ergibt sich das Folgende: Sie soll eine Rendite von 8 % p.a. haben. Ihr Kurs BW_{IHS} (für 100 Euro Nennwert und damit Kupon $K = 7$) lässt sich dann folgendermaßen berechnen:

$$BW_{\text{IHS}} = \frac{7}{0{,}08} + \left(100 - \frac{7}{0{,}08}\right)(1{,}08)^{-5} = 96{,}0073.$$

Entsprechend ergibt sich der Kurs des Pfandbriefes BW_{PFB} (für 100 Euro Nennwert und damit Kupon $K = 10$) bei einer Rendite von 6,93 % zu

$$BW_{\text{PFB}} = \frac{10}{0{,}0693} + \left(100 - \frac{10}{0{,}0693}\right)(1{,}0693)^{-2} = 105{,}5560.$$

Wir haben bisher bei vorgegebener Rendite r den Barwert der Anleihe ermittelt. Umgekehrt ist es natürlich auch möglich, bei vorgegebenem Anleihenkurs BW die Rendite zu berechnen. Multipliziert man Formel (∗∗) mit r (Achtung: eine Lösung $r = 0$ kommt fälschlicherweise hinzu!) und $(1 + r)^n$, so erhält man nach Umordnung der Terme

$$BW \cdot r(1 + r)^n - K\left[(1 + r)^n - 1\right] - T \cdot r = 0.$$

Dies ist eine Polynomgleichung $(n + 1)$-ten Grades in r. Die Lösung r kann i.Allg. nicht analytisch berechnet werden. Es muss daher auf gängige Näherungsverfahren (z. B. Sekanten- oder Newtonverfahren, siehe Abschn. 6.6) zurückgegriffen werden.

Ganz analog zu obigem Vorgehen wird übrigens auch bei Hypothekendarlehen die Rendite, die in diesem Zusammenhang als *Effektivzins* bezeichnet wird, berechnet. Die Angabe des Effektivzinses ist den Banken gesetzlich vorgeschrieben. Details der Berechnung regelt in Deutschland die neue seit 01.09.2000 geltende Preisangabenverordnung, abgekürzt PAngVO, die die EU-Richtlinie 98/7/EG umsetzt. Das Verfahren ist unter dem Namen *AIBD*- bzw. *ISMA-Methode* bekannt.

2.7 Zusammenfassung

Folgen

Eine *Folge* ist eine Abbildungsvorschrift $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $a(n) = a_n$. Man schreibt: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n) = a_0, a_1, a_2, \ldots$ (a_n Folgenglieder)

Bsp. $a_n = a(n) = 2n + 1$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2n + 1)_{n\in\mathbb{N}} = 1, 3, 5, 7, \ldots$

Konvergenz

Eine Folge (a_n) ist *konvergent* mit dem Grenzwert (Limes) a, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq n_0$, $n \in \mathbb{N}$, $|a_n - a| < \varepsilon$ gilt. Übliche Notation (Limeszeichen oder einfach):

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{oder} \quad a_n \to a.$$

Ist $a = 0$, so heißt (a_n) Nullfolge.

Divergenz

Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt *divergent*.

Sind für alle $M > 0$ bzw. $M < 0$ fast alle Glieder a_n einer Folge (a_n) größer bzw. kleiner als M, dann nennt man sie bestimmt divergent mit dem uneigentlichen Grenzwert ∞ bzw. $-\infty$. Man schreibt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

Bsp. $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}_+}$, $\frac{1}{n} \to 0$ bzw. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$,
$a_n = n^3$, $n^3 \to \infty$ bzw. $\lim_{n\to\infty} n^3 = \infty$.

Wichtige Eigenschaften einer Folge (a_n)

- nach oben beschränkt: es gibt ein M_o mit $a_n \leq M_o$,
- nach unten beschränkt: es gibt ein M_u mit $a_n \geq M_u$,
- beschränkt, falls nach oben und unten beschränkt,
- monoton wachsend: $a_{n+1} \geq a_n$,
- monoton fallend: $a_{n+1} \leq a_n$.

Die Aussagen müssen immer für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten.

Eine monoton wachsende, nach oben beschränkte bzw. monoton fallende, nach unten beschränkte Folge ist konvergent.

