

Kapitel 2

Zeitlich konstante elektrische und magnetische Felder

Wir beginnen jetzt mit der systematischen Darstellung der theoretischen Elektrodynamik, wobei gewisse Überschneidungen mit dem einführenden Kap. 1 unvermeidlich sind. Im Kap. 2 wird die Elektro- und Magnetostatik behandelt, wir beschränken uns hier auf zeitlich konstante Felder. Die Resultate gelten für Vakuum und in sehr guter Näherung auch für Luft. Im Abschn. 2.7 werden die Randbedingungen beim Übergang von einem Medium in ein anderes behandelt. Die erforderlichen mathematischen Begriffe und Methoden sind in Anhang A zu finden.

2.1 Elektrisches Feld und elektrisches Potential

2.1.1 Das Konzept des elektrischen Feldes

In Kap. 1.3 haben wir eine Anordnung räumlich getrennter Ladungen mit dem Sonnensystem verglichen: die Ladung $Q > 0$ im Ursprung des Koordinatensystems entspricht der Sonne, und eine Testladung q im Abstand r entspricht einem Planeten. Diese Analogie ist naheliegend, weil die Gravitationskraft und die Coulomb-Kraft die gleiche mathematische Struktur haben: beide zeigen ein $1/r^2$ -Verhalten, und bei beiden ist die Kraft proportional zum Produkt charakteristischer Parameter der beiden Objekte, der Massen im Fall der Gravitation und der Ladungen im Fall der elektrischen Kraft.

Die Gravitationskraft zwischen den Himmelskörpern wurde von Isaac Newton als *instantane* Kraft interpretiert: egal wie weit die Körper voneinander entfernt sind, die Kraft zwischen ihnen sollte instantan (ohne Verzögerung) auf eine Veränderung des Abstandes reagieren. Dieses Verhalten wurde als Fernwirkung (*action at a distance*) bezeichnet und war ein schwer verständlicher Aspekt der Newton'schen Gravitationstheorie, den er heftig gegen Einwände seiner Zeitgenossen verteidigen musste. Newton brauchte diese instantane Fernwirkung, weil bei einer zeitlichen Verzögerung der Wirkung sein drittes Gesetz (*actio = reactio*) verletzt gewesen wäre.

Der Newton'schen Interpretation folgend könnte man das Prinzip der Fernwirkung auch auf die Coulomb-Kraft übertragen. Im 19. Jahrhundert wurde mit dem Begriff des *elektrischen Feldes* ein neues Konzept entwickelt. Die auf die Testladung q wirkende Kraft wird in der Form

$$\mathbf{F}_{\text{el}} = q \cdot \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \hat{\mathbf{r}} = q \mathbf{E} \quad (2.1)$$

geschrieben, und damit wird die elektrische Feldstärke als die Kraft pro Ladungseinheit definiert:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_{\text{el}}}{q} . \quad (2.2)$$

Auf diese Weise wird man unabhängig von der Größe und dem Vorzeichen der Testladung. Die Ladung Q erzeugt das elektrische Feld

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \hat{\mathbf{r}} , \quad (2.3)$$

und es ist dieses Feld, welches die Kraft auf die Testladung q ausübt. Mit anderen Worten: die Kraft auf die Testladung q wird nicht unmittelbar von der Ladung Q selbst ausgeübt, sondern vom elektrischen Feld am Ort der Testladung, und dieses Feld wiederum wird von der Ladung Q erzeugt.

Solange man es mit ruhenden Ladungen zu tun hat, sind die Newton'sche Fernwirkungstheorie und die Feldinterpretation äquivalent, und es gibt keine Experimente, die zugunsten der einen oder der anderen Deutung entscheiden könnten. Das Konzept des Feldes erweist sich jedoch als unumgänglich, sobald man zeitabhängige Vorgänge beschreiben möchte. Das Feld breitet sich nämlich mit einer endlichen Geschwindigkeit im Raum aus, der Lichtgeschwindigkeit $c = 2,9979 \cdot 10^8$ m/s. Wenn man die Ladung Q schnell bewegt, so wird die Testladung q die Änderung der Position von Q nicht sofort spüren, sondern erst nach einer Verzögerungszeit $t = r/c$, die die Feldänderung benötigt, um von der Ladung Q zur Ladung q zu gelangen. Das Bild der Fernwirkung versagt völlig bei der Beschreibung zeitabhängiger Vorgänge, z. B. bei der Abstrahlung eines Hertz'schen Dipols.

Es ist interessant anzumerken, dass das dritte Newton'sche Gesetz in der Feldtheorie dadurch „gerettet“ wird, dass das Feld selbst Energie und Impuls trägt. Die von einer beschleunigten Ladung Q ausgesandte elektromagnetische Welle besteht aus Photonen. Bei der Emission eines Photons wird auf die Ladung Q ein Rückstoßimpuls (recoil momentum) übertragen, und der Gesamtimpuls bleibt erhalten:

$$\mathbf{p}_{\text{recoil}} = -\mathbf{p}_{\text{photon}} , \quad \mathbf{p}_{\text{recoil}} + \mathbf{p}_{\text{photon}} = 0 . \quad (2.4)$$

Das Gleiche gilt für die Absorption des Photons durch die Ladung q . Dies ist eine sehr wichtige Erkenntnis: das dritte Newton-Gesetz *actio = reactio* (gleichbedeutend mit dem Impulserhaltungssatz) gilt *lokal* und nicht nur *global* als Konsequenz einer geheimnisvollen Fernwirkung. Die lokale Natur der Erhaltungssätze für Energie und Impuls ist für die Feynman-Graphen der Elementarteilchenphysik von großer Bedeutung, s. Kap. 8.4.2.

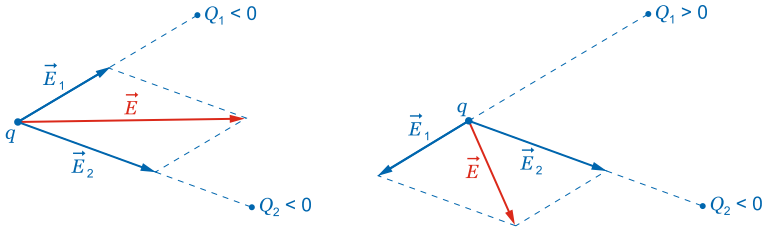


Abb. 2.1 Die von zwei Ladungen Q_1 und Q_2 erzeugten Felder werden vektoriell addiert

2.1.2 Das Superpositionsprinzip

In der Mechanik kennen wir die vektorielle Addition von Kräften. Die Erfahrung zeigt, dass dies Prinzip auf elektrische Kräfte und Felder übertragen werden darf. Gegeben seien also n Punktladungen $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$, die sich an den Orten $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$ befinden. Das resultierende elektrische Feld an einem Ort $\mathbf{r}$ berechnet man durch vektorielle Addition der Einzelfelder (s. Abb. 2.1)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^n \mathbf{E}_j(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^n \frac{Q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3}. \quad (2.5)$$

Die lineare Superposition ist in den meisten Fällen auch für elektrische Felder in Isolatoren gültig. Eine Ausnahme sind nichtlineare Medien, in denen die Permittivität ϵ_r eine Funktion des angelegten elektrischen Feldes ist. Dort bricht die lineare Superposition zusammen. In einem nichtlinearen Kristall kann durch Überlagerung von zwei elektromagnetischen Wellen unterschiedlicher Frequenzen ω_1 und ω_2 eine neue Welle mit der Summen- oder Differenzfrequenz $\omega_1 \pm \omega_2$ erzeugt werden. Dies ist in der Lasertechnologie von großer Bedeutung, man kann beispielsweise die Frequenz eines Lasers verdoppeln.

2.1.3 Elektrostatische Kräfte sind konservativ

In der Mechanik spielen *konservative Kräfte* eine wichtige Rolle. Eine Kraft wird konservativ genannt, wenn das Linienintegral der Kraft zwischen zwei Punkten im Raum unabhängig vom Verlauf des Integrationsweges zwischen diesen Punkten ist. Es ist dann möglich, eine potentielle Energie zu definieren, und für die Summe von kinetischer und potentieller Energie gilt ein Erhaltungssatz:

$$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \text{const}. \quad (2.6)$$

Die Erhaltung der gesamten mechanischen Energie ist die Motivation für die Bezeichnung „konservativ“.

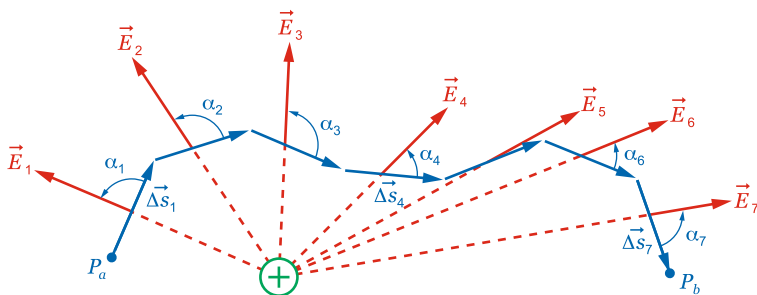


Abb. 2.2 Das Linienintegral des elektrischen Feldes einer Punktladung von einem Anfangspunkt P_a zu einem Endpunkt P_b . Ein beliebig geformter Weg lässt sich durch ein Polygon mit vielen kleinen Streckenabschnitten der Länge Δs approximieren. Auf der Teilstrecke j gilt $\vec{E}_j \cdot \Delta \vec{s}_j = |\vec{E}_j| \Delta s \cos \alpha_j$

Ein bekanntes Beispiel einer konservativen Kraft ist die Schwerkraft, die die Erde auf eine Masse m ausübt. Hebt ein Kran die Masse um die Höhe h an, so leistet er dabei die Arbeit $W = mgh$. Zieht man andererseits die Masse reibungsfrei eine schiefe Ebene mit Neigungswinkel α hinauf, so ist die Tangentialkomponente der Schwerkraft in Richtung des Weges $F_t = -mg \sin \alpha$, die Länge des Weges ist $s = h / \sin \alpha$, und die gegen die Tangentialkraft geleistete Arbeit $W = -F_t s$ hat wieder den Wert $W = mgh$. An diesem Beispiel erkennen wir das oben genannte Kriterium, welches eine konservative Kraft zu erfüllen hat: die geleistete Arbeit darf nicht vom Verlauf des Weges zwischen Anfangs- und Endpunkt abhängen.

Unser Ziel ist zu beweisen, dass elektrostatische Kräfte diesem Kriterium genügen. Bewegt man eine Ladung q in einem elektrischen Feld $\vec{E}(\vec{r})$ auf einer vorgewählten Raumkurve von einem Anfangspunkt $P_a = (x_a, y_a, z_a)$ zu einem Endpunkt $P_b = (x_b, y_b, z_b)$, so muss man die Arbeit

$$W = -q \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -q \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_j |\vec{E}_j| \cos \alpha_j \Delta s \quad (2.7)$$

aufwenden. Bei dem Linienintegral ist zu beachten, dass es auf die Komponente des elektrischen Feldvektors in Richtung des gewählten Weges ankommt. Mathematisch wird dies durch das Skalarprodukt $(\vec{E} \cdot d\vec{s})$ erfasst. Zur numerischen Berechnung wird die Wegkurve durch ein Polygon mit vielen kleinen Teilstrecken der Länge Δs approximiert (eine Illustration wird in Abb. 2.2 gezeigt). Auf jeder Teilstrecke ist $\vec{E}_j \cdot \Delta \vec{s}_j = |\vec{E}_j| \cos \alpha_j \Delta s$, wobei α_j der Winkel zwischen dem Feldvektor $\vec{E}_j$ und dem Vektor $\Delta \vec{s}_j$ ist. Man berechnet also die Tangentialkomponenten des Feldvektors entlang der Teilstrecken und summiert diese auf. Zum Schluss wird der Grenzwert $\Delta s \rightarrow 0$ gebildet. Für ein allgemeines elektrisches Feld sieht dies alles sehr kompliziert aus, wir werden aber eine Methode finden, das Problem wesentlich zu vereinfachen.

Statische Felder sind dadurch charakterisiert, dass die Feldlinien bei positiven Ladungen beginnen und bei negativen Ladungen enden. Wirbelfelder mit in sich

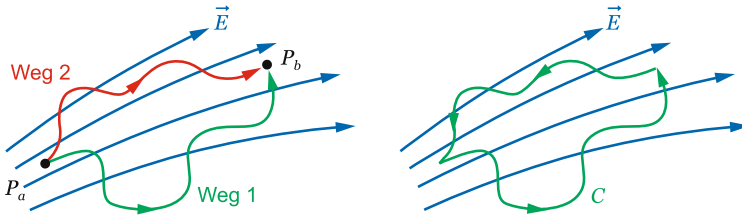


Abb. 2.3 Links: Zwei mögliche Wege vom Punkt P_a zum Punkt P_b . Rechts: Wenn man Weg 1 vorwärts durchläuft und Weg 2 rückwärts, so ergibt sich eine geschlossene Kurve C . Ein statisches elektrisches Feld ist wirbelfrei, und das Ringintegral über diese geschlossene Kurve ist null. Daraus folgt, dass das Linienintegral der elektrischen Feldstärke den gleichen Wert haben muss für Weg 1 und Weg 2

geschlossenen Feldlinien treten in der Elektrostatik nicht auf. Wirbelfreiheit im mathematischen Sinn bedeutet: das Ringintegral der Feldstärke über eine beliebige geschlossene Kurve C ist immer identisch null:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \equiv 0. \quad (2.8)$$

Wir beweisen diese Gleichung im nächsten Abschnitt. Es folgt daraus unmittelbar, dass das Linienintegral von einem Anfangspunkt P_a zu einem Endpunkt P_b unabhängig vom Weg zwischen diesen Punkten ist, s. Abb. 2.3.

$$\int_{W_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{W_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad (2.9)$$

1. Schritt: das Feld einer Punktladung ist wirbelfrei

Wir wollen zeigen, dass das Ringintegral (2.8) des Feldes einer Punktladung verschwindet. Die Feldlinien einer Punktladung $Q > 0$ zeigen radial nach außen. Daher bietet es sich an, zunächst Wege zu betrachten, die aus Kreisbögen bestehen (dort steht das Feld senkrecht auf dem Weg, und es ist $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$) sowie aus radialen Strecken (dort ist das Feld parallel oder antiparallel zum Weg und $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \pm E(r)dr$). Im linken Teil der Abb. 2.4 werden zwei dieser Wege gezeigt, die von einem Punkt P_a zu einem Punkt P_b führen. Auf dem ersten Weg W_1 wandert man zunächst auf einem Kreisbogen mit Radius r_a und dann radial nach außen von r_a nach r_b . Es gilt

$$\int_{W_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{r_a}^{r_b} E(r)dr.$$

Der zweite Weg W_2 hat eine Art Sägezahnstruktur und besteht aus einer abwechselnden Folge von kurzen Kreisbögen und radialen Abschnitten. Man sieht leicht, dass nur die radialen Abschnitte beitragen und das Linienintegral wie folgt berech-

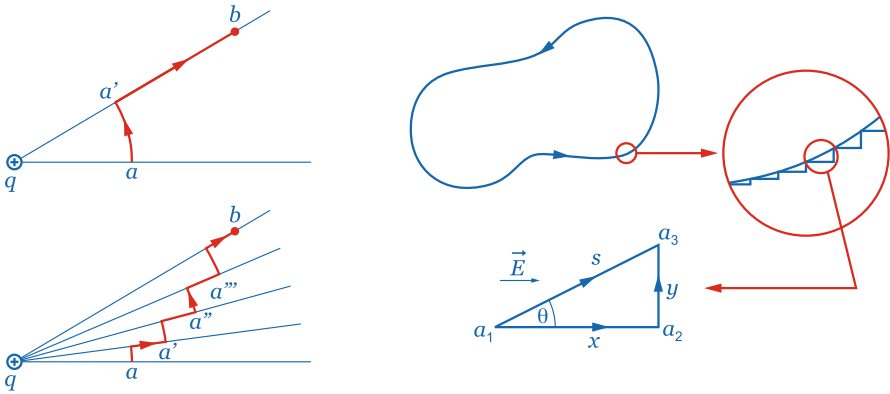


Abb. 2.4 Links: Zwei Wege vom Punkt a zum Punkt b , die aus Kreisbögen und radialen Abschnitten bestehen. Rechts: eine glatte geschlossene Kurve und ihre Approximation durch eine „Sägezahn-Kurve“, bestehend aus vielen sehr kurzen Kreisbögen und radialen Abschnitten. Eine vergrößerte Darstellung eines „Sägezahns“ wird gezeigt

net wird

$$\begin{aligned} \int_{W_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= \int_{r_a}^{r'} E(r) dr + \int_{r'}^{r''} E(r) dr + \int_{r''}^{r'''} E(r) dr + \int_{r'''}^{r_b} E(r) dr \\ &= \int_{r_a}^{r_b} E(r) dr \quad (\text{mit } r' = r_{a'}, r'' = r_{a''}, r''' = r_{a'''}). \end{aligned}$$

Die beiden Linienintegrale sind identisch. Wenn man Weg 1 vorwärts und Weg 2 rückwärts durchläuft, ergibt sich eine geschlossene Kurve C , für die das Kriterium (2.8) erfüllt ist.

Nun betrachten wir eine in sich geschlossene glatte Bahnkurve C . Diese Kurve können wir durch eine „Sägezahn-Kurve“ C' annähern (Abb. 2.4 rechts), und wie wir aus der vorhergehenden Betrachtung wissen, ist das Ringintegral über C' gleich null. Aber es muss bewiesen werden, dass das Ringintegral über die glatte Bahnkurve C denselben Wert hat. Wenn man sich das kleine Dreieck in Abb. 2.4 ansieht, so ist die Hypotenuse ein Ausschnitt aus der glatten Kurve C , und die Katheten gehören zur Sägezahn-Kurve C' . Für die Teilstrecken gilt

$$\int_{a_1}^{a_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = |\mathbf{E}| x, \quad \int_{a_2}^{a_3} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0, \quad \int_{a_1}^{a_3} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = (|\mathbf{E}| \cos \theta) s.$$

Wegen $x = s \cos \theta$ hat das Integral über die Hypotenuse den gleichen Wert wie die Summe der Integrale über die Katheten:

$$\int_{a_1}^{a_3} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{a_1}^{a_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \int_{a_2}^{a_3} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}.$$

Unser Ergebnis ist daher:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{C'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

für jede in sich geschlossene Kurve C . Das Feld einer Punktladung ist in der Tat wirbelfrei.

2. Schritt: ein beliebiges elektrostatisches Feld ist wirbelfrei

Elektrostatische Felder werden von ruhenden Ladungsverteilungen erzeugt, die wir uns aus Punktladungen zusammengesetzt denken können. Gegeben seien also n Ladungen $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$, die sich an den Orten $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$ befinden und deren Ladungsvorzeichen beliebig gewählt werden dürfen. Das resultierende elektrische Feld an einem Ort $\mathbf{r}$ ist nach dem Superpositionsprinzip gleich der Vektorsumme der Einzelfelder: $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_j \mathbf{E}_j(\mathbf{r})$. Berechnen wir das Ringintegral des resultierenden Feldes, so ergibt sich

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{s} + \oint_C \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{s} + \dots + \oint_C \mathbf{E}_n \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

Das Ringintegral des resultierenden Feldes verschwindet, weil das Feld jeder einzelnen Punktladung wirbelfrei ist, $\oint_C \mathbf{E}_j \cdot d\mathbf{s} = 0$. Daraus folgt: jedes elektrostatische Feld ist wirbelfrei.

2.1.4 Das elektrische Potential

In einem wirbelfreien Kraftfeld hängt das Linienintegral der Kraft nur vom Anfangs- und Endpunkt ab, nicht aber vom Verlauf und der Länge des Weges zwischen diesen Orten. Die potentielle Energie wird definiert durch die Gleichung

$$E_{\text{pot}}(\mathbf{r}) = E_{\text{pot}}(\mathbf{r}_a) - \int_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \quad (2.10)$$

Wichtig ist das Minuszeichen vor dem Integral: wir erhöhen die potentielle Energie eines Körpers, wenn wir ihn *entgegengesetzt* zur Richtung der Kraft bewegen, also z. B. seine Höhe h über dem Erdboden vergrößern. Diese potentielle Energie ist nur bis auf eine additive Konstante festgelegt. Auch das kennen wir aus der Mechanik: als Nullpunkt der potentiellen Energie einer Masse im Schwerfeld der Erde können wir den Meeresspiegel wählen, den Fußboden unseres Labors oder den Gipfel des Mont Blanc. Wir wählen einen geeigneten Anfangspunkt P_a mit Ortsvektor $\mathbf{r}_a = (x_a, y_a, z_a)$ und setzen den Wert $E_{\text{pot}}(\mathbf{r}_a)$ nach Belieben fest. Wegen der Wegunabhängigkeit des Integrals ist $E_{\text{pot}}(\mathbf{r})$ eine eindeutig definierte Funktion des variablen Endpunktes $\mathbf{r}$.

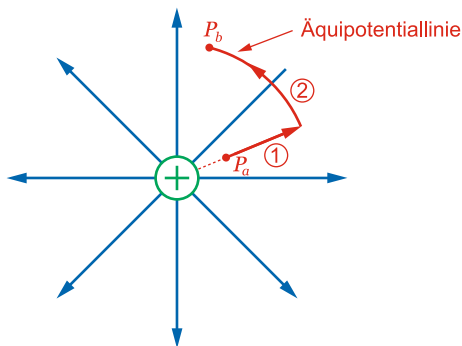


Abb. 2.5 Berechnung des elektrischen Potentials einer Punktladung. Auf dem Weg 1 ist $\mathbf{E}$ parallel zu $d\mathbf{s}$, und es gilt $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E(r)dr$. Auf dem Weg 2 steht $\mathbf{E}$ senkrecht auf $d\mathbf{s}$, d. h. $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$. Daher wird $\Phi_b - \Phi_a = - \int_{r_a}^{r_b} E(r)dr$

Denkt man speziell an die elektrische Kraft $\mathbf{F}_{el} = q \mathbf{E}$, so ist es zweckmäßig, die Testladung abzuspalten und die potentielle Energie in der Form zu schreiben

$$E_{\text{pot}}(\mathbf{r}) = q \Phi(\mathbf{r}) .$$

Man kommt damit zur Definition des elektrischen Potentials:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r}_a) - \int_{r_a}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} . \quad (2.11)$$

Im Unterschied zum Sprachgebrauch in der Mechanik ist das elektrische Potential keine Energie, sondern eine Energie pro Ladungseinheit. Die Dimension ist das Volt [V].

Potential einer Punktladung

Die Berechnungsmethode des Potentials einer Punktladung ist in Abb. 2.5 angedeutet. Um die Potentialdifferenz zwischen einem Punkt P_a und einem Punkt P_b zu berechnen, wird ein Weg gewählt, der aus einem radialen Abschnitt (1) und einem Kreisbogen (2) besteht. Auf der Strecke (1) ist das Feld parallel zum Weg ($\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E(r)dr$), und das Potential ändert sich wie folgt

$$\Delta\Phi = - \int_{r_a}^{r_b} E(r)dr = - \int_{r_a}^{r_b} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_b} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_a} .$$

Auf dem Kreisbogen (2) ist das Feld senkrecht zum Weg ($\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$), und das Potential bleibt konstant. Somit wird die Potentialdifferenz zwischen den Punkten P_a und P_b

$$\Delta\Phi = \Phi_b - \Phi_a = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_b} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_a} . \quad (2.12)$$

Die Gleichung (2.12) legt nur die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten im Raum fest, nicht den absoluten Wert des Potentials. Oft ist es zweckmäßig, $\Phi(r) = 0$ zu setzen im Limes $r \rightarrow \infty$. Dann ist das Potential einer Punktladung

$$\Phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} . \quad (2.13)$$

Potential einer Ladungsverteilung

Das Superpositionsprinzip kann benutzt werden, um das Potential einer Ladungsverteilung zu berechnen. Für n Punktladungen $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$, die sich an den Orten $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$ befinden, gilt

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^n \Phi_j(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^n \frac{Q_j}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} . \quad (2.14)$$

Bei einer kontinuierlichen Ladungsverteilung mit der Ladungsdichte ρ (Ladung pro Volumeneinheit) wird daraus

$$\Phi(\mathbf{r}) = \iiint \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' . \quad (2.15)$$

2.1.5 Äquipotentialflächen und Gradient

Äquipotentialflächen

Unter einer *Äquipotentialfläche* versteht man eine Fläche im Raum, auf der das elektrische Potential konstant ist. Wenn keine Ströme fließen, ist die Oberfläche eines elektrischen Leiters wie Kupfer immer eine Äquipotentialfläche. In einer zweidimensionalen Darstellung erscheinen die Äquipotentialflächen als Äquipotentiallinien. Ein Beispiel für die Äquipotentiallinien in der Nähe einer metallischen Spitze zeigen wir in Abb. 2.6. Die elektrischen Feldlinien stehen immer senkrecht auf den Äquipotentialflächen.

Das elektrische Feld als negativer Gradient des Potentials

In Anhang A wird folgendes Theorem bewiesen:

1. Ein Vektorfeld, bei dem das Linienintegral stets unabhängig vom Weg ist, kann als Gradient eines skalaren Feldes dargestellt werden.
2. Das Linienintegral eines Gradientenfeldes ist unabhängig von Verlauf und Länge des Weges zwischen beliebigen gewählten Anfangs- und Endpunkten.

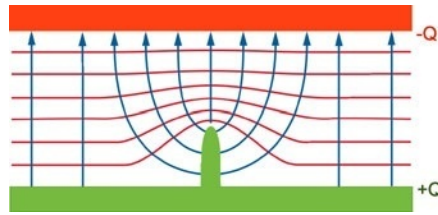


Abb. 2.6 Ein Plattenkondensator mit einer metallischen Spitze auf der positiv geladenen Platte. Der Verlauf der Äquipotentiallinien (rot) und der elektrischen Feldlinien (blau) wird schematisch gezeigt

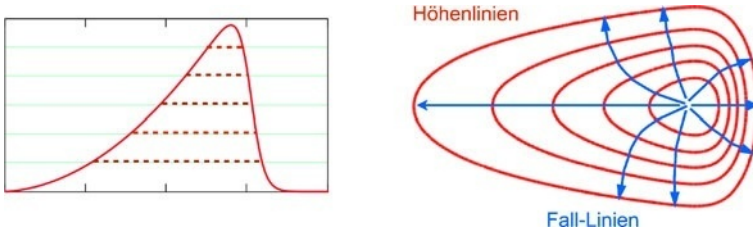


Abb. 2.7 Links: Längsschnitt eines Berges mit flacher Anstiegsflanke und steiler Abfallflanke. Rechts: Darstellung dieses Berges auf einer Wanderkarte. Die Linien konstanter Höhe (rote Kurven) entsprechen den Äquipotentiallinien des Coulomb-Potentials. Der negative Gradient definiert die Fall-Linien, d. h. die Richtung des stärksten Gefälles. Im elektrischen Analogon zeigen die blauen Linien die Richtung des elektrischen Feldes an

Nun haben wir in Kap. 2.1.3 gezeigt, dass ein statisches (zeitlich konstantes) elektrisches Feld wegunabhängige Linienintegrale hat. Deswegen kann es als negativer Gradient des elektrischen Potentials geschrieben werden:

$$\boxed{E = -\text{grad } \Phi \equiv -\nabla \Phi .} \quad (2.16)$$

Zur Erinnerung: das negative Vorzeichen wird gewählt, damit – wie in der Mechanik – die Kraft der negative Gradient der potentiellen Energie ist. Die Vektorgleichung (2.16) hat drei Komponenten

$$E_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} , \quad E_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} , \quad E_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} . \quad (2.17)$$

Der negative Gradient des Potentials, $-\nabla \Phi$, ist ein Vektor, der die Richtung des steilsten Gefälles angibt und senkrecht auf der Äquipotentialfläche steht.

Die Analogie zur Mechanik wird in Abb. 2.7 verdeutlicht. Links wird der Längsschnitt eines Berges mit flacher Anstiegsflanke und steiler Abfallflanke gezeigt, rechts die Linien konstanter Höhe, wie sie auf einer Wanderkarte zu finden sind. Im elektrischen Analogon entsprechen die Höhenlinien den Äquipotentiallinien, und die darauf senkrechten Fall-Linien entsprechen den elektrischen Feldlinien.

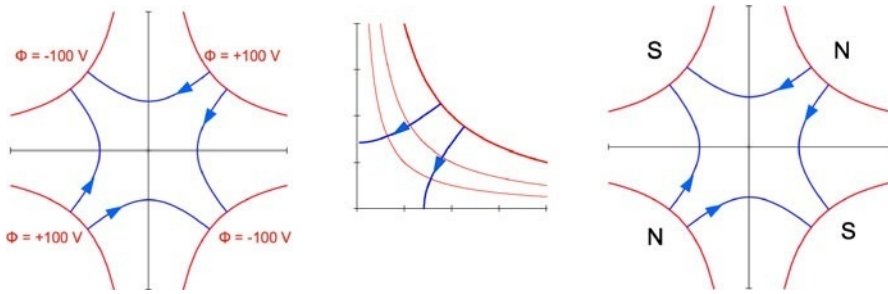


Abb. 2.8 Links und Mitte: ein elektrisches Quadrupolfeld wird durch vier hyperbolische Elektroden erzeugt (rote Kurven), an die man abwechselnd ein Potential von $+U_0$ und $-U_0$ legt (hier ist $U_0 = 100 \text{ V}$). Vier ausgewählte Feldlinien werden gezeigt (blaue Kurven). Im mittleren Teilbild werden auch noch die Äquipotentiallinien $\Phi(x, y) = +50 \text{ V}$ und $\Phi(x, y) = +25 \text{ V}$ gezeigt. Rechts: ein Quadrupolmagnet

Anwendungsbeispiel: elektrisches Quadrupolfeld

Potential und Feld eines elektrischen Quadrupols werden durch folgende Gleichungen beschrieben:

$$\Phi(x, y) = gxy, \quad E_x(x, y) = -gy, \quad E_y(x, y) = -gx. \quad (2.18)$$

Das Potential ist hier unabhängig von z . Die Äquipotentiallinien sind die Hyperbeln $xy = \text{const}$, die elektrischen Feldlinien sind ebenfalls Hyperbeln und werden durch die Gleichung $x^2 - y^2 = a^2$ beschrieben, wobei a eine Konstante ist. Eine Darstellung wird in Abb. 2.8 gezeigt.

Wenn man die Elektroden durch hyperbolisch geformte Eisenpolschuhe ersetzt, zwischen denen Spulen angebracht sind, erhält man einen Quadrupolmagneten, der in Beschleunigern eine wichtige Funktion hat und zur Fokussierung des Teilchenstrahls gebraucht wird. Das Magnetfeld eines Quadrupols hat die Form $B_x(x, y) = -gy$, $B_y(x, y) = -gx$. Die Konstante g ist der Feldgradient, die Dimension ist $[\text{T/m}]$. In supraleitenden Quadrupolen muss man auf das Eisenjoch verzichten, da es bei den gewünschten hohen Feldstärken in Sättigung geht. Dort erzeugt man das Quadrupolfeld durch geeignet geformte Spulen (siehe [7]).

2.2 Integralsatz von Gauß, Divergenz eines Vektorfeldes

2.2.1 Gauß-Satz für elektrische und magnetische Felder

Der Gauß'sche Integralsatz macht eine Aussage über die Dichte der elektrischen oder magnetischen Feldlinien. Wir werden uns dafür mit dem Fluss der elektrischen oder magnetischen Feldstärke beschäftigen. Der Begriff Fluss hat eine anschauliche

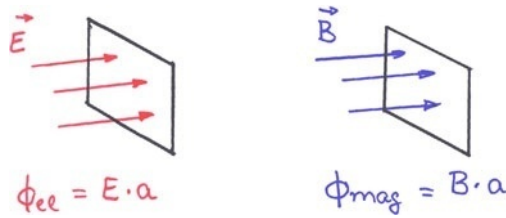


Abb. 2.9 Der Fluss der elektrischen und magnetischen Feldstärke durch ein Rechteck der Fläche a , das senkrecht zum Feld orientiert ist, $(\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}) = |\mathbf{E}|$

Bedeutung für strömendes Wasser, wir können damit das Flüssigkeitsvolumen charakterisieren, das pro Zeiteinheit durch eine Öffnung fließt. Stellen wir uns gleichmäßig strömendes Wasser vor, in das wir einen Drahtrahmen der Fläche (area) a halten. Die pro Sekunde hindurchfließende Wassermenge ist proportional zur Massendichte ρ_m , zur Geschwindigkeit v und zur Fläche a

$$\phi = \rho_m v \cdot a .$$

Dies gilt allerdings nur, wenn der Rahmen senkrecht zur Strömung orientiert ist. Verdreht man den Rahmen um einen Winkel α , so reduziert sich die effektive Querschnittsfläche auf $a \cos \alpha$, und der Fluss wird

$$\phi = \rho_m v a \cos \alpha = \rho_m (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}) a . \quad (2.19)$$

Dabei ist $\hat{\mathbf{n}}$ die sog. Flächennormale, ein Einheitsvektor, der senkrecht auf der Fläche steht. Will man den Fluss durch eine größere, möglicherweise gekrümmte Fläche berechnen, so unterteilt man die Fläche in viele kleine Segmente der Größe Δa und summiert über den Fluss durch diese Segmente:

$$\phi = \rho_m \sum_j (\mathbf{v}_j \cdot \hat{\mathbf{n}}_j) \Delta a .$$

Im Limes $\Delta a \rightarrow 0$ wird daraus eine Integration über die Fläche:

$$\phi = \rho_m \iint (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}) da .$$

Der elektrische und der magnetische Fluss (Abb. 2.9) sind Verallgemeinerungen dieses Konzepts:

$$\phi_{el} = \iint (\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}) da , \quad \phi_{mag} = \iint (\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}) da . \quad (2.20)$$

In diesen Fällen findet natürlich kein Materiefluss statt. Insbesondere ist mit dem Fluss ϕ_{el} kein Ladungstransport gemeint.

Die Aussage des Integralsatzes von Gauß für elektrische Felder ist: der Fluss der elektrischen Feldstärke durch eine geschlossene Oberfläche ist gleich der im

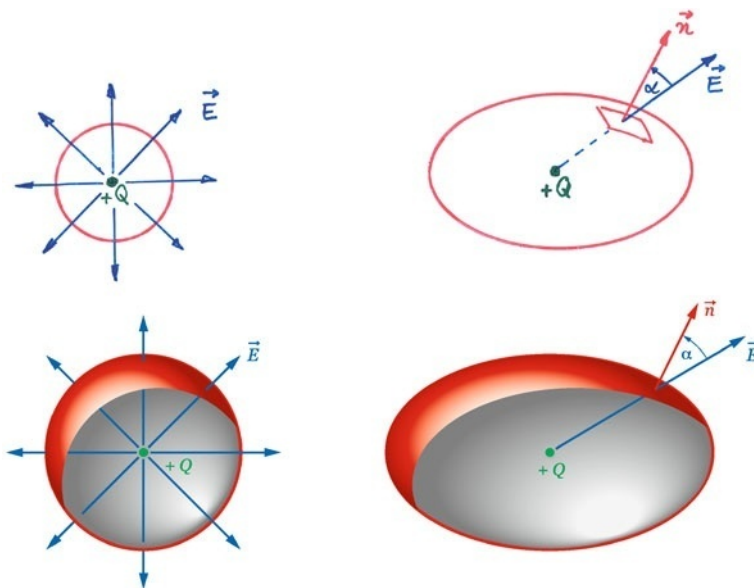


Abb. 2.10 Der Fluss der elektrischen Feldstärke durch die Oberfläche einer Kugel und eines Ellipsoids

Innern befindlichen Ladung Q_{in} , dividiert durch die elektrische Feldkonstante. Für magnetische Felder ist der Fluss durch eine geschlossene Oberfläche identisch null.

$$\boxed{\phi_{\text{el}} = \oint (\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}) da = \frac{Q_{\text{in}}}{\epsilon_0}, \quad \phi_{\text{mag}} = \oint (\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}) da = 0.} \quad (2.21)$$

Die Flächennormale $\hat{\mathbf{n}}$ ist ein Einheitsvektor, der senkrecht auf dem Flächenelement da steht und nach außen weist. Der Kreis im Doppelintegral deutet an, dass die Integration über eine geschlossene Oberfläche erfolgt.

2.2.2 Beweis des Gauß'schen Satzes

Beweis des Gauß-Satzes für eine Punktladung

Der Satz (2.21) ist für eine Punktladung $Q > 0$ leicht zu beweisen, wenn man als geschlossene Fläche eine um die Ladung konzentrische Kugelfläche mit Radius r wählt, s. Abb. 2.10. Das elektrische Feld hat auf der Kugeloberfläche überall den gleichen Wert

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

und ist radial nach außen gerichtet. Das bedeutet $\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} = E(r)$ und

$$\phi_{\text{el}} = \oint (\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}) da = \oint \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} r^2 d\Omega = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oint d\Omega = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

da das Integral über $d\Omega$ die Oberfläche der Einheitskugel (der Kugel mit Radius 1) ergibt:

$$\oint d\Omega = 4\pi.$$

Bei einer beliebigen geschlossenen Oberfläche ist der elektrische Vektor $\mathbf{E}$ an den meisten Stellen nicht parallel zur Flächennormalen. Als Beispiel betrachten wir ein Ellipsoid, siehe Abb. 2.10. Wählen wir uns ein Flächenelement da aus, so ist $(\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}) = |\mathbf{E}| \cos \alpha$. Der dem Flächenelement da entsprechende Raumwinkel ist $d\Omega = da \cos \alpha / r^2$. Der Cosinus des Neigungswinkels kürzt sich heraus:

$$\begin{aligned} (\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}) da &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\cos \alpha}{r^2} \cdot \left(r^2 \frac{d\Omega}{\cos \alpha} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega, \\ \Rightarrow \phi_{\text{el}} &= \oint (\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}) da = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{Q}{\epsilon_0}. \end{aligned}$$

Damit ist demonstriert, dass der Gauß'sche Satz auch für ein Ellipsoid gültig ist. Es kostet etwas Mühe, den Satz (2.21) für komplizierter geformte geschlossene Oberflächen zu beweisen. Nützliche Diskussionen hierzu findet man in den Feynman-Vorlesungen Band II, Kap. 4–5 [2] und im Berkeley Physics Course Band 2 [6].

Beweis des Gauß-Satzes für Ladungsverteilungen

Nun nehmen wir an, dass sich in dem betrachteten Volumen viele Ladungen Q_j befinden. Nach dem Superpositionsprinzip berechnen wir das Gesamtfeld durch Addition der Einzelfelder gemäß Gl. (2.5)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_j \mathbf{E}_j(\mathbf{r}) = \sum_j \frac{Q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3}.$$

Der Fluss des Gesamtfeldes ist

$$\begin{aligned} \phi_{\text{ges}} &= \oint (\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}) da = \oint \left[\sum_j (\mathbf{E}_j \cdot \hat{\mathbf{n}}) \right] da = \sum_j \left[\oint (\mathbf{E}_j \cdot \hat{\mathbf{n}}) da \right] \\ &= \sum_j \phi_j = \sum_j \frac{Q_j}{\epsilon_0} = \frac{Q_{\text{ges}}}{\epsilon_0}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Hier haben wir benutzt, dass man Integral- und Summenzeichen vertauschen darf. Der elektrische Fluss des Gesamtfeldes ist gleich der Summe der Flüsse der Einzelfelder (Abb. 2.11). Das bedeutet: man kann alle Ladungen innerhalb des Volumens zu einer Gesamtladung $Q_{\text{ges}} = \sum_j Q_j$ zusammenfassen und den elektrischen Fluss des Gesamtfeldes als $Q_{\text{ges}}/\epsilon_0$ schreiben.

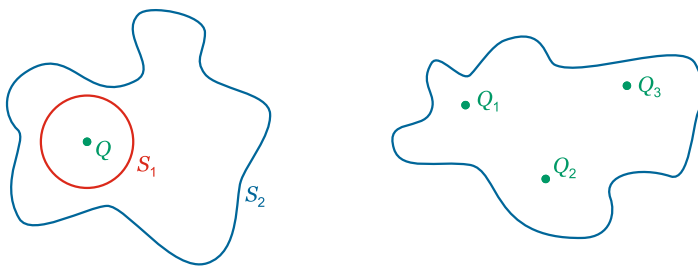


Abb. 2.11 Der Fluss der elektrischen Feldstärke durch eine Kugelfläche S_1 ist gleich dem Fluss durch eine beliebig geformte geschlossene Oberfläche S_2 . Befinden sich mehrere Ladungen innerhalb der geschlossenen Oberfläche, so addiert man die Flüsse



Abb. 2.12 Bei einem elektrischen oder magnetischen Dipol ist der Fluss durch eine geschlossene Oberfläche null

Befinden sich im Volumen V eine positive Ladung $+Q$ und eine gleich große negative Ladung $-Q$, so ist die Gesamtladung null, und der elektrische Fluss durch die geschlossene Oberfläche verschwindet (Abb. 2.12). Man kann es auch so ausdrücken: der nach außen gerichtete elektrische Fluss der Ladung $+Q$ und der nach innen gerichtete elektrische Fluss der Ladung $-Q$ heben sich exakt auf, so dass das Integral (2.21) null wird.

Der Fluss der magnetischen Feldstärke durch eine geschlossene Oberfläche ist grundsätzlich null, da es keine magnetischen Einzelladungen sondern nur Dipole gibt und die magnetische Gesamtladung daher immer null ist.

2.2.3 Divergenz des elektrischen (magnetischen) Feldes

Für kontinuierliche Ladungsverteilungen kann der Gauß'sche Satz in eine differentielle Form umgeschrieben werden. Dazu wird das Oberflächenintegral in Gl. (2.21) mit Hilfe des Divergenztheorems (A.21) in ein Volumenintegral über die Divergenz des elektrischen Feldes umgeformt, und die im Volumen V enthaltene Ladung Q_{in} schreibt man als Volumenintegral über die Ladungsdichte

$$\oint_S (\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}) da = \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) dV, \quad Q_{\text{in}} = \iiint_V \rho dV. \quad (2.23)$$

Die Kombination dieser beiden Gleichungen mit Gl. (2.21) ergibt

$$\iiint_V \left(\nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0} \right) dV = 0 .$$

Dieses Integral verschwindet für Volumina beliebiger Form und Größe. Wählt man speziell ein infinitesimal kleines Volumen ΔV , so sieht man unmittelbar, dass der Integrand identisch null sein muss. Daraus folgt:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} \equiv \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} .$$

Da die magnetische Ladungsdichte immer null ist, folgt analog

$$\operatorname{div} \mathbf{B} \equiv \nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 .$$

Wir kommen damit zu zwei Grundgleichungen der Elektrodynamik, der ersten und zweiten Maxwell'schen Gleichung:

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} , \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 .} \quad (2.24)$$

2.3 Anwendungen des Satzes von Gauß

2.3.1 Kugelsymmetrie

Der Gauß'sche Satz ist für beliebige Geometrien gültig, aber leicht auszuwerten ist er nur, wenn Symmetrien vorliegen. Zunächst betrachten wir die Kugelsymmetrie, im Anschluss daran die Zylinder- und Flächensymmetrie.

Massive Metallkugel

Wir betrachten eine Metallkugel vom Radius R , auf deren Oberfläche eine Ladung $Q > 0$ gleichmäßig verteilt ist. Das elektrische Feld zeigt radial nach außen, und der Fluss durch eine konzentrische Kugelfläche mit Radius $r > R$ ist derselbe wie bei einer Punktladung

$$\phi_{\text{el}} = \oint (\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}) da = E(r) 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} .$$

Das Feld und das Potential der Kugel haben also im Außenraum genau die gleiche mathematische Form wie bei einer Punktladung

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad \Phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{für } r \geq R. \quad (2.25)$$

Wie sieht es aber für $r \leq R$, also im Innern der Kugel aus? Wir behaupten, dass das Feld im Innern einer massiven Metallkugel immer null sein muss, sofern keine Ströme fließen. Wenn sich keine Ladung innerhalb der Kugel befindet, ist das Feld sicher identisch null. Wir machen also die Annahme, es gäbe eine interne Ladung Q' . Konzentrisch um diese Ladung denken wir uns eine kleine Kugel mit Radius $r \ll R$, die vollständig innerhalb der Metallkugel liegt. Auf der Oberfläche der kleinen Kugel existiert dann ein Feld $E'(r) = Q'/(4\pi\epsilon_0 r^2)$. Dieses Feld im Innern eines elektrischen Leiters hat einen Strom zur Folge, der die Ladung Q' abbaut und dadurch das innere Feld schnell zum Verschwinden bringt. Generell kann man sagen, dass im stationären, stromfreien Fall das Innere eines elektrischen Leiters feldfrei sein muss.

Metallische Hohlkugel

Unser nächstes Beispiel ist eine metallische Hohlkugel, in deren Zentrum sich eine Ladung $Q > 0$ befindet. Die von Q ausgehenden Feldlinien enden auf der Innenfläche der Hohlkugel. Dort wird sich eine negative Ladungsdichte mit der Gesamtladung $-Q$ einstellen. Auf der äußeren Oberfläche der Hohlkugel schließlich findet man eine gleichförmig verteilte positive Ladungsdichte mit der Gesamtladung $+Q$, s. Abb. 2.13. Anwendung des Gauß'schen Satzes zeigt: das Feld im inneren Hohlraum und das Feld außerhalb der Kugel haben beide die Form des Feldes einer positiven Punktladung, nämlich $Q/(4\pi\epsilon_0 r^2)$. Das Feld innerhalb des Metalls ist null.

Der Faraday-Käfig

Unser nächstes Beispiel ist ein metallischer Hohlkörper, in dessen Innenraum keine Ladung vorhanden ist. Wir behaupten, dass das elektrische Feld im Innern identisch null sein muss. Nehmen wir an, es gäbe ein solches Feld, so müsste es bei positiven Ladungen auf der inneren Oberfläche beginnen und bei negativen Ladungen auf der inneren Oberfläche enden. Dann könnten wir einen geschlossenen Weg C definieren, der im Hohlraum entlang der Feldlinien verläuft und durch das Metall zurückkehrt. Da im Metall $\mathbf{E} \equiv 0$ ist, würde das Ringintegral des elektrischen Feldes ungleich null sein, im Widerspruch zur Wirbelfreiheit elektrostatischer Felder. Wir haben damit den wichtigen Satz bewiesen: im Innern eines leitenden Hohlkörpers, in dem sich keine Ladungen befinden, ist das elektrische Feld immer null, und das elektrische Potential ist konstant. Das ist das Prinzip des Faraday-Käfigs.

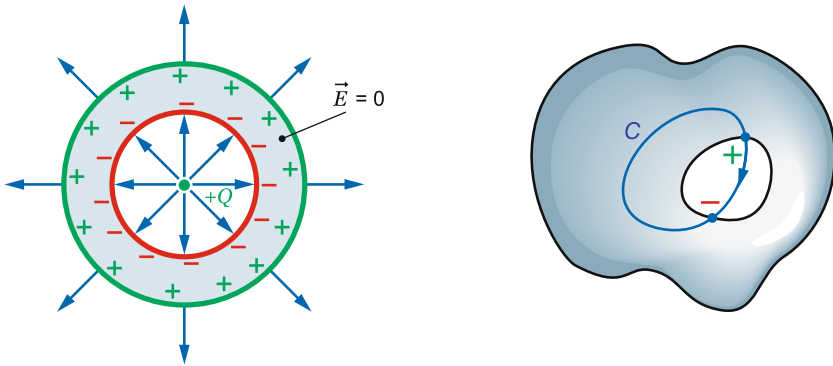


Abb. 2.13 Links: Elektrisches Feld einer metallischen Hohlkugel, in deren Zentrum sich eine Ladung $Q > 0$ befindet. Rechts: Hypothetische Ladungen $\pm q$ auf der Innenfläche eines metallischen Hohlkörpers

Die Käfigwand muss nicht komplett dicht sein, oft reicht ein Käfig aus Maschenendraht. Im Deutschen Museum in München gibt es eindrucksvolle Vorführungen, wie ein solcher Käfig einen Menschen bei Hochspannungsüberschlägen schützt. Bei Gewitter wirkt ein Auto als guter Faraday-Käfig, obwohl die Fenster nichtleitend sind. Man sollte vermeiden, den Arm aus dem Fenster zu halten, denn der wäre durch den Faraday-Käfig nicht geschützt.

Homogen geladene Kugel

Eine Metallkugel ist homogen mit Masse gefüllt und hat überall die gleiche Masendichte. Ist es möglich, eine Kugel homogen mit elektrischer Ladung zu füllen, so dass die elektrische Ladungsdichte ρ überall ungleich null ist? Dies erweist sich als ziemlich problematisch. Es kann sich dabei nicht um eine Metallkugel handeln, denn diese darf keine Ladung im Innern enthalten, wie wir oben gesehen haben. Eine gute Approximation einer homogen geladenen Kugel ist ein schwerer Atomkern. Ein Bleikern hat 82 Protonen und 126 Neutronen und ist in sehr guter Näherung kugelsymmetrisch. Die elektrische Ladung ist $Q = +82e$ und die Ladungsdichte

$$\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

ist im Innern des Kerns nahezu konstant und fällt am Rand stetig auf null ab. Außerhalb des Kerns ($r > R$) haben das elektrische Feld und das Potential genau dieselbe Form wie bei einer Punktladung. Nach Gl. (2.25) gilt

$$E_a(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}, \quad \Phi_a(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{für } r > R. \quad (2.26)$$

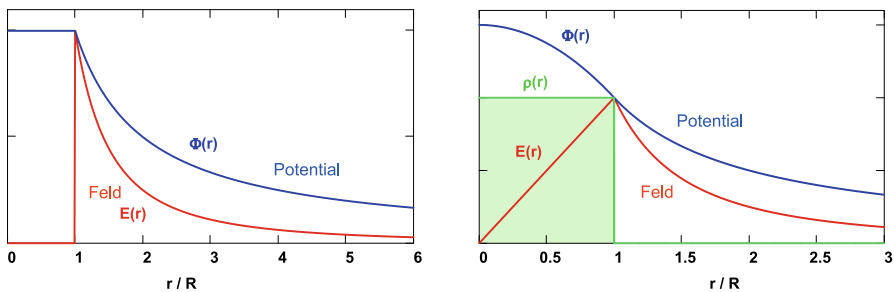


Abb. 2.14 Links: Elektrische Feldstärke $E(r)$ und Potential $\Phi(r)$ einer Hohlkugel mit einer Oberflächenladung Q . Im Innern ist $E(r) = 0$ und $\Phi(r) = \text{const.}$ Rechts: Ladungsdichte $\rho(r)$, elektrische Feldstärke $E(r)$ und Potential $\Phi(r)$ innerhalb und außerhalb einer homogen geladenen Vollkugel

Das elektrische Feld im Innern berechnen wir ebenfalls mit dem Satz von Gauß. Eine gedachte Kugel mit Radius $r < R$ enthält die Ladung

$$Q(r) = \frac{4\pi r^3}{3} \rho = Q \frac{r^3}{R^3},$$

und das Feld wird

$$E_i(r) = \frac{Q(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \cdot r \quad \text{für } r < R. \quad (2.27)$$

Das Feld ist radial nach außen gerichtet und wächst linear mit dem Radius an. Das Potential im Kern findet man durch Integration des Feldes

$$\Phi_i(r) = - \int E_i(r) dr = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \frac{r^2}{2} + \text{const.}$$

Die Integrationskonstante ergibt sich aus der Stetigkeit des Potentials bei $r = R$:

$$\Phi_i(R) = \Phi_a(R) \Rightarrow \text{const} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \frac{3R^2}{2}.$$

Somit wird

$$\Phi_i(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \cdot \frac{1}{2} (3R^2 - r^2) \quad \text{für } r < R. \quad (2.28)$$

Feld und Potential einer geladenen Hohlkugel und einer homogen geladenen Kugel werden in Abb. 2.14 verglichen.

Feldüberhöhungen an Spitzen, Feldemission

Wir betrachten eine Metallkugel vom Radius R , auf deren Oberfläche sich eine Ladung Q befindet. Dann sind das Potential und die Feldstärke an der Oberfläche durch Gl. (2.25) gegeben:

$$\Phi(R) \equiv \Phi_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}, \quad E(R) \equiv E_0 = \frac{\Phi_0}{R}.$$

Nun nehmen wir an, auf der Oberfläche befinde sich eine kleine scharfe Spitze, die wir als Kugel mit einem lokalen Krümmungsradius $r \ll R$ approximieren. Wie wir wissen, ist die Oberfläche eines Metalls im stromlosen Fall eine Äquipotentialfläche. Daher gilt für das Potential auf der Spitze: $\Phi_{\text{Spitze}} = \Phi_0$. Daraus folgt für die Feldstärke auf der Spitze

$$E_{\text{Spitze}} = \frac{\Phi_{\text{Spitze}}}{r} = E_0 \frac{R}{r}. \quad (2.29)$$

An Spitzen ist die elektrische Feldstärke um den Faktor R/r überhöht, der sehr groß werden und Werte von 10^6 annehmen kann. Die lokale Feldstärke kann so groß werden, dass durch den Tunneleffekt Elektronen aus dem Metall in das Vakuum oder die Luft austreten können. Diesen Vorgang nennt man Feldemission. Sie ist die Grundlage des Rastertunnelmikroskops.

2.3.2 Zylindersymmetrie

Das Feld eines runden Metallzylinders oder Rohrs, auf dessen Oberfläche eine Ladung $Q > 0$ gleichmäßig verteilt ist, lässt sich ebenfalls leicht mit dem Gauß-Satz berechnen. Sei r_1 der Radius und $l \gg r_1$ die Länge des Zylinders. Als Zylinderachse wählen wir die z -Achse. Aus Symmetriegründen ist das elektrische Feld radial nach außen gerichtet. Der elektrische Fluss durch eine zylindrische Fläche mit Radius $r > r_1$ ist

$$\phi_{\text{el}} = \oiint (\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}) da = E_r(r) \cdot 2\pi r l = Q/\epsilon_0.$$

Daraus folgt für das radiale Feld

$$E_r(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l r} \quad \text{für } r \geq r_1. \quad (2.30)$$

Hier ist $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ der Abstand von der Achse. Für $r \geq r_1$ hat das Feld eines geladenen Zylinders exakt die gleiche Form wie das Feld einer infinitesimal dünnen Linienladung. Innerhalb eines Zylinders oder Metallrohres ist das Feld null aus den gleichen Gründen wie bei einer metallischen Voll- oder Hohlkugel.

Der Zylinderkondensator

Der Zylinderkondensator besteht aus einem inneren Metallzylinder mit Länge l und Radius r_1 (dies könnte ein runder Kupferdraht sein) und einem Außenrohr mit Radius r_2 . Wir bringen auf den Innenleiter eine Ladung $+Q > 0$ und auf den Außenleiter eine Ladung $-Q$ (diese Ladung befindet sich auf der Innenfläche des Rohres). Für Abstände $r > r_2$ ist das elektrische Feld null, denn innerhalb einer zylindrischen Fläche mit diesem Radius befinden sich die Ladungen $+Q$ und $-Q$, d. h. die Gesamtladung ist null. Zum Feld im Zwischenbereich $r_1 \leq r \leq r_2$ trägt nur die innere Ladung $+Q$ bei, das Feld hat gemäß (2.30) den Wert

$$E_r(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l r} \quad \text{für } r_1 \leq r \leq r_2.$$

Die Spannung zwischen Innen- und Außenleiter ist

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E_r(r) dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \ln(r_2/r_1). \quad (2.31)$$

Die Kapazität ist

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln(r_2/r_1)}.$$

Befindet sich ein Dielektrikum zwischen Innen- und Außenleiter, so wird die Kapazität des Zylinderkondensators

$$C = \frac{2\pi\epsilon_r\epsilon_0 l}{\ln(r_2/r_1)}. \quad (2.32)$$

Feld eines Teilchenstrahls

Es ist möglich, Protonenstrahlen in einem Beschleuniger zu erzeugen, die annähernd zylindersymmetrisch sind und eine konstante Ladungsdichte haben. Das Feld außerhalb des Strahls (der Radius sei R) wird durch Gl. (2.30) beschrieben. Das Feld innerhalb des Strahls finden wir durch Anwenden des Gauß-Satzes auf einen gedachten Zylinder mit Radius $r < R$. Die Ladung in diesem Zylinder ist $Q(r) = Q r^2/R^2$, und daher wird

$$\begin{aligned} E_r(r) &= \frac{Q(r)}{2\pi\epsilon_0 l r} = \frac{\lambda_p}{2\pi\epsilon_0 R^2} \cdot r \quad \text{für } r < R \\ E_r(r) &= \frac{\lambda_p}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \quad \text{für } r \geq R. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Dabei ist $\lambda_p = Q/l$ die positive Linienladungsdichte (Ladung pro Meter). Das radiale Feld wächst linear mit dem Abstand $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ von der Achse bis zum Rand an und fällt danach mit $1/r$ ab. Das innere Feld übt auf jedes Proton eine radial nach außen gerichtete Kraft aus. Sie führt zu einer Aufweitung des Strahls

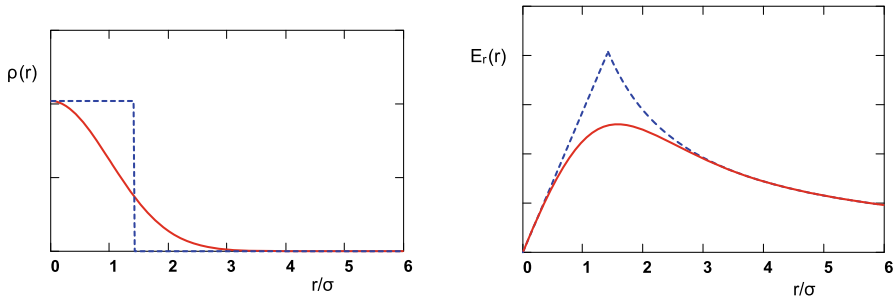


Abb. 2.15 Durchgezogene rote Kurven: Ladungsdichte $\rho(r)$ und radiales elektrisches Feld $E_r(r)$ eines Positronenstrahls mit gaußförmiger Ladungsverteilung. Gestrichelte blaue Kurven: Ladungsdichte und radiales elektrisches Feld eines Protonenstrahls mit homogener Ladungsverteilung

und wirkt somit defokussierend. Diese sog. Raumladungskraft ist ein ernsthaftes Problem in intensiven Teilchenstrahlen. Man kann sie nur teilweise durch fokussierende äußere Magnetfelder kompensieren. Bei hochrelativistischen Teilchen werden die abstoßenden Coulomb-Kräfte zum großen Teil durch anziehende Lorentzkräfte kompensiert (parallele Ströme ziehen sich an). Darauf gehen wir in Kap. 7.4 ein.

In Elektron-Positron-Speicherringen haben die Strahlen keine homogene, sondern eine gaußförmige Dichteverteilung. Die positive Ladungsdichte in einem Positronenstrahl kann man durch das Produkt von zwei Gaußfunktionen beschreiben.

$$\rho_p(x, y) = \lambda_p \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right).$$

Zur Vereinfachung nehmen wir gleiche Varianzen an (in Wahrheit hat der Strahl einen elliptischen Querschnitt, die Höhe beträgt nur wenige Prozent der Breite) und können dann schreiben

$$\rho_p(r) = \frac{\lambda_p}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right). \quad (2.34)$$

Um das Feld zu berechnen, wird wieder der Gauß'sche Satz auf einen Zylinder mit Länge l und Radius r angewandt. Die Ladung innerhalb des Zylinders ist

$$Q_{\text{in}} = l \int_0^r \rho_p(r') 2\pi r' dr' = \frac{\lambda_p l}{\sigma^2} \int_0^r e^{-\frac{r'^2}{2\sigma^2}} r' dr' = \lambda_p l \left(1 - e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\right).$$

Die Feldstärke folgt aus der Gleichung $E_r(r)2\pi r l = Q_{\text{in}}/\epsilon_0$:

$$E_r(r) = \frac{\lambda_p}{2\pi\epsilon_0 r} \left(1 - \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)\right). \quad (2.35)$$

Für $0 \leq r \leq 0,8\sigma$ wächst das Feld linear mit r an, für $r > 2,5\sigma$ fällt es mit $1/r$ ab. In Abb. 2.15 werden die elektrischen Felder eines homogen geladenen Strahls und eines gaußförmigen Strahls gleicher Ladung verglichen.

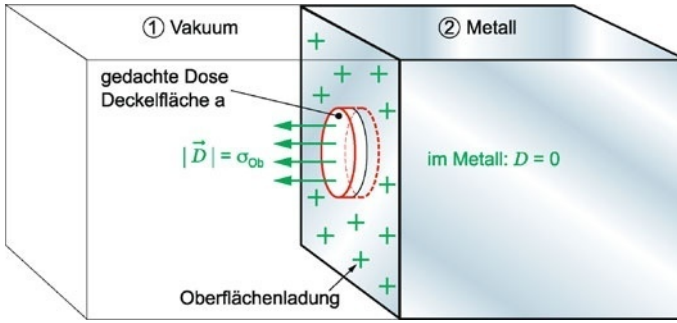


Abb. 2.16 Berechnung der Normalkomponente von $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ an der Grenzfläche Vakuum-Metall

2.3.3 Flächensymmetrie

Eine gleichmäßig mit Ladung bedeckte ebene Metallfläche erzeugt ein homogenes Feld mit parallelen Feldlinien, die senkrecht zur Fläche laufen. Die Feldstärke beträgt

$$|\mathbf{E}| = \sigma_{\text{ob}} / \epsilon_0, \quad (2.36)$$

wobei σ_{ob} die Oberflächenladungsdichte (Ladung pro Flächeneinheit) ist. Um diese Formel zu beweisen, wendet man den Gauß'schen Satz auf die in Abb. 2.16 skizzierte flache Dose an. Die rechte Deckfläche liegt im Metall, wo das Feld null ist, die linke in Luft bzw. Vakuum. Der Fluss durch den ringförmigen Mantel verschwindet, weil dort das Feld parallel zur Oberfläche ist.

2.4 Satz von Stokes, Rotation eines Vektorfeldes

Ringintegral des Magnetfeldes

Wir haben in Kap. 2.1 bewiesen, dass statische (zeitunabhängige) elektrische Felder wirbelfrei sind. Bei Magnetfeldern sieht das anders aus, wie man in Abb. 2.17 erkennt. Das magnetische Feld eines langen geraden Drahtes, der von einem Strom I durchflossen wird, hat kreisförmige Feldlinien und ist ein Wirbelfeld. Auf einem Kreis mit Radius r hat die Feldstärke einen konstanten Wert und ist parallel zum Weg gerichtet. Das Ringintegral wird daher

$$\oint_{\text{Kreis}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = H(r) \cdot 2\pi r = I. \quad (2.37)$$

Diese Beziehung gilt aber nicht nur für einen kreisförmigen Weg, sondern für ganz beliebige, in sich geschlossene Wege C , die den Strom einmal umschließen (Abb. 2.17). Der Beweis verläuft ganz ähnlich wie in Kap. 2.1 und soll hier nur

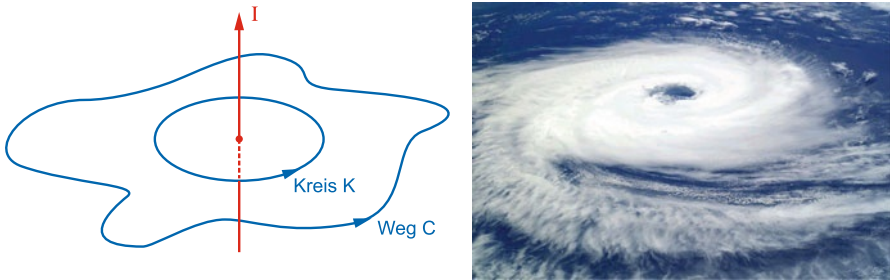


Abb. 2.17 Links: Zwei Wege für das Ringintegral des magnetisierenden Feldes, ein Kreis K und ein beliebiger Weg C , der den Strom I einmal umschließt. Rechts wird als Beispiel für ein Wirbelfeld in der Natur ein Foto des Zyklons Catarina gezeigt (26. März 2004 in Brasilien). Quelle: NASA

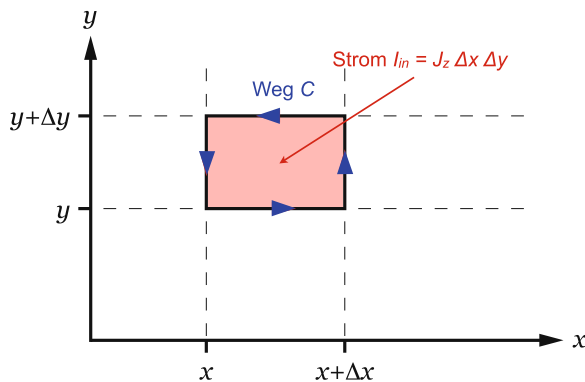


Abb. 2.18 Das Ringintegral des magnetisierenden Feldes über den Rand eines kleinen Rechtecks in der xy -Ebene

angedeutet werden. Eine beliebige geschlossene Kurve C approximieren wir wieder durch eine „Sägezahn-Kurve“, bestehend aus vielen sehr kurzen Kreisbögen und radialen Abschnitten. Im Unterschied zum elektrischen Fall ist $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} \neq 0$ auf den Kreisbögen und $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = 0$ auf den radialen Abschnitten.

Werden mehrere Ströme umschlossen, so addiert man diese unter Berücksichtigung des Vorzeichens, ganz ähnlich wie beim Gauß'schen Satz für Ladungsverteilungen. So ergibt sich die Gleichung

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = I_{\text{in}}, \quad I_{\text{in}} = I_1 + I_2 + I_3 \dots \quad (2.38)$$

Dabei können die Ströme auch verschiedene Vorzeichen haben. Umschließt der Integrationsweg beispielsweise einen Strom $I_1 = +20 \text{ A}$ und einen Strom $I_2 = -20 \text{ A}$, so wird $\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = 0$.

Rotation des Magnetfeldes

Um die Rotation des H -Feldes einzuführen, betrachten wir statt des Linienstroms I eine Stromdichteverteilung $J_z(x, y)$. Als geschlossene Kurve C wählen wir ein kleines Rechteck in der xy -Ebene mit der Fläche $\Delta a = \Delta x \Delta y$. Der Strom durch das Flächenelement Δa ist $I_{\text{in}} = J_z \Delta x \Delta y$. Jetzt werten wir das Ringintegral (2.38) für einen Weg C aus, der die Randkurve des Rechtecks ist, s. Abb. 2.18.

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = [H_x(y) - H_x(y + \Delta y)] \cdot \Delta x + [H_y(x + \Delta x) - H_y(x)] \cdot \Delta y = I_{\text{in}} .$$

Division durch $\Delta x \Delta y$ ergibt

$$\frac{H_y(x + \Delta x) - H_y(x)}{\Delta x} - \frac{H_x(y + \Delta y) - H_x(y)}{\Delta y} = \frac{I_{\text{in}}}{\Delta x \Delta y} = J_z .$$

Im Limes $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$ wird daraus

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z . \quad (2.39)$$

Entsprechende Gleichungen gelten für Ströme in x - oder y -Richtung:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_x , \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y . \quad (2.40)$$

Die *Rotation* eines Vektorfeldes ist definiert als

$$\text{rot } \mathbf{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}} . \quad (2.41)$$

Die Gleichungen (2.39) und (2.40) können in kompakter Form geschrieben werden

$$\boxed{\text{rot } \mathbf{H} \equiv \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} .} \quad (2.42)$$

Dies ist die differentielle Form des Stokes'schen Satzes für Magnetfelder. Die integrale Form (vgl. Anhang A.3.4) erhalten wir aus Gl. (2.38), indem wir den Strom als Flächenintegral über die Stromdichte darstellen:

$$\boxed{\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S (\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}) da = \iint_S ([\nabla \times \mathbf{H}] \cdot \hat{\mathbf{n}}) da .} \quad (2.43)$$

Rotation des elektrischen Feldes

Elektrostatische Felder sind wirbelfrei und daher verschwindet ihre Rotation

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 . \quad (2.44)$$

Alternativ kann man das auch wie folgt beweisen. Ein statisches elektrisches Feld kann man als den negativen Gradienten eines skalaren Potentials schreiben

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \Phi \equiv -\nabla \Phi .$$

Die Rotation eines Gradientenfeldes ist immer null. Wir zeigen dies für die x -Komponente.

$$(\nabla \times \mathbf{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) = 0 ,$$

da es nicht auf die Reihenfolge der partiellen Ableitungen ankommt.

2.5 Anwendungen des Satzes von Stokes

Die wesentlichen Anwendungen des Satzes von Stokes beziehen sich auf die Magnetfelder zylindersymmetrischer Stromverteilungen.

a) Zylindrisches Rohr

In der Wand eines zylindrischen Rohrs (Außenradius r_1 , Wanddicke d) fließe ein Strom I , der gleichmäßig über den Umfang verteilt ist. Außerhalb des Rohrs gilt

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I , \quad B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \text{für } r > r_1 . \quad (2.45)$$

Dies ist ein azimuthales Feld, und es hat den gleichen Wert wie das Magnetfeld eines geraden Drahtes. Im Innern des Rohrs ($r < r_1 - d$) verschwindet das Magnetfeld, da dort kein Strom fließt und das Ringintegral $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ für jeden geschlossenen Weg C verschwindet.

Es ist zu beachten, dass diese Aussagen die Zylindersymmetrie voraussetzen. Ein Vierkantrohr erzeugt ein komplizierteres Magnetfeld als (2.45) im Außenraum, und das Feld im Innenraum ist nicht identisch null.

b) Koaxialkabel

Auf dem Innenleiter mit Radius r_1 fließe ein Strom $I_1 = I$, auf dem Außenleiter mit Radius r_2 ein gegenläufiger Strom $I_2 = -I$. Dann gilt aufgrund des Stokes-Satzes

$$B_\varphi = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & \text{für } r_1 \leq r \leq r_2 \\ 0 & \text{für } r > r_2 . \end{cases} \quad (2.46)$$

c) Massiver Zylinder

Ein langer gerader Metallzylinder vom Radius R wird von einem Strom I durchflossen, die Stromdichte ist $J = I/(\pi R^2)$. Die z -Achse legen wir in Richtung des Stromes. Das Magnetfeld innerhalb und außerhalb des Zylinders berechnen wir mit Hilfe der Gl. (2.38), indem wir einen gedachten Kreis mit Radius r konzentrisch zur Achse des Metallzylinders anordnen. Es gilt dann

$$\oint_{\text{Kreis}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi r B_\varphi = \mu_0 I_{\text{in}} ,$$

wobei I_{in} der Strom ist, der durch den Kreis fließt. Für $r \leq R$ ist $I_{\text{in}} = J\pi r^2$, und das Feld wird

$$B_\varphi(r) = \frac{\mu_0 J \pi r^2}{2\pi r} = \frac{\mu_0 J}{2} \cdot r \quad \text{für } r \leq R . \quad (2.47)$$

Das innere Feld wächst linear mit r an. Außerhalb des Metallzylinders ist $I_{\text{in}} = J\pi R^2 = I$ und wird unabhängig vom Radius r . Für $r > R$ wird das Magnetfeld des zylindrischen Leiters daher identisch mit dem Feld eines Linienstroms und sinkt mit $1/r$ ab.

$$B_\varphi(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} \quad \text{für } r > R . \quad (2.48)$$

Eine wichtige Konsequenz der Gl. (2.48) ist: durch Messung des äußeren Magnetfeldes kann man nicht herausfinden, welchen Radius der Stromleiter hat und ob er hohl oder massiv ist. Das ist ähnlich wie beim elektrischen Feld (2.33) eines Teilchenstrahls, das wir mit Hilfe des Gauß'schen Satz berechnen. Im Außenraum ist das elektrische Feld eines geladenen Zylinders identisch mit dem Feld einer Linienladung. Durch Messung des Feldes gewinnt man keinerlei Information über den Radius des Zylinders.

Diese Erkenntnis ist sehr unerfreulich für Beschleunigerphysiker. Ein sehr wichtiger Parameter ist der Radius eines Teilchenstrahls, der entscheidend in die Luminosität eines Colliders oder die Brillanz einer Synchrotron-Lichtquelle eingeht. Unsere Überlegungen zeigen, dass man den Strahlradius nicht mit Hilfe von externen Elektroden sozusagen berührungsfrei messen kann, egal wie schlaue man sich die Form und Anordnung dieser Elektroden auch ausdenkt. Stattdessen müssen sog. „invasive“ Methoden angewandt werden, beispielsweise indem man eine dünne Szintillatorfolie in den Strahl fährt und den entstehenden Leuchtfleck mit einer Pixelkamera fotografiert.

2.6 Vektorpotential, Poisson-Gleichung

2.6.1 Das magnetische Vektorpotential

Elektrische und magnetische Felder haben eine sehr unterschiedliche Charakteristik. Die Rotation eines statischen elektrischen Feldes verschwindet, und das Feld kann als (negativer) Gradient eines skalaren Potentials geschrieben werden: $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$. Die Divergenz des elektrischen Feldes ist im Allgemeinen ungleich null ($\text{div}\mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$).

Die Divergenz eines Magnetfeldes ist immer null. Ein divergenzfreies Vektorfeld kann als Rotation eines geeigneten anderen Vektorfeldes dargestellt werden. Dieser Satz wird hier nicht bewiesen. Speziell für das Magnetfeld folgt daraus, dass ein Vektorfeld $\mathbf{A}$ existiert mit der Eigenschaft

$$\boxed{\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} .} \quad (2.49)$$

Das Feld $\mathbf{A}$ nennt man das magnetische *Vektorpotential*.

Umgekehrt ist die Divergenz eines Rotationsfeldes identisch null: es gilt

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

für ein beliebiges Vektorfeld $\mathbf{A}$, wie man leicht nachrechnen kann.

Aus dem Satz von Stokes (A.23) folgt, dass das Ringintegral des Vektorpotentials über eine geschlossene Kurve C gleich dem Fluss der magnetischen Feldstärke durch die von C umschlossene Fläche S ist:

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da = \iint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da = \phi_{\text{mag}} .$$

Es gilt daher der wichtige Satz

$$\boxed{\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \phi_{\text{mag}} .} \quad (2.50)$$

Eichtransformationen

Das magnetische Vektorpotential ist nicht eindeutig. Wenn $\chi(x, y, z)$ eine beliebige skalare Funktion ist, so ergibt das neue Vektorpotential

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi \quad (2.51)$$

das gleiche Magnetfeld $\mathbf{B}$, denn die Rotation des Gradientenfeldes $\nabla\chi$ verschwindet: $\nabla \times (\nabla\chi) = 0$. Daher ist

$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times (\nabla\chi) = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} .$$

Die Transformation (2.51) nennt man eine *Eichtransformation*.

2.6.2 Poisson-Gleichung und Biot-Savart-Gesetz

Wir wollen jetzt eine Differentialgleichung herleiten, die es erlaubt, das skalare Potential und das Vektorpotential aus vorgegebenen Ladungsdichte- und Stromdichteverteilungen zu berechnen. Aus $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$ und $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ folgt

$$\nabla^2\Phi = \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (2.52)$$

Diese Differentialgleichung 2. Ordnung nennt man die Poisson-Gleichung¹. Man kann zeigen, dass die Lösung folgende Form hat

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'. \quad (2.53)$$

Diese Lösung ist im Grunde leicht zu verstehen. Das skalare Potential einer Anordnung von Punktladungen Q_j , die sich an den Orten $\mathbf{r}_j$ befinden, ist

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_j \frac{Q_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|}.$$

Wenn man die Punktladungen durch eine kontinuierliche Ladungsdichte ersetzt, geht die Summe in das Integral der Gl. (2.53) über.

Die Poisson-Gleichung für das Vektorpotential erhält man wie folgt. Im Vakuum gilt die Gleichung $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$. In diese Gleichung setzen wir $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ein und benutzen Gl. (A.29):

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = -\nabla^2 \mathbf{A} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{J}.$$

Durch eine Eichtransformation kann man erreichen, dass die Divergenz des Vektorpotentials null wird, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Man nennt dies die Coulomb-Eichung. Dann ergibt sich folgende Poisson-Gleichung für das Vektorpotential

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (2.54)$$

mit der Lösung

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'. \quad (2.55)$$

Wie man sieht, ist das Vektorpotential parallel zur Stromdichte. Für einen Strom I , der in einem dünnen Draht fließt, entfallen zwei der Integrationen, und es gilt

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds'. \quad (2.56)$$

¹ Wenn die Ladungsdichte null ist, nennt man Gl. (2.52) die Laplace-Gleichung.

Hier ist s' die Bahnlänge entlang des Drahtes. Aus dieser Formel kann man das Biot-Savart-Gesetz für das Magnetfeld eines Linienstroms herleiten. Wir geben dies Gesetz in differentieller Form an. Ein Strom I , der am Ort $\mathbf{r}'$ durch ein Leiterstück ds' fließt, liefert folgenden Beitrag zum Magnetfeld am Beobachtungsort $\mathbf{r}$:

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \mathbf{x}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds' . \quad (2.57)$$

Das Biot-Savart-Gesetz sieht recht kompliziert aus und ist dies auch, wenn man es auf beliebig geformte Stromleiter anwenden möchte. Relativ einfach wird es in zwei Spezialfällen, die wir jetzt analysieren.

Anwendungsbeispiele für das Biot-Savart-Gesetz

a) Magnetfeld eines langen geraden Stromleiters

Wir wissen bereits, dass das Magnetfeld ringförmige Feldlinien um den Strom bildet. Es ist daher zweckmäßig, Zylinderkoordinaten zu benutzen (Anhang A.5). Der Strom fließe entlang der z -Achse und wir wollen das Magnetfeld im Abstand $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ vom Draht berechnen. Unsere Bahnkoordinate ist $s' = z'$. Es gelten folgende Beziehungen (siehe auch Abb. 2.19)

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= I \hat{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{r} = r \hat{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{r}' = z' \hat{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{I} \mathbf{x}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = I r \hat{\boldsymbol{\phi}}, \\ r &= |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \cos \alpha, \quad s' \equiv z' = r \tan \alpha, \quad ds' = \frac{r}{\cos^2 \alpha} d\alpha \end{aligned}$$

Setzen wir diese Beziehungen in Gl. (2.57) ein und integrieren über den Drahtabschnitt, der durch die Anfangs- und Endwinkel α_1 und α_2 definiert ist, so wird

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{I r}{r^3 / \cos^3 \alpha} \frac{r}{\cos^2 \alpha} d\alpha \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \alpha d\alpha \hat{\boldsymbol{\phi}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) \hat{\boldsymbol{\phi}} . \end{aligned}$$

Wenn der Draht sich längs der z -Achse von $-\infty$ bis $+\infty$ erstreckt, sind die Integrationsgrenzen $\alpha_1 = -\pi/2$ und $\alpha_2 = +\pi/2$. Damit erhalten wir die bekannte Formel

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\boldsymbol{\phi}} . \quad (2.58)$$

b) Magnetfeld eines Ringstroms

Die x -Achse sei die Symmetrieachse eines Drahttringes mit Radius R , in dem der Strom I fließt. Um das Magnetfeld auf der Achse zu berechnen, betrachten wir zwei

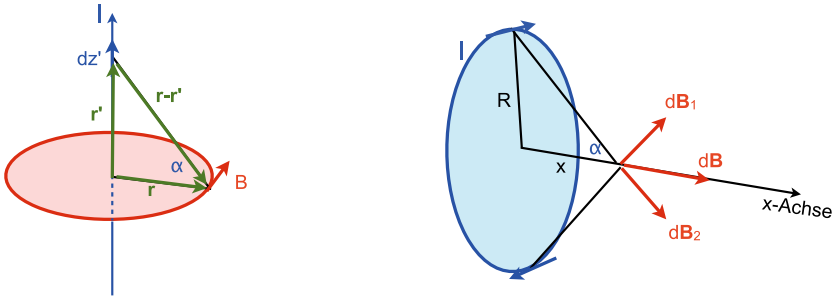


Abb. 2.19 Berechnung des Magnetfeldes eines linearen Stroms und eines Ringstroms mit dem Biot-Savart-Gesetz

gegenüberliegende Abschnitte, die jeweils die Länge ds' haben. Im Abstand x vom Zentrum erzeugen sie die Felder

$$\begin{aligned} d\mathbf{B}_1(x) &= \frac{\mu_0 I ds'}{4\pi(R^2 + x^2)} (\cos \alpha \hat{\mathbf{z}} + \sin \alpha \hat{\mathbf{x}}) , \\ d\mathbf{B}_2(x) &= \frac{\mu_0 I ds'}{4\pi(R^2 + x^2)} (-\cos \alpha \hat{\mathbf{z}} + \sin \alpha \hat{\mathbf{x}}) , \\ d\mathbf{B}(x) &= d\mathbf{B}_1(x) + d\mathbf{B}_2(x) = \frac{\mu_0 I ds'}{2\pi(R^2 + x^2)} \sin \alpha \hat{\mathbf{x}} . \end{aligned}$$

Wegen $\sin \alpha = R/\sqrt{R^2 + x^2}$ folgt

$$d\mathbf{B}(x) = \frac{\mu_0 I ds'}{2\pi} \frac{R}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{x}} .$$

Die Feldanteile in x -Richtung addieren sich, die transversalen Feldanteile heben sich auf. Dies gilt für alle gegenüberliegenden Abschnitte. Das Gesamtfeld auf der x -Achse erhalten wir durch Integration über den halben Ringumfang, was in diesem Fall bedeutet, dass wir ds' durch πR ersetzen:

$$\mathbf{B}(x) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{x}} . \quad (2.59)$$

Das Feld einer Ringspule ist sehr inhomogen. Viel bessere Feldqualität erzeugt man mit der Helmholtz-Spulenordnung, die aus zwei Ringspulen besteht, die den Abstand R voneinander haben (siehe Aufgabe 2.7).

Die Berechnung der Felder von Spulen oder Magneten mit Eisenjoch ist generell aufwändig und nur in seltenen Fällen analytisch durchführbar. Es existieren ausgefeilte numerische Codes, in denen auch eine partielle Sättigung des Eisenjochs berücksichtigt werden kann. Meistens ist es unpraktisch, erst das Vektorpotential zu berechnen und daraus durch Bildung der Rotation das Feld; die direkte Berechnung des $\mathbf{B}$ -Feldes ist generell einfacher. Eine Ausnahme sind die supraleitenden Magnete

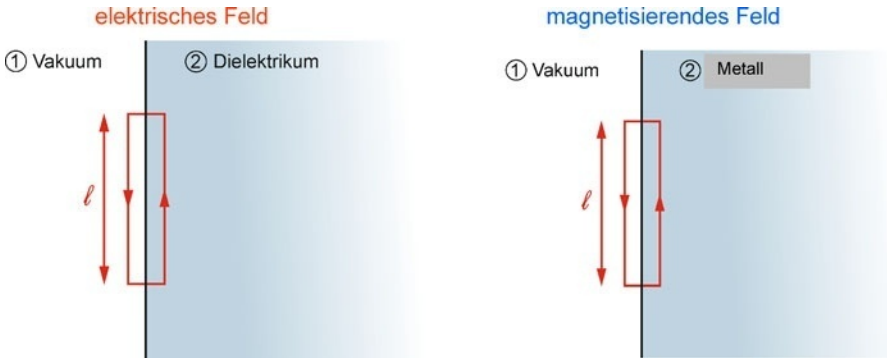


Abb. 2.20 Links: Die Grenzfläche Vakuum-Dielektrikum und der Integrationsweg für das elektrische Feld $\mathbf{E}$. Rechts: Die Grenzfläche Vakuum-Metall und der Integrationsweg für das magnetisierende Feld $\mathbf{H}$

eines Protonenbeschleunigers wie HERA oder LHC. Hier laufen die Stromleiter parallel zum Teilchenstrahl, und das Vektorpotential hat nur diese eine Komponente in Strahlrichtung, die auf sehr elegante Weise analytisch berechnet werden kann [7].

2.7 Randbedingungen an Grenzflächen

2.7.1 Elektrische Felder

Wir betrachten die Grenzfläche zwischen zwei dielektrischen Medien mit den relativen Permittivitäten ϵ_{r1} und ϵ_{r2} . Eines der Medien kann auch Vakuum sein, wir setzen dann $\epsilon_r = 1$. Wir wollen zeigen, dass die Parallelkomponente von $\mathbf{E}$ und die Normalkomponente von $\mathbf{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E}$ stetig sind:

$$\boxed{(E_{\parallel})_1 = (E_{\parallel})_2, \quad (D_{\perp})_1 = (D_{\perp})_2.} \quad (2.60)$$

Um die erste der Gleichungen (2.60) zu beweisen, werten wir die Beziehung $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$ für den in Abb. 2.20 skizzierten Weg aus.

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = [(E_{\parallel})_1 - (E_{\parallel})_2] \ell = 0 \quad \Rightarrow \quad (E_{\parallel})_1 = (E_{\parallel})_2.$$

Die zweite der Gleichungen (2.60), die Stetigkeit von $D_{\perp}$, folgt aus dem Gauß'schen Satz und der Beobachtung, dass an der Grenzfläche der dielektrischen Medien keine frei beweglichen Ladungsträger existieren und es daher dort keine Quellen für die dielektrische Verschiebung $\mathbf{D}$ gibt.

Metalle erfordern eine andere Betrachtung. Im Innern eines Metalls gilt $\mathbf{E} = 0$ und $\mathbf{D} = 0$, wenn keine Ströme fließen. Die Parallelkomponente von $\mathbf{E} = 0$ muss

gegen null gehen, wenn man sich einer metallischen Grenzfläche nähert (Vakuum-Metall oder Dielektrikum-Metall). Im stromfreien Fall gilt auf einer Metalloberfläche immer

$$E_{\parallel} = 0 . \quad (2.61)$$

Die Normalkomponente von $\mathbf{D}$ ist jedoch nicht stetig, sondern macht einen Sprung, sofern es eine Oberflächenladung auf dem Metall gibt. Zur Berechnung wendet man den Gauß'schen Satz auf die in Abb. 2.16 skizzierte flache Dose an. Man findet

$$(D_{\perp})_1 = \sigma_{\text{ob}} , \quad (D_{\perp})_2 = 0 . \quad (2.62)$$

Hier bedeutet σ_{ob} die Oberflächenladungsdichte (Ladung pro Flächeneinheit).

2.7.2 Magnetische Felder

Im magnetischen Fall sieht es etwas anders aus als im elektrischen. Die meisten Dielektrika sind unmagnetisch, die relative Permeabilität ist $\mu_r = 1$. Die Grenzfläche zwischen Vakuum und einem solchen Dielektrikum wird vom magnetischen Feld gar nicht wahrgenommen, ebenso wenig die Grenzfläche zweier unmagnetischer Dielektrika. Ferrite sind elektrische Isolatoren mit $\mu_r > 1$, auf die wir nicht weiter eingehen wollen. Interessant sind die Randbedingungen an einer Grenzfläche Vakuum-Metall. Eine wichtige Beobachtung ist, dass Oberflächenströme im strengen Sinne nicht existieren. Für einen Stromfluss braucht man immer eine Schichtdicke d , die groß im Vergleich zu atomaren Dimensionen ist. Hochfrequenzfelder dringen mit exponentieller Abschwächung in das Metall ein. Man nennt dies den *Skin-Effekt*. Typische Werte der Skintiefe sind $\delta \approx 1 \mu\text{m}$. Die dünnsten stromtragenden Schichten findet man in Supraleitern, dort ist die Eindringtiefe für Gleich- und Wechselströme in der Größenordnung von 50 Nanometern (London'sche Eindringtiefe), siehe z. B. [8]. Oberflächenladungen sind dagegen auf eine Schicht von der Größenordnung eines Atomdurchmessers begrenzt (einige Zehntel Nanometer). Die Abwesenheit von Oberflächenströmen impliziert, dass das Ringintegral des $\mathbf{H}$ -Feldes für den in Abb. 2.20 skizzierten Weg verschwindet: $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = 0$. Daraus folgt, dass die Parallelkomponente von $\mathbf{H}$ an der Grenzfläche stetig ist. Da keine magnetischen Einzelladungen existieren, folgt aus dem Gauß'schen Satz, dass die Normalkomponente von $\mathbf{B}$ an einer Grenzfläche immer stetig ist.

$$\boxed{(H_{\parallel})_1 = (H_{\parallel})_2 , \quad (B_{\perp})_1 = (B_{\perp})_2 .} \quad (2.63)$$

Wenn wir speziell die Grenzfläche Vakuum-Eisen betrachten ($\mu_{r1} = 1, \mu_{r2} \gg 1$), so folgt aus (2.63), dass die Parallelkomponente von $\mathbf{B}$ im Vakuumbereich stark unterdrückt ist, denn es gilt

$$(B_{\parallel})_1 \ll (B_{\parallel})_2 = \mu_{r2} (B_{\parallel})_1 .$$

Das Magnetfeld $\mathbf{B}$ steht daher nahezu senkrecht auf der Eisenoberfläche.

Wichtige Konsequenzen der Randbedingungen sind:

- Das elektrische Feld $\mathbf{E}$ steht immer senkrecht auf metallischen Leitern (falls kein Strom im Leiter fließt).
- Das Magnetfeld $\mathbf{B}$ steht nahezu senkrecht auf den Eisenpolschuhen von Magneten, sofern das Eisen nicht in Sättigung ist.

Abweichungen von diesen Regeln

Wenn ein Kupferdraht von einem Strom durchflossen wird, gibt es eine elektrische Feldkomponente in Richtung des Stroms. Das $\mathbf{E}$ -Feld steht dann nicht mehr senkrecht auf der Leiteroberfläche. Wenn man einen Elektromagneten mit Eisenjoch so stark erregt, dass man sich der Sättigungsmagnetisierung annähert ($\mu_0 M \approx 2 \text{ T}$), so geht μ_{r2} gegen 1, und die magnetischen Feldlinien stehen nicht mehr senkrecht auf den Polschuhen. Dies führt insbesondere bei Quadrupolmagneten (Abb. 2.8) zu einer schlechten Feldqualität.

2.8 Weitere Beispiele und didaktische Anmerkungen

2.8.1 Genügt das Feld einer Punktladung exakt einem $1/r^2$ -Gesetz?

In der Elektrodynamik wird die Annahme gemacht, dass das elektrische Feld einer Punktladung oder einer kugelförmigen Ladungsverteilung umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands r ist:

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} . \quad (2.64)$$

Das Coulomb-Gesetz ist experimentell mit hoher Genauigkeit bestätigt worden, aber wie bei jeder Messung muss man sich die Fehlergrenzen ansehen. Aus der Sicht des Experimentalphysikers macht es keinen großen Unterschied, ob Gl. (2.64) exakt gilt, oder ob der Exponent im Nenner sehr geringfügig von 2 abweicht

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^{2+\delta}} \quad \text{oder} \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^{2-\delta}} ,$$

wobei δ eine extrem kleine Zahl ist, sagen wir $\delta < 10^{-20}$. Für den Mathematiker oder theoretischen Physiker ist der Unterschied jedoch fundamental. Jede noch so kleine Abweichung vom „exakten“ Coulomb-Gesetz (2.64) hat zur Folge, dass der Gauß'sche Satz falsch wird und damit auch die erste Maxwellgleichung ihre Gültigkeit verliert. Eine Konsequenz wäre beispielsweise, dass das elektrische Feld im Innern einer leitenden Hohlkugel nicht mehr exakt null wäre (siehe hierzu die Betrachtungen in den Feynman-Vorlesungen [2], Band II, Kap. 5.8).

Äquivalent mit dem exakten $1/r^2$ -Gesetz des Feldes ist die exakte $1/r$ -Abhängigkeit des Potentials einer Punktladung: $\Phi(r) = Q/(4\pi\epsilon_0 r)$. In der Sprache der Teilchenphysik besagt dies, dass die Feldquanten des elektromagnetischen Feldes, die Photonen oder γ -Quanten, die Ruhemasse null haben müssen. Wenn die Feldquanten eine nicht verschwindende Ruhemasse $m_\gamma > 0$ hätten, würden sie ein *Yukawa-Potential* erzeugen

$$\Phi(r) \propto \frac{e^{-\mu r}}{r} \quad \text{mit} \quad \mu = \frac{m_\gamma c}{\hbar}, \quad (2.65)$$

dessen Reichweite kürzer als die des Coulomb-Potentials ist. Im Rahmen der Messgenauigkeit ist die Ruhemasse des Photons null, die obere Grenze ist extrem klein im Vergleich zur Elektronenmasse

$$m_\gamma c^2 < 10^{-18} \text{ eV}.$$

Die seltsame Konsequenz einer von null verschiedenen Ruhemasse der Photonen wäre, dass sich Licht mit einer etwas geringeren Geschwindigkeit als der „Lichtgeschwindigkeit“ c im Vakuum ausbreiten müsste.

2.8.2 Die elektrostatische Selbstenergie des Elektrons

Die klassische Elektrodynamik ist eine überaus erfolgreiche Theorie, wir werden in den folgenden Kapiteln noch viel darüber lernen. Dennoch gibt es in dieser Theorie Rätsel, die bis heute ungelöst sind. Eines der hartnäckigsten Probleme ist die unendlich hohe Feldenergie einer Punktladung.

Die potentielle Energie einer geladenen Kugel steckt im Feld

Die elektrische potentielle Energie einer homogen geladenen Kugel ist positiv, da repulsive Kräfte zwischen den Bestandteilen wirken. Die potentielle Energie ergibt sich zu

$$E_{\text{pot}} = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (2.66)$$

Um diese Formel zu beweisen, denkt man sich die Vollkugel in dünne sphärische Schalen aufgeteilt, die wie in einer Zwiebel angeordnet sind. Die kugelförmige Ladungsverteilung wird sukzessive aufgebaut, indem man immer weitere Schalen mit wachsendem Radius hinzufügt, bis man beim Radius R angekommen ist. Wenn die Kugel bis zu einem Radius $r < R$ aufgebaut ist, so enthält sie eine Ladung $q = Q r^3/R^3$, und das elektrische Potential an der Oberfläche ist

$$\Phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r^2.$$

Jetzt fügen wir eine Schale der Dicke dr hinzu. Sie enthält die Ladung

$$dq = \rho 4\pi r^2 dr \quad \text{mit der Ladungsdichte} \quad \rho = Q \frac{3}{4\pi R^3},$$

und die potentielle Energie erhöht sich um

$$dE_{\text{pot}} = \Phi(r) dq = \frac{3Q^2 r^4}{4\pi \epsilon_0 R^6} dr.$$

Wird dieser Ausdruck über r integriert, so ergibt sich Formel (2.66).

Wie schon beim Plattenkondensator ist auch in diesem Fall die potentielle Energie identisch mit dem Energieinhalt des elektrischen Feldes. Zum Beweis berechnen wir das Volumenintegral über die elektrische Energiedichte.

$$W_{\text{el}} = \iiint w_{\text{el}} d^3r = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint E^2 d^3r = \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^\infty E^2 4\pi r^2 dr.$$

Die letzte Umformung haben wir gemacht, weil das Feld einer geladenen Kugel nur vom Betrag des Ortsvektors $r = |\mathbf{r}|$ und nicht von den Winkeln θ und φ abhängt. Nun setzen wir die Felder (2.27) und (2.26) ein:

$$\begin{aligned} W_{\text{el}} &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^R E_i^2 4\pi r^2 dr + \frac{\epsilon_0}{2} \int_R^\infty E_a^2 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{1}{10} \frac{Q^2}{4\pi \epsilon_0 R} + \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi \epsilon_0 R} = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi \epsilon_0 R}. \end{aligned}$$

Damit ist die Gleichheit von potentieller Energie und Feldenergie bewiesen.

Ist die Masse des Elektrons ein elektromagnetischer Effekt?

Wenn man als Modell des Elektrons eine homogen geladene Kugel annimmt, könnte man die Frage stellen, ob die Ruheenergie des Teilchens $m_e c^2$ elektrischen Ursprungs sei. Aus der Gleichsetzung

$$m_e c^2 = \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 r_e}$$

erhält man dann eine Abschätzung für den Radius des Elektrons (der Faktor $3/5$ wird hierbei ignoriert). Der sog. *klassische Elektronenradius* ist durch diese Gleichsetzung definiert

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 m_e c^2} = 2,81794 \cdot 10^{-15} \text{ m}. \quad (2.67)$$

Diese Größe wird vielfach verwendet, aber in Wahrheit ist das Elektron viel kleiner. Aus den Präzisionstests der Quantenelektrodynamik am Speicherring PETRA ergab

sich, dass der Elektronenradius $r < 10^{-18}$ m und damit einen Faktor 1000 kleiner als der Protonenradius ist, sofern das Teilchen überhaupt eine Ausdehnung hat. Aus heutiger Sicht ist es sehr unwahrscheinlich, dass die Ruheenergie irgend etwas mit einer elektrischen Energie zu tun hat. Im Standard-Modell der Teilchenphysik werden die Massen durch Ankopplung an das Higgs-Feld erzeugt, aber auch das ist bis heute nur eine theoretische Modellvorstellung, es sei denn, Higgs-Teilchen werden beim Large Hadron Collider gefunden (siehe hierzu Kap. 8.4.3).

Die elektrische Selbstenergie des Elektrons ist ein bis heute ungelöstes Problem der theoretischen Physik. Wenn man Formel (2.66) auf ein Elektron mit einem Radius $r < 10^{-18}$ m anwendet, so kommt eine elektrostatische Energie heraus, die die Ruheenergie $m_e c^2$ des Teilchens um mehr als drei Zehnerpotenzen übertrifft. Im Fall eines wirklich punktförmigen Elektrons wäre die Selbstenergie sogar unendlich. Ganz offensichtlich ist es unzulässig, das Elektron als homogen geladene Kugel zu behandeln, auf die die Gesetze der klassischen Elektrodynamik angewandt werden dürfen. Unser pragmatischer Standpunkt ist: solange die theoretischen Physiker keine angemessene Lösung für dies Problem gefunden haben (und die Suche nach einer solchen Lösung dauert schon mehr als 80 Jahre an), betrachten wir die Gesetze der klassischen Elektrodynamik als nicht anwendbar im Bereich der aller-kleinsten Dimensionen. Punktladungen im strengen Sinn des Wortes existieren für uns auch nicht.

Zusammenfassung

1. Die elektrische Kraft, die eine Ladung $Q > 0$ im Ursprung des Koordinatensystems auf eine Testladung q im Abstand r ausgeübt, ist

$$\mathbf{F}_{\text{el}} = q \cdot \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \hat{\mathbf{r}} \quad \text{mit} \quad \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r.$$

2. Um das Problem der Fernwirkung zu vermeiden, führt man das Konzept des elektrischen Feldes ein. Die Ladung Q erzeugt das elektrische Feld

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_{\text{el}}}{q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \hat{\mathbf{r}},$$

und es ist dieses Feld, welches die Kraft $\mathbf{F}_{\text{el}} = q \mathbf{E}$ auf die Testladung q ausübt.

3. Superpositionsprinzip: das resultierende elektrische Feld von n Punktladungen berechnet man durch vektorielle Addition der Einzelfelder

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^n \mathbf{E}_j(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^n \frac{Q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3}.$$

4. Elektrostatische Kräfte sind konservativ (wirbelfrei). Das Linienintegral der Kraft hängt nur von Anfangs- und Endpunkt ab, nicht aber vom Verlauf und

der Länge des Weges zwischen diesen Orten. Es ist möglich, eine potentielle Energie geladener Teilchen zu definieren, so dass $E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \text{const}$ ist.

5. Ein beliebiges elektrostatisches Feld ist wirbelfrei. Das elektrische Potential ist definiert durch

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r}_a) - \int_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} .$$

6. Das Potential einer Punktladung im Ursprung ist

$$\Phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

mit der Konvention $\Phi(\infty) = 0$. Das Potential von n Punktladungen $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ ist nach dem Superpositionsprinzip die Summe der Einzelpotentiale

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^n \Phi_j(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^n \frac{Q_j}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} .$$

7. Die elektrischen Feldlinien stehen senkrecht auf den Äquipotentialflächen, definiert durch $\Phi(\mathbf{r}) = \text{const}$. Metallische Oberflächen sind Äquipotentialflächen, wenn kein Strom fließt.
8. Ein zeitlich konstantes elektrisches Feld kann als negativer Gradient des elektrischen Potentials geschrieben werden:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi \equiv -\nabla \Phi .$$

9. Integralsatz von Gauß für elektrische Felder: der Fluss der elektrischen Feldstärke durch eine geschlossene Oberfläche ist gleich der im Innern befindlichen Ladung Q_{in} , dividiert durch ϵ_0 :

$$\phi_{\text{el}} = \oiint (\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}) da = \frac{Q_{\text{in}}}{\epsilon_0} .$$

10. Integralsatz von Gauß für magnetische Felder: der Fluss der magnetischen Feldstärke durch eine geschlossene Oberfläche ist identisch null, da keine magnetischen Einzelladungen existieren:

$$\phi_{\text{mag}} = \oiint (\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}) da \equiv 0 .$$

11. Die Divergenz des elektrischen Feldes ist

$$\text{div } \mathbf{E} \equiv \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0} .$$

Die Divergenz des magnetischen Feldes ist

$$\text{div } \mathbf{B} \equiv \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 .$$

12. Der Stokes'sche Satz für das $\mathbf{H}$ -Feld und die Rotation sind

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = I, \quad \text{rot } \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}.$$

13. Der Stokes'sche Satz für ein beliebiges Vektorfeld $\mathbf{A}$ lautet

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da.$$

14. Das Magnetfeld kann als Rotation eines Vektorpotentials geschrieben werden

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Das Vektorpotential ist nicht eindeutig. Die Eichtransformation $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi$ ergibt das gleiche $\mathbf{B}$ -Feld.

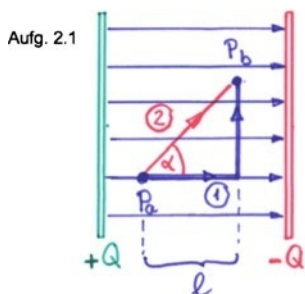
15. Das Biot-Savart-Gesetz für das Magnetfeld eines Linienstroms lautet in differentieller Form

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{I} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds'.$$

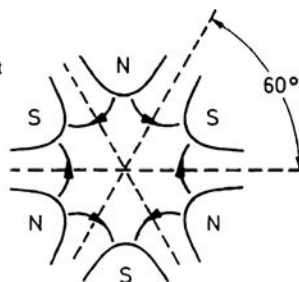
16. An der Grenzfläche zwischen zwei dielektrischen Medien sind die Parallelkomponente von $\mathbf{E}$ und die Normalkomponente von $\mathbf{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E}$ stetig.
17. An der Grenzfläche zwischen zwei magnetischen Medien sind die Parallelkomponente von $\mathbf{H}$ und die Normalkomponente von $\mathbf{B}$ stetig.
18. Das elektrische Feld $\mathbf{E}$ steht immer senkrecht auf metallischen Leitern, sofern kein Strom im Leiter fließt. Das Magnetfeld $\mathbf{B}$ steht nahezu senkrecht auf den Eisenpolschuhen von Elektromagneten.
19. Das Feld einer Punktladung gehorcht mit extrem guter Genauigkeit einem $1/r^2$ -Gesetz. Abweichungen davon würden eine endliche Ruhemasse des Photons implizieren. Dafür gibt es keine experimentellen Hinweise.
20. Die Ruhe-Energie des Elektrons kann nicht als elektrostatische Energie interpretiert werden.

Aufgaben

2.1) Vergleich elektrische Kraft – Schwerkraft. Für das homogene Feld in einem Plattenkondensator soll das Linienintegral der elektrischen Feldstärke zwischen den Punkten P_a und P_b für die zwei in der Abbildung gezeigten Wege berechnet werden. Es soll bewiesen werden, dass der gleiche Wert herauskommt. Wie sieht ein entsprechendes mechanisches Experiment im Schwerfeld der Erde aus?



Aufg. 2.2
Sextupolmagnet



2.2) Ein elektrisches Sextupolfeld hat die Komponenten $E_x(x, y) = 2Axy$, $E_y(x, y) = A(x^2 - y^2)$ mit einer Konstanten A der Dimension V/m^3 .

- Es soll gezeigt werden, dass dies Feld rotationsfrei ist.
- Das skalare Potential ist zu berechnen.

Das Sextupolfeld kann durch 6 geeignet geformte Metallelektroden erzeugt werden, die man alternierend auf ein Potential von $+U_0$ und $-U_0$ setzt. Wenn man die Elektroden durch Eisenpolschuhe ersetzt, zwischen denen Spulen angebracht sind, erhält man einen Sextupolmagneten, der in Kreisbeschleunigern eine wichtige Funktion hat und die Impulsabhängigkeit der Brennweite der Quadrupolmagnete kompensiert (analog zu achromatischen Linsensystemen in der Optik).

2.3) In der Teilchenphysik werden häufig gasgefüllte Drift-Rohrkammern zur Messung von Teilchenspuren eingesetzt, die dem Geiger-Müller-Zählrohr ähneln. Der Innendurchmesser des Aluminiumrohrs sei 20 mm, der innere Leiter ist ein vergoldeter Wolframdraht von $50 \mu m$ Durchmesser. Das Rohr wird geerdet, an den Signaldraht legt man eine Spannung von $U = +100 V$. Berechne das elektrische Feld in der Nähe des Signaldrahtes (dort ist die Feldstärke so hoch, dass es zu einer lawinenartigen Vermehrung der Ladungsträger infolge von Ionisationsprozessen kommt).

2.4) Eine Ladung $Q = +1 nC$ befindet sich in der xy -Ebene am Ort $P_1 = (+a, 0)$, eine Ladung $-Q$ am Ort $P_2 = (-a, 0)$, $a = 10 cm$. Wie groß ist die elektrische Feldstärke am Ort $P_3 = (0, +a)$?

Lösung mit zwei Methoden:

- Vektoraddition der Felder (Skizze machen).
- Berechnung des Potentials und der Feldstärke mit der Gl. $\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi$.

2.5) Berechne die negative Ladungsdichte ρ_n und das radiale elektrische Feld E_r im H-Atom als Funktion des Abstands r vom Proton. Skizziere E_r als Funktion von r . Bei welchem Kernabstand r_m wird $|E_r|$ maximal? Welchen Wert hat das Feld des Protons bei r_m ?

2.6) Ein eindimensionales elektrostatisches Problem. Die elektrische Ladungsdichte sei $\rho(x) = \rho_0 > 0$ für $-a < x < +a$ und $\rho(x) = 0$ für $|x| \geq a$. Berechne das elektrische Feld $E_x(x)$, das Potential $\Phi(x)$ sowie die potentielle Energie eines Elektrons in diesem Feld. Welche Bewegung führt das Elektron aus, wenn es sich zum Zeitpunkt $t = 0$ am Ort $x = a/2$ befindet und in Ruhe ist?

2.7) Eine Helmholtz-Spulenordnung bestehe aus zwei Ringspulen mit Radius $R = 10 \text{ cm}$ und $N = 100$ Windungen. Die x -Achse ist die Symmetrieachse der Spulen, die sich bei $x = -R/2$ und $x = +R/2$ befinden. Der Strom sei $I = 10 \text{ A}$. Berechne und zeichne das Feld $B_x(x)$ auf der Achse und vergleiche es mit dem Feldverlauf einer einzelnen Ringspule, die sich bei $x = 0$ befindet.

2.8) Gegeben sei das folgende Vektorpotential in Zylinderkoordinaten (r, φ, z) : $A_\varphi = B_0 r/2$ für $0 \leq r \leq R$ und $A_\varphi = B_0 R^2/(2r)$ für $r > R$, wobei B_0 eine Konstante ist. Die anderen Komponenten sind null: $A_r = 0$ und $A_z = 0$. Skizziere die Feldlinien von $\mathbf{A}$. Berechne das Magnetfeld $\mathbf{B}$ und das Linienintegral von $\mathbf{A}$ über zwei Kreise mit Radien $r_1 < R$ und $r_2 > R$. Finde im Bereich $r > R$ einen geschlossenen Weg C_1 , auf dem das Linienintegral von $\mathbf{A}$ nicht verschwindet, und einen geschlossenen Weg C_2 , auf dem das Linienintegral von $\mathbf{A}$ verschwindet.

2.9) Wenn man geladene Teilchen (Elektronen, Protonen, Ionen) der Ladung q und der Masse m durch ein elektrisches Feld beschleunigt und dann in einem Magnetfeld B auf einer Kreisbahn ablenkt, kann man nur das Verhältnis q/m bestimmen, aber nicht die Ladung selber. Beispielsweise kann man ein einfach ionisiertes Ne-Ion (Massenzahl $A = 20$) und ein zweifach ionisiertes Ar-Ion ($A = 40$) nicht unterscheiden. Begründe diesen Sachverhalt. Würde es helfen, wenn man zur Ablenkung statt des Magnetfeldes das elektrische Feld in einem Sektor eines Zylinderkondensators benutzt?

2.10) Ein Elektron durchläuft eine Beschleunigungsspannung von $U = 1000 \text{ V}$ und wird dann unter einem Winkel von $\alpha = 0,1 \text{ rad}$ in ein homogenes longitudinales Magnetfeld $B_z = B_0 = 0,01 \text{ T}$ eingeschossen. Berechne und skizziere die Bahnkurve des Teilchens im Magnetfeld.

2.11) Abbildung 2.13 zeigt, dass das elektrische Feld einer Einzelladung Q nicht dadurch nach außen abgeschirmt werden kann, indem man die Ladung mit einer metallischen Hohlkugel umgibt. In analoger Weise gilt: das Magnetfeld eines Einzelstroms I kann nicht dadurch nach außen abgeschirmt werden, indem man den Strom mit einem Eisenrohr umgibt. Diese Aussage ist zu begründen. Dagegen können zwei antiparallel laufende Ströme $I_1 = +I$ und $I_2 = -I$ durch ein Eisenrohr nach außen abgeschirmt werden. Auch diese Aussage soll begründet werden. Es ist lehrreich, die magnetischen Feldlinienbilder für die beiden Fälle zu skizzieren.

Theoretische Physik für Studierende des Lehramts 2

Elektrodynamik und Spezielle Relativitätstheorie

Schmüser, P.

2013, XII, 258 S. 105 Abb., 100 Abb. in Farbe.,

Softcover

ISBN: 978-3-642-25394-2