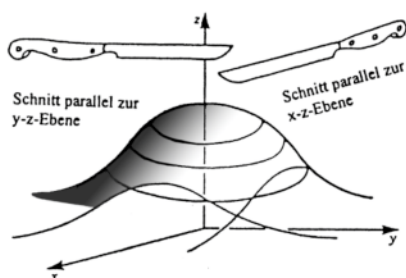


14 Partielle Ableitung, totales Differential und Gradient

14.1 Die partielle Ableitung

Die geometrische Bedeutung der Ableitung einer Funktion mit einer Variablen ist bekanntlich die Steigung der Tangente an die Funktionskurve. Wir befassen uns nun mit dem Problem, Steigungen für Flächen im Raum zu bestimmen.



In Abschnitt 13.1 hatten wir die Funktion

$$z = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$$

als Beispiel für eine Funktion zweier Variablen betrachtet. Sie stellt eine Fläche im dreidimensionalen Raum dar.

Setzen wir eine der Variablen konstant, erhalten wir eine Schnittkurve der Funktion mit einer Ebene.

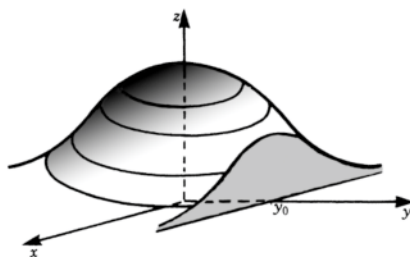
Zwei Typen von Schnittkurven der Fläche mit Schnittebenen kennen wir bereits:

Schnittkurven mit Ebenen parallel zur x-z-Ebene:

Die Schnittebene habe den Abstand y_0 von der x-z-Ebene. Die Gleichung der Schnittkurve erhalten wir, indem wir in die Funktionsgleichung den Abstand y_0 einsetzen.

$$z(x) = \frac{1}{1 + x^2 + y_0^2}$$

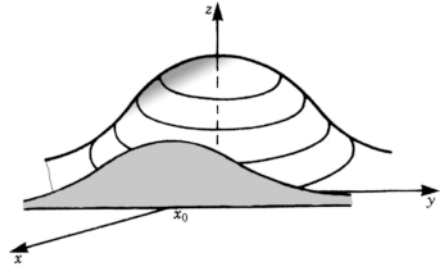
In diesem Fall ist z dann nur noch eine Funktion von x .



Schnittkurven mit Ebenen parallel zur y-z-Ebene:

Die Schnittebene habe den Abstand x_0 von der y-z-Ebene. Die Gleichung der Schnittkurve erhalten wir, indem wir den Wert x_0 in die Funktionsgleichung einsetzen. In diesem Fall ist z dann nur noch eine Funktion von y .

$$z(y) = \frac{1}{1 + x_0^2 + y^2}$$

*Steigung der Schnittkurven*

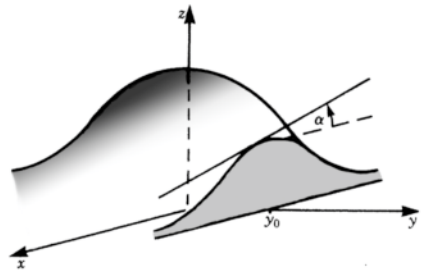
Für die Schnittkurven parallel zur x-z-Ebene können wir die Steigung sofort angeben. Für die Schnittkurve ist y eine Konstante.

Wir haben also eine Funktion mit einer Variablen. Die Steigung ist durch die Ableitung der Funktion $z = z(x)$ nach x gegeben.

Für diese neue Art der Ableitung benutzen wir statt des Zeichens d das stilisierte Zeichen δ (sprich: Delta).¹

$$\frac{\delta f}{\delta x} = \frac{\delta z}{\delta x} = \frac{\delta}{\delta x} \left[\frac{1}{1 + x^2 + y^2} \right]$$

(Sprechweise: Delta f nach Delta x)



Da y für die Schnittkurve konstant ist – wir könnten auch schreiben y_0 – erhalten wir:

$$\frac{\delta f}{\delta x} = -\frac{2x}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

Diese Operation heißt *partielle Ableitung*.