Bsp. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ mit $a_n = -\frac{1}{2n}$,
monoton wachsend, da $a_{n+1} = -\frac{1}{2(n+1)} > -\frac{1}{2n} = a_n$,
nach oben beschränkt ($a_n < 0$) und damit konvergent.

Euler'sche Zahl e als Grenzwert einer Folge

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} \approx 2{,}7182818$$

Wichtige Grenzwertregeln

Falls $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b, \quad \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b,$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b, \qquad \lim_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot a, \quad c = \text{const}, \ c \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}, \quad \text{falls } b_n \neq 0, \ b \neq 0.$$

Ist eine der obigen Folgen bestimmt divergent, z. B. $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, dann gilt ähnlich ($\infty$ ist Symbol, keine Zahl!):

$$„a \pm \infty = \pm\infty“, \quad „a \cdot \infty = \pm\infty“ \quad (a \neq 0),$$
$$„\tfrac{a}{\infty} = 0“, \qquad „\tfrac{\infty}{a} = \pm\infty“ \quad (a \neq 0).$$

Bsp. $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{4-n}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n}\right) \cdot \frac{\lim_{n\to\infty}(4/n) - 1}{2 - \lim_{n\to\infty}(1/n)} = 1 \cdot \frac{4 \cdot 0 - 1}{2 - 0} = -\frac{1}{2}.$

Wichtige Grenzwerte

($c, q \in \mathbb{R}$, $c = \text{const.}$, $c > 0$, $|q| < 1$)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty,$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

Definition und Bildungsgesetz für arithmetische und geometrische Folge (a_n)

Arithmetische Folge: $a_{n+1} - a_n = k$, $a_n = a_0 + n \cdot k$.
Geometrische Folge: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, $a_n = a_0 \cdot q^n$ (alle $a_n \neq 0$).

Der Wert $s_n := \sum_{i=0}^{n-1} a_i = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}$ einer endlichen

a) arithmetischen Reihe ist: $s_n = \frac{n}{2}(a_0 + a_{n-1})$,
b) geometrischen Reihe mit Quotient $q := a_{k+1}/a_k \neq 1$ ist: $s_n = a_0 \frac{q^n - 1}{q-1}$.

Bsp.
- $a_n = \frac{n}{2}$, arithmetische Folge mit $k = \frac{1}{2}$ und $a_0 = 0$,
  endliche arithm. Reihe: $s_{10} = 0 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{9}{2} = \frac{10}{2}(0 + \frac{9}{2}) = 22{,}5$;
- $a_n = 2^n$, geometrische Folge mit $q = 2$ und $a_0 = 1$,
  endliche geom. Reihe: $s_{10} = 1 + 2 + \ldots + 2^9 = 1 \cdot \frac{2^{10}-1}{2-1} = 1023$.

Vollständige Induktion

Um die Gültigkeit einer Aussage $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ zu beweisen, muss man zweierlei zeigen:

- $A(0)$ ist wahr, d. h. die Aussage gilt für $n = 0$ (Induktionsbeginn),
- Aus $A(n)$ folgt $A(n+1)$, d. h. wenn die Aussage für eine beliebige natürliche Zahl n gilt, dann gilt sie auch für die nachfolgende Zahl $n + 1$ (Induktionsschluss).

Dieses Beweisprinzip erinnert an Dominosteine: Wenn der erste Stein in einer Reihe von Dominosteinen fällt und mit jedem Stein auch der nächste Stein, so liegen bald alle Steine in der Reihe am Boden.

Bsp. $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$ mit Vollständiger Induktion beweisen:

Induktionsbeginn: Für $n = 1$: $1 = \frac{1\cdot 2}{2}$,

Induktionsschluss: $1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$
$= (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

2.8 Übungsaufgaben

Folgen

1. Geben Sie die Bildungsgesetze für folgende Zahlenfolgen an:
   a) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$
   b) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$
   c) $\sqrt{8}, \sqrt[3]{8}, \sqrt[4]{8}, \sqrt[5]{8}, \ldots$
   Untersuchen Sie diese auf Monotonie und Konvergenz (Grenzwertbestimmung nicht erforderlich).
2. Hat die Folge $(n^5)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Supremum oder Infimum? Untersuchen Sie diese auf Konvergenz.
3. Für zwei Folgen (a_n) und (b_n) gelte $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = -\frac{1}{2}$. Bestimmen Sie:
   a) $\lim_{n\to\infty}(6a_n + 3b_n)$
   b) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n$
   c) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$.
4. Zu untersuchen ist die durch $a_n = \frac{3+(-1)^n}{n}$, $n \in \mathbb{N}_+$, definierte Zahlenfolge auf Monotonie und Beschränktheit.
5. Gegeben sei die rekursiv definierte Zahlenfolge $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{5a_n}$ für $n = 0, 1, \ldots$ Wie lauten die Glieder $a_1, \ldots, a_5$? Welchen Limes hat diese Folge?

Endliche arithmetische und geometrische Reihen

1. Zeigen Sie die folgenden Zusammenhänge:
   a) Jedes Element einer arithmetischen Folge (außer dem ersten) ist das *arithmetische Mittel* der beiden Nachbarelemente, d. h. $\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2} = a_n$.
   b) Jedes Element einer geometrischen Folge (außer dem ersten) ist das *geometrische Mittel* der beiden Nachbarelemente, d. h. $\sqrt{a_{n-1}\cdot a_{n+1}} = a_n$.
2. a) Berechnen Sie $\sum_{i=1}^{5} 5^{i-1}$.
   b) Ermitteln Sie durch geeignete Zerlegung den Wert von $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$.
   c) Ändern Sie die Summen in a) und b) so ab, dass der Index i mit 0 beginnt.
3. Zeigen Sie, dass der Wert der arithm. Reihe $\sum_{i=0}^{n-1} a_i$ sich zu $\frac{n}{2}(a_0 + a_{n-1})$ ergibt. [Hinweis: Benutzen Sie hierzu die Idee von Klein-Gauß (Abschn. 2.1).]

4. In einem Labor wird eine Bakterienkultur angesetzt. Der Nährboden ist so beschaffen, dass sich die Bakterien nach jeweils einer Stunde verdoppeln. Wie groß ist die Kultur nach 12 Stunden, wenn mit 10 Bakterien gestartet wird?
5. Ein Unternehmen hat derzeit einen Jahresumsatz von 5 Mio. Euro. Während der nächsten 10 Jahre plant es, den Umsatz um jeweils 5 % pro Jahr zu steigern. Wie hoch sind die Einnahmen am Ende des 10. Jahres? Was wurde insgesamt umgesetzt?

Vollständige Induktion

1. Beweisen Sie durch vollständige Induktion für alle $n \in \mathbb{N}_+$: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.
2. Beweisen Sie durch vollständige Induktion für alle $n \in \mathbb{N}_+$: $1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = (1 - x^n)/(1 - x)$, $x \neq 1$.
3. Beweisen Sie durch vollständige Induktion die so genannte *Bernoulli'sche Ungleichung*: $(1 + x)^n > 1 + n \cdot x$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $x > -1$, $x \neq 0$.
4. Ein Einwand gegen die Vollständige Induktion ist der folgende: „Setzt man beim Beweis einer Formel nicht gerade in der Induktionsvoraussetzung die zu beweisende Formel voraus? Das wäre doch dann ein kapitaler logischer Fehler!?“ Diskutieren Sie diese Argumentation.

2.9 Lösungen

Folgen

1. Die Bildungsgesetze lauten jeweils mit $n \in \mathbb{N}_+$: a) $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$, b) $a_n = \frac{n}{n+1}$ und c) $a_n = \sqrt[n+1]{8}$. Zur Monotonie und Konvergenz lässt sich feststellen:
   a) Wegen des alternierenden Vorzeichens ist die Folge nicht monoton. Sie ist als Nullfolge ($\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$) aber konvergent. Monotonie ist für die Konvergenz einer Folge also keine notwendige Eigenschaft.
   b) Die Folge ist monoton wachsend. Man zeigt dies, indem man die Gleichung $a_{n+1} \geq a_n$ solange äquivalent umformt, bis sie offensichtlich richtig ist:
   $$\frac{n+1}{n+2} \geq \frac{n}{n+1} \iff (n+1)^2 \geq n(n+2) \iff 1 \geq 0.$$
   Da die Folge zudem durch 1 nach oben beschränkt ist, konvergiert sie.
   c) Die Folge ist monoton fallend, da auch hier aus dem Ansatz $a_{n+1} \leq a_n$ folgt (Skizze der Funktionen und Umkehrfunktionen!)
   $$\sqrt[n+2]{8} \leq \sqrt[n+1]{8} \iff 8^{n+1} \leq 8^{n+2} \iff 1 \leq 8.$$
   Die Folge konvergiert, da sie zusätzlich durch 0 nach unten beschränkt ist.

2. Die Folge hat bei 0 ein Infimum, welches gleichzeitig Minimum ist. Sie ist bestimmt divergent gegen ∞, d. h. $\lim_{n\to\infty} n^5 = \infty$, denn für jedes beliebig gewählte $M > 0$ sind fast alle Glieder größer als dieses M. Man muss ja nur $n_0 \geq \sqrt[5]{M}$ wählen, dann gilt $a_n > M$ für alle $n > n_0$. (Ist beispielsweise $M = 100.000$ vorgegeben, so wähle man $n_0 = \sqrt[5]{10^5} = 10$. Ab a_{11} sind dann alle Glieder größer als 10^5.) Somit hat sie kein Supremum.
3. Mit Hilfe der Grenzwertregeln erhalten wir
   a) $\lim\limits_{n\to\infty}(6a_n + 3b_n) = 6\lim\limits_{n\to\infty} a_n + 3\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 6\cdot\frac{1}{3} + 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$,
   b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{6}$,
   c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{1/3}{-1/2} = -\frac{2}{3}$.
4. Einen ersten Überblick über das Verhalten der Folge erhält man durch die Ermittlung einiger Folgenglieder: $2, 2, \frac{2}{3}, 1, \frac{2}{5}, \frac{2}{3}, \frac{2}{7}, \frac{1}{2}, \ldots$ Man erkennt nun leicht, dass die Folgenglieder abwechselnd größer und kleiner werden, also keine Monotonie vorliegt. Die Folge ist aber beschränkt, da $0 \leq a_n \leq 2$ gilt.
5. Wiederholtes Einsetzen in die Rekursionsformel liefert:

$$a_1 = \sqrt{5}, \qquad a_2 = \sqrt{5\sqrt{5}}, \qquad a_3 = \sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}},$$

$$a_4 = \sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}}}, \quad a_5 = \sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}}}}.$$

   Um das Bildungsgesetz zu finden, schreiben wir $a_1 = 5^{\frac{1}{2}}$, $a_2 = 5^{\frac{3}{4}}$, $a_3 = 5^{\frac{7}{8}}$ und $a_4 = 5^{\frac{15}{16}}$. Nun erkennt man leicht, dass allgemein $a_n = 5^{\frac{2^n-1}{2^n}}$ gilt. Es ist $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n} = \lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2^n}) = 1$ und somit $\lim_{n\to\infty} a_n = 5^1 = 5$.

Endliche arithmetische und geometrische Reihen

1. a) Unter Ausnutzung der Definition gilt $a_{n-1} = a_n - k$ und $a_{n+1} = a_n + k$. Daraus folgt
$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{(a_n - k) + (a_n + k)}{2} = a_n.$$
   b) Das Bildungsgesetz liefert $a_{n-1} = a_0 q^{n-1}$ und $a_{n+1} = a_0 q^{n+1}$. Daraus folgt $\sqrt{a_{n-1}\cdot a_{n+1}} = \sqrt{a_0 q^{n-1}\cdot a_0 q^{n+1}} = \sqrt{a_0^2 q^{2n}} = a_0 q^n = a_n$.
2. a) Es ist $\sum_{i=1}^5 5^{i-1} = 5^0 + 5^1 + 5^2 + 5^3 + 5^4 = 781$.
   b) Unter Benutzung der Definition des Summenzeichens und der Rechengesetze für „+“ und „–“ gilt
$$\sum_{i=1}^n (2i-1) = 2\sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^n 1 = 2\frac{n(n+1)}{2} - n = n^2.$$
   Man beachte dabei, dass $\sum_{i=1}^n 1 = 1_1 + 1_2 + 1_3 + \ldots + 1_n = n\cdot 1 = n$ ist!

c) Ändert man den Laufindex einer Summe, so muss man auch die Summanden anpassen:

zu a) $\sum_{i=1}^{5} 5^{i-1} = 5^0 + 5^1 + 5^2 + 5^3 + 5^4 = \sum_{i=0}^{4} 5^i,$

zu b) $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = \sum_{i=0}^{n-1}(2i+1).$

3. Man schreibt die Summanden der Reihe zweimal untereinander, einmal von vorne und einmal von hinten beginnend:

$$\begin{aligned} s_n &= a_0 \quad + a_1 \quad + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} \\ s_n &= a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_1 \quad + a_0 \end{aligned}$$

Unter Beachtung des Bildungsgesetzes erhalten wir:

$$\begin{aligned} s_n &= a_0 \qquad\qquad\quad + a_0 + k \qquad\quad + \ldots + a_0 + (n-2)k + a_0 + (n-1)k \\ s_n &= \underbrace{a_0 + (n-1)k} + \underbrace{a_0 + (n-2)k} + \ldots + \underbrace{a_0 + k \qquad\quad} + \underbrace{a_0 \qquad\qquad} \end{aligned}$$

Da die untereinander stehenden Summanden immer $2a_0 + (n-1)k$ ergeben, folgt $2s_n = n[2a_0 + (n-1)k] = n[a_0 + a_0 + (n-1)k] = n[a_0 + a_{n-1}]$. Division durch 2 liefert jetzt die Behauptung.

4. Es handelt sich um eine geometrische Folge mit $a_0 = 10$ und $q = 2$. Nach 12 Stunden sind $a_{12} = a_0 q^{12} = 10 \cdot 2^{12} = 40.960$ Bakterien vorhanden.

5. Es liegt eine geometrische Reihe mit $a_0 = 5$ und $q = 1{,}05$ vor. Im 10. Jahr liegt der Umsatz bei $a_{10} = a_0 q^{10} = 5(1{,}05)^{10} \approx 8{,}14$ Mio. Euro. Insgesamt wurden $s_{11} = 5\frac{1{,}05^{11}-1}{1{,}05-1} \approx 71{,}03$ Mio. Euro umgesetzt.

Vollständige Induktion

1. Der Induktionsbeginn für $n = 1$ lautet $1^2 = 1 \cdot 2 \cdot 3/6$. Induktionsvoraussetzung ist

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

Induktionsbehauptung analog

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}.$$

Der Induktionsschluss lautet

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n+1}{6} \cdot [n(2n+1) + 6(n+1)] = \frac{n+1}{6} \cdot [2n^2 + 7n + 6] \\ &= \frac{n+1}{6} \cdot (n+2)(2n+3). \end{aligned}$$

Zugegebenermaßen kommt man auf die letzte Umformung wohl nur, wenn man das Ziel, nämlich die Induktionsbehauptung, vor Augen hat.

2. Der Induktionsbeginn für $n = 1$ lautet $1 = \frac{1-x^1}{1-x}$. Der Induktionsschluss hat die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^n &= \frac{1-x^n}{1-x} + x^n = \frac{1-x^n+(1-x)x^n}{1-x}\\ &= \frac{1-x^n+x^n-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.\end{aligned}$$

3. Für $n = 2$ ergibt sich der Induktionsbeginn zu $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$. Der Induktionsschluss hat die Gestalt:

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)\cdot(1+x)^n\\ &> (1+x)\cdot(1+nx) = 1 + nx + x + nx^2 = 1 + (n+1)x + nx^2\\ &> 1 + (n+1)x.\end{aligned}$$

Die Einschränkung $x > -1$ wird übrigens benötigt, damit der Klammerausdruck $(1+x)$ positiv ist: Das Ungleichheitszeichen bleibt nur erhalten, weil die Ungleichung $(1+x)^n > 1 + nx$ mit dem positiven Ausdruck $(1+x)$ multipliziert wird.

4. Im Induktionsschluss wird nur *von einem speziellen n* auf dessen Nachfolger $n + 1$ geschlossen; keinesfalls wird hier angenommen, dass die Aussage *für alle n* gilt. Wenn Sie die Verwendung der Variable n im Induktionsschluss stört, dann können Sie auch von k auf $k + 1$ schließen.

http://www.springer.com/978-3-642-24327-1

Mathematik kompakt
für Ingenieure und Informatiker
Stry, Y.; Schwenkert, R.
2013, XIV, 535 S. 209 Abb.,
ISBN: 978-3-642-24327-1