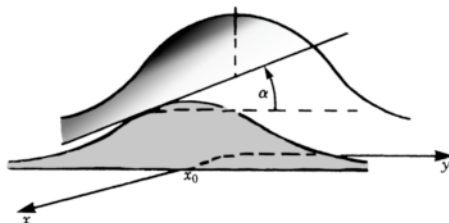
Rechenregel: Bei der *partiellen Ableitung* nach x wird nur nach x differenziert. Die Variable y wird dabei als Konstante betrachtet. Beispiel:

$$\frac{\delta f}{\delta x} = \frac{\delta z}{\delta x} = \frac{\delta}{\delta x} \left(\frac{1}{1 + x^2 + y^2} \right) = \frac{-2x}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

Für die Schnittkurven parallel zur y-z-Ebene können wir ebenfalls die Steigung angeben.

¹In der Literatur sind auch andere Symbole für die partielle Ableitung in Gebrauch wie ∂ oder ϑ .

Die Steigung dieser Kurven ist nun nicht mehr durch die partielle Ableitung nach x gegeben, sondern hier müssen wir die partielle Ableitung nach y bilden. Das ist etwas Neues.



Rechenregel: Bei der partiellen Ableitung nach y wird x als Konstante betrachtet, und nach y wird differenziert. Beispiel:

$$\frac{\delta f}{\delta y} = \frac{\delta z}{\delta y} = \frac{\delta}{\delta y} \left(\frac{1}{1 + x^2 + y^2} \right) = -\frac{2y}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

Funktionen mit drei Variablen lassen sich nicht mehr anschaulich geometrisch im dreidimensionalen Raum deuten. Dabei kommen sie häufig vor. Als Beispiel kennen wir bereits die Temperatur als Funktion der drei Ortskoordinaten: $T = T(x, y, z)$. Für die Funktion $f = f(x, y, z)$ gibt es drei partielle Ableitungen.

	Rechenregel	Beispiel: $f(x, y, z) = 2x^3y + z^2$
Partielle Ableitung nach x	alle Variablen außer x werden als Konstante betrachtet. Es wird nur nach der Variablen x differenziert	$\frac{\delta f}{\delta x} = 6x^2y$
Partielle Ableitung nach y	alle Variablen außer y werden als Konstante betrachtet. Es wird nur nach der Variablen y differenziert.	$\frac{\delta f}{\delta y} = 2x^3$
Partielle Ableitung nach z	alle Variablen außer z werden als Konstante betrachtet. Es wird nur nach der Variablen z differenziert.	$\frac{\delta f}{\delta z} = 2z$

Für die partiellen Ableitungen gibt es eine weitere oft benutzte einfache Schreibweise: $f(x, y, z)$ sei eine Funktion von x, y und z . Dann benutzt man tiefgestellte Indizes und schreibt auch:

$$\frac{\delta f}{\delta x} = f_x \quad \frac{\delta f}{\delta y} = f_y \quad \frac{\delta f}{\delta z} = f_z$$

Beispiel: $f(x, y, z) = x \cdot y \cdot z$

$$f_x = \frac{\delta f}{\delta x} = y \cdot z$$

$$f_y = \frac{\delta f}{\delta y} = x \cdot z$$

$$f_z = \frac{\delta f}{\delta z} = x \cdot y$$

14.1.1 Mehrfache partielle Ableitung

Die partiellen Ableitungen sind wieder Funktionen der unabhängigen Variablen x, y, \dots . Deshalb können wir sie erneut partiell differenzieren.

Beispiel: Es sei $f(x, y, z) = \frac{x}{y} + 2z$. Wir suchen

$$\frac{\delta}{\delta x} \left(\frac{\delta}{\delta y} f(x, y, z) \right)$$

Hier ist die Schreibweise mit dem tiefgestellten Index besonders übersichtlich.

$$\frac{\delta}{\delta x} \left(\frac{\delta f}{\delta y} \right) = \frac{\delta}{\delta x} f_y = f_{xy}$$

Reihenfolge: zuerst wird nach y differenziert, dann nach x . Die Indexkette wird von rechts nach links abgearbeitet.¹

Wir bilden zuerst die partielle Ableitung nach y für $f(x, y, z) = \frac{x}{y} + 2z$.

$$\frac{\delta f}{\delta y} = f_y = -\frac{x}{y^2}$$

Dann differenzieren wir f_y nach x :

$$\frac{\delta}{\delta x} (f_y) = f_{xy} = -\frac{1}{y^2}$$

¹ Bei den meisten in der Physik vorkommenden Funktionen gilt bei mehrfachen partiellen Ableitungen $f_{xy} = f_{yx}$. Es gibt aber auch Funktionen, bei denen die Reihenfolge der Ableitung beachtet werden muß und bei denen gilt $f_{xy} \neq f_{yx}$.

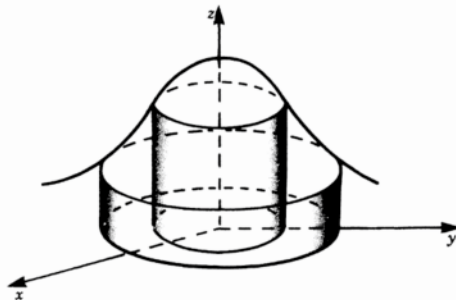
14.2 Das totale Differential

Funktion zweier Variablen

Wir betrachten die Funktion $z = \frac{1}{1+x^2+y^2}$. Sie stellt eine Fläche im Raum dar.

Auf dieser Fläche gibt es *Linien gleicher Höhe* z .

Sehen wir senkrecht von oben auf die x - y -Ebene, so erhalten wir die Projektionen dieser Linien gleicher Höhe auf die x - y -Ebene. Diese Projektionen heißen *Höhenlinien*, weil mit ihrer Hilfe auf Landkarten Gebirgszüge dargestellt werden, die ja auch Flächen im Raum sind. In unserem Fall erhalten wir als Höhenlinien eine Reihe von ineinanderliegenden Kreisen. Die Linien gleicher Höhe sind hier Kreise im Raum.



Wir betrachten jetzt die Linien gleicher Höhe mit äquidistanten Höhenabständen. Dann liegen die zugehörigen Höhenlinien in der x - y -Ebene dort am dichtesten, wo unser „Berg“ am steilsten ist.

Die Linie gleicher Höhe ist die Schnittkurve der Ebene $z = c_i$ mit der Fläche

$$z = \frac{1}{1+x^2+y^2}$$

Gleichsetzten ergibt: $c_i = \frac{1}{1+x^2+y^2}$

Diese Gleichung ist gleichzeitig die Gleichung für die Höhenlinie in der x - y -Ebene. Wir formen diese Gleichung um zu:

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{c_i} - 1$$

Aus der letzten Beziehung sehen wir, daß wir eine Gleichung für einen Kreis mit dem Radius $R = \sqrt{\frac{1}{c_i} - 1}$ erhalten haben. Je größer wir die Höhe c_i wählen, desto kleiner ist der Kreisradius.

Wir suchen nun die *Richtung* des steilsten Anstiegs oder Abfalls der Fläche

$$z = \frac{1}{1+x^2+y^2}$$

Aus der Zeichnung sieht man, daß der „Berg“ in unserem Beispiel offenbar für jeden Punkt in radialer Richtung am steilsten abfällt.

Wir gehen vom Punkt A' in der x - y -Ebene einmal um die Strecke dr

- a) in beliebiger Richtung \vec{dr} ;
- b) senkrecht zu einer Höhenlinie \vec{dr}_s ;
- c) entlang einer Höhenlinie \vec{dr}_h ;

Das entspricht auf der Fläche den Wegen \vec{AC} , \vec{AB} , \vec{AD} .

Für den Weg \vec{AD} entlang einer Linie gleicher Höhe ist

$$dz_{\vec{AD}} = 0$$

Am stärksten verändert sich die Funktion z auf dem Weg \vec{AB} senkrecht zu den Linien gleicher Höhe.

Für alle übrigen Wege gilt

$$0 \leq dz \leq dz_{\vec{AB}} \quad \text{also auch} \quad 0 \leq dz_{\vec{AC}} \leq dz_{\vec{AB}}$$

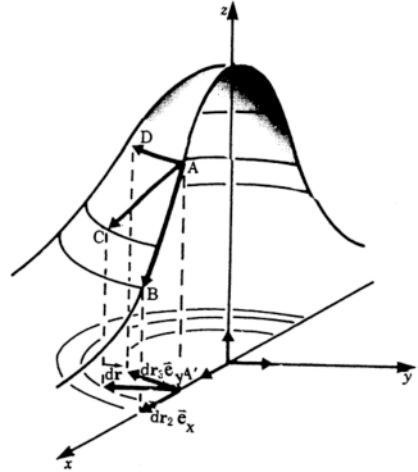
Wir stellen uns jetzt die Frage, wie sich die Funktion $z = f(x, y)$ ändert, wenn wir ein Stück \vec{dr} in einer beliebigen Richtung $\vec{dr} = (dx, dy)$ gehen.

Die Änderung von $f(x, y)$ erhalten wir in zwei Schritten:

1. Wir gehen um dx in x -Richtung (y bleibt dabei konstant)
2. Wir gehen um dy in y -Richtung (x bleibt dabei konstant)

Der Gesamtweg ist in Vektorschreibweise:

$$\vec{dr} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y$$



1. Schritt: Die Änderung einer Funktion mit einer unabhängigen Variablen war in erster Näherung gegeben durch das Differential

$$dy = \frac{df(x)}{dx} dx = f'(x) \cdot dx$$

Jetzt haben wir eine Funktion zweier Variablen.

$z = f(x, y)$. Wenn wir in x -Richtung um dx fortschreiten (y bleibt dabei konstant) erhalten wir für die Änderung von z :

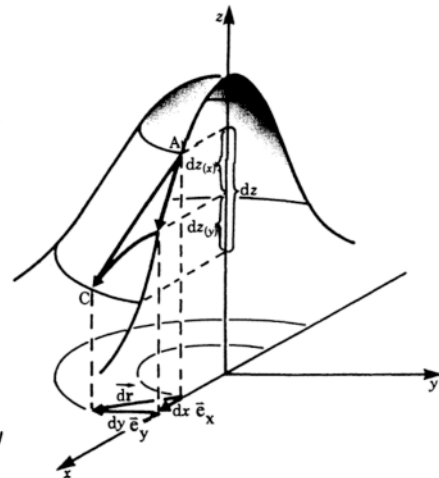
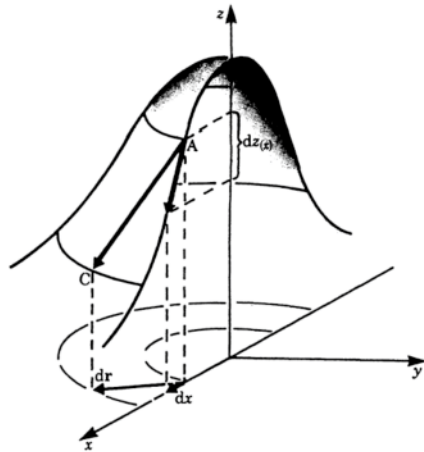
$$dz_{(x)} = \frac{\delta f(x, y)}{\delta x} dx$$

2. Schritt: Wenn wir in y -Richtung um dy fortschreiten (x bleibt dabei konstant) erhalten wir für die Änderung von z den Wert

$$dz_{(y)} = \frac{\delta f}{\delta y} dy$$

Die Gesamtänderung von z ergibt sich als Summe der beiden Teiländerungen. Sie heißt totales Differential.

$$dz = dz_{(x)} + dz_{(y)} = \frac{\delta f}{\delta x} dx + \frac{\delta f}{\delta y} dy$$



Definition: Das totale Differential der Funktion $z = f(x, y)$ ist die Größe

$$dz = \frac{\delta f}{\delta x} dx + \frac{\delta f}{\delta y} dy$$

Das totale Differential ist ein Maß für die Änderung der Funktion $z = f(x, y)$, wenn wir vom Punkt $A = (x, y)$ ein Stück in die Richtung $d\vec{r} = (dx, dy)$ gehen.

1. Beispiel: Wir betrachten die Funktion $z = x^2 + y^2$
 Das totale Differential ist $dz = 2x dx + 2y dy$
2. Beispiel: Wir betrachten die Funktion

$$f(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$$

Das totale Differential ist

$$dz = \frac{-2x}{(1 + x^2 + y^2)^2} dx - \frac{2y}{(1 + x^2 + y^2)^2} dy$$

Verallgemeinerung auf Funktionen dreier Variablen.

Im Falle einer Funktion dreier Variablen $f(x, y, z)$ verallgemeinert man das *totale Differential* entsprechend zu

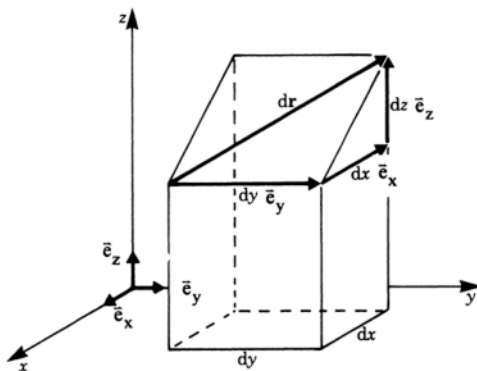
$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

Auch hier ist das totale Differential ein Maß für die Änderung der Funktion $z = f(x, y, z)$. Wenn wir ein Stück in die Richtung $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$ gehen, ändert sich die Funktion $f(x, y, z)$ um den durch das totale Differential gegebenen Betrag.

Beispiel: $f(x, y, z) = x \cdot y \cdot z$

Das totale Differential ist

$$df = yz \cdot dx + xz \cdot dy + xy \cdot dz$$



14.3 Der Gradient

14.3.1 Gradient bei Funktionen zweier Variablen

Das totale Differential einer Funktion zweier Variablen $z = f(x, y)$ war definiert als $dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$.

Behauptung: Das totale Differential läßt sich formal schreiben als Skalarprodukt der folgenden Vektoren $\left(\frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y\right)$ und \vec{dr} . Dabei bezeichnet dr das Wegelement und $\left(\frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y\right)$ wird als ein neuer Vektor definiert.

Diese Behauptung verifizieren wir.

$$dz = \left(\frac{\delta f}{\delta x} \vec{e}_x + \frac{\delta f}{\delta y} \vec{e}_y \right) \cdot (dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y)$$

$$dz = \frac{\delta f}{\delta x} dx \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x + \frac{\delta f}{\delta y} dy \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y + \frac{\delta f}{\delta x} dy \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y + \frac{\delta f}{\delta y} dx \vec{e}_y \cdot \vec{e}_x$$

$$dz = \frac{\delta f}{\delta x} dx + \frac{\delta f}{\delta y} dy$$

Damit ist unsere Behauptung bewiesen. Der neu definierte Vektor heißt *Gradient* und wird abgekürzt grad geschrieben.

Definition: Der *Gradient* der Funktion $z = f(x, y)$ ist der folgende Vektor:

$$\text{grad } f(x, y) = \left(\frac{\delta f}{\delta x} e_x + \frac{\delta f}{\delta y} e_y \right) = \left(\frac{\delta f}{\delta x}, \frac{\delta f}{\delta y} \right)$$

Der Gradient hat zwei anschauliche Eigenschaften:

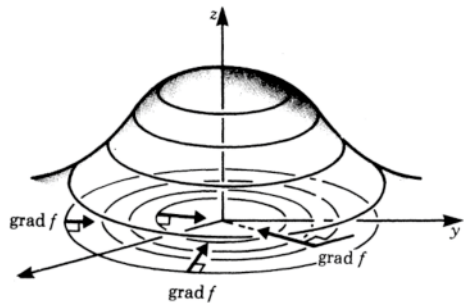
- Der Gradient steht senkrecht auf den Höhenlinien und zeigt in diejenige Richtung, in der sich die Funktionswerte $z = f(x, y)$ am stärksten ändern.
- Der Betrag des Gradienten ist ein Maß für die Änderung des Funktionswertes senkrecht zu den Höhenlinien.

Diese beiden Eigenschaften wollen wir jetzt herleiten. Betrachten wir zunächst das Skalarprodukt

$$\text{grad } f \cdot \vec{dz} = dz$$

Legen wir \vec{dr} in eine der Höhenlinien, dann gilt $dz = 0$. Denn eine Höhenlinie ist die Projektion einer Linie gleicher Höhe. Bei der Bewegung auf dieser Linie ändert sich z nicht und deshalb muß dafür $dz = 0$ gelten. Daraus folgt

$$df = \text{grad } f \cdot \vec{dr} = 0$$



Aus Kapitel 2 wissen wir:

Das Skalarprodukt zweier Vektoren, von denen keiner der Nullvektor ist, verschwindet genau dann, wenn die beiden Vektoren senkrecht aufeinander stehen. Da weder $\text{grad } f$ noch \vec{dr} ein Nullvektor ist, stehen $\text{grad } f$ und \vec{dr} senkrecht aufeinander. Daraus folgt: *Der Gradient steht senkrecht auf der Höhenlinie.*

Dieses Ergebnis wollen wir an unserem Beispiel $f(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$ verifizieren.

Der Gradient ist: $\text{grad } f = - \left[\frac{2x}{(1+x^2+y^2)^2}, \frac{2y}{(1+x^2+y^2)^2} \right]$.

Dies ist ein Radialvektor, und der Gradient steht damit senkrecht auf den Höhenlinien um den Koordinatenursprung.

Das Differential df gibt die Änderung des Funktionswertes bei einem Zuwachs der Koordinaten x und y um dx und dy an.

Wir kommen jetzt zur zweiten Eigenschaft des Gradienten. Wir gehen von folgender Frage aus: In welcher Richtung ändert sich die Funktion $z = f(x, y)$ bei gleichem \vec{dr} am meisten? Wir suchen das Maximum von df . Es gilt

$$df = \text{grad } f \cdot \vec{dr} = |\text{grad } f| |\vec{dr}| \cos \alpha \quad \alpha \text{ ist der Winkel zwischen } \text{grad } f \text{ und } \vec{dr}.$$

$\text{grad } f$ ist ein Vektor, der senkrecht auf der Höhenlinie steht. Wir lassen jetzt \vec{dr} verschiedene Richtungen annehmen. Der Betrag von \vec{dr} sei konstant. Variabel sei allein die Richtung von \vec{dr} und damit $\cos \alpha$.

Das Maximum von $\cos \alpha$ liegt bei $\alpha = 0$ mit $\cos(0) = 1$. Dann haben $\text{grad } f$ und \vec{dr} die gleiche Richtung. In diesem Fall gibt der Betrag des Gradienten die Änderung von df senkrecht zu den Höhenlinien an.

Wir hatten dieses Ergebnis für unser Beispiel bei der Behandlung des totalen Differentials df bereits anschaulich erhalten.

Es gibt eine Reihe von Bezeichnungen für den Gradienten von z . Üblich sind:

$$\text{grad } f = \text{grad } z = \frac{\delta f}{\delta x} i + \frac{\delta f}{\delta y} j$$

$$\text{grad } f = \left(\frac{\delta f}{\delta x}, \frac{\delta f}{\delta y} \right)$$

$$\text{grad } f = \vec{\nabla} f$$

$\vec{\nabla}$ wird *Nabla-Operator* genannt und es gilt formal

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\delta}{\delta x}, \frac{\delta}{\delta y} \right)$$

Mit Hilfe des Nabla-Operators läßt sich die Schreibweise oft verkürzen. Der Nabla-Operator wird formal so behandelt wie ein Vektor. Die Multiplikation des Nabla-Operators mit einer skalaren Größe führt dann zu einem Vektor.

$$\vec{\nabla} \cdot f(x, y) = \left(\frac{\delta}{\delta x}, \frac{\delta}{\delta y} \right) \cdot f(x, y) = \left(\frac{\delta f}{\delta x}, \frac{\delta f}{\delta y} \right)$$

14.3.2 Gradient bei Funktionen dreier Variablen

Gegeben sei eine Funktion der drei Variablen x , y und z . Das ist ein skalares Feld $\varphi = \varphi(x, y, z)$ (siehe Abschnitt 13.2) Die Gesamtheit der Raumpunkte, in denen das skalare Feld den Wert c annimmt, bildet eine Fläche im Raum. Diese Flächen, auf denen der Funktionswert $\varphi(x, y, z)$ überall den gleichen Wert hat, werden *Flächen gleichen Niveaus* oder *Niveauflächen*³ genannt.

Flächen gleichen Niveaus oder Niveauflächen sind festgelegt durch die Bestimmungsgleichung.

$$\varphi(x, y, z) = c = \text{const.}$$

Diese Beziehung können wir nach z auflösen und erhalten die Gleichung der Niveaufläche

$$z = g(x, y)$$

Wir wollen jetzt den Begriff des Gradienten auf Funktionen mit drei Veränderlichen übertragen. Sinngemäß erhalten wir

$$\text{grad } f(x, y, z) = \left(\frac{\delta f}{\delta x}, \frac{\delta f}{\delta y}, \frac{\delta f}{\delta z} \right)$$

Seine Eigenschaften bleiben erhalten. Nur ist jetzt der Gradient ein Vektor im dreidimensionalen Raum und der Begriff der Höhenlinien muß ersetzt werden durch Flächen gleichen Niveaus oder Niveauflächen. Damit besitzt der Gradient bei Funktionen dreier Veränderlicher folgende anschauliche Eigenschaften:

- Der Gradient steht senkrecht auf Flächen gleichen Funktionswertes.
- Der Betrag des Gradienten ist ein Maß für die Änderung des Funktionswertes pro Weeinheit senkrecht zu den Niveauflächen.

1. Beispiel: Welche Flächen gleichen Niveaus hat die Funktion
 $f(x, y, z) = -x - y + z$?

Wir setzen $f(x, y, z) = c$:

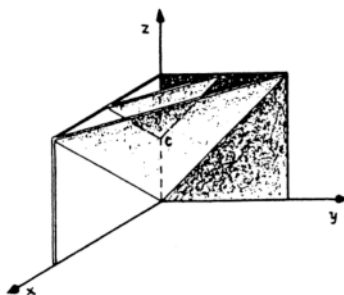
$$c = -x - y + z$$

³Physikalische Beispiele: Temperaturverteilung – Flächen gleichen Niveaus sind Flächen gleicher Temperatur (Isothermen); Flächen gleicher potentieller Energie; Flächen gleicher elektrischer Spannung.

oder umgeformt

$$z = x + y + c$$

Zwei Ausschnitte dieser Flächen sind für $c = 0$ und ein positives c rechts skizziert. Es sind Ebenen. Die Schnittgerade mit der x - z Ebene ist um 45° gegen die x -Achse geneigt, die Schnittgerade mit der y - z Ebene ist um 45° gegen die y -Achse geneigt.



Berechnen wir den Gradienten von $f(x, y, z)$ und überprüfen wir, ob er senkrecht auf dieser Ebene steht.

$$\text{grad } f(x, y, z) = (-1, -1, 1)$$

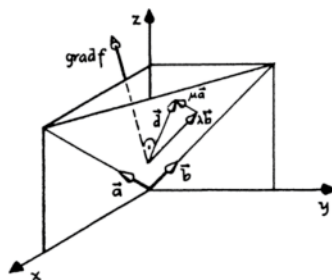
Tragen wir diesen Vektor im Punkt $(0, 0, c)$ in die letzte Skizze ein, dann steht er senkrecht auf der Ebene, die durch $z = x + y + c$ gebildet wird.

Beweis: Ein beliebiger Vektor \vec{d} , der in der Ebene liegt, kann als Linearkombination der beiden Einheitsvektoren \vec{a} und \vec{b} geschrieben werden. \vec{a} und \vec{b} liegen in der Schnittgeraden der x - z -Ebene bzw. y - z -Ebene mit der Ebene $z = x + y + c$. Es gilt:

$$\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1), \quad \vec{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$$

und damit

$$\vec{d} = \mu \vec{a} + \lambda \vec{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mu, \lambda, \mu + \lambda)$$



Das Skalarprodukt von \vec{d} mit $\text{grad } f$ muß verschwinden, wenn beide senkrecht aufeinander stehen.

$$\begin{aligned} \vec{d} \cdot \text{grad } f &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mu, \lambda, \mu + \lambda) \cdot (-1, -1, 1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\mu - \lambda + \mu + \lambda) = 0. \end{aligned}$$

Also steht $\text{grad } f$ senkrecht auf der Ebene $z = x + y + c$.

2. Beispiel: Bestimmung der Niveauflächen des skalaren Feldes

$$\varphi(x, y, z) = \frac{A}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{A}{r^2}$$

Die Niveauflächen sind durch die Gleichung $\varphi(x, y, z) = c$ definiert. In unserem Falle erhalten wir die Niveauflächen aus der Gleichung

$$\frac{A}{x^2 + y^2 + z^2} = c$$

Auflösen nach z liefert die beiden Gleichungen

$$z_1 = \sqrt{\left(\frac{A}{c}\right) - x^2 - y^2} \quad \text{Das ist eine Kugelschale über der x-y-Ebene.}$$

$$z_2 = -\sqrt{\left(\frac{A}{c}\right) - x^2 - y^2} \quad \text{Das ist eine Kugelschale unter der x-y-Ebene.}$$

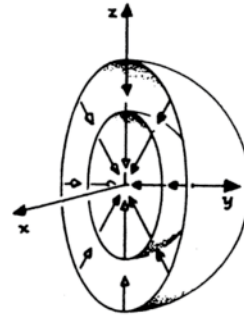
Die Niveauflächen sind also Kugelschalen mit dem Radius $R = \sqrt{\frac{A}{c}}$

Bilden wir nun den Gradienten von φ :

$$\text{grad } \varphi = -2 \frac{A}{r^4} (x, y, z)$$

Dies ist ein Radialvektor, der seinen Anfangspunkt auf der Niveaufläche hat.

Das heißt aber, daß der Vektor $\text{grad } \varphi$ senkrecht auf der Niveaufläche steht, weil sie eine Kugelschale ist. Damit ist die Eigenschaft des Gradienten, daß er senkrecht auf den Niveauflächen steht, für unser Beispiel verifiziert.



Unserem Beispiel können wir weiterhin entnehmen, daß der Gradient in die Richtung der stärksten Änderung von φ zeigt.

Der Betrag von $\text{grad } \varphi = -2 \frac{A}{r^4} (x, y, z)$ ist

$$|\text{grad } \varphi| = 2 \frac{A}{r^3}$$

Dies ist ein Maß dafür, wie stark sich die Funktionswerte in radialer Richtung ändern. Je näher wir dem Koordinatenursprung kommen ($r \rightarrow 0$), um so stärker ändern sich φ und $\text{grad } \varphi$.

Anhand unseres Beispiels haben wir damit folgende Eigenschaften des Gradienten verifiziert:

- Der Gradient einer Funktion $\varphi(x, y, z)$ ist ein Vektor:

$$\text{grad } \varphi = \left(\frac{\delta \varphi}{\delta x}, \frac{\delta \varphi}{\delta y}, \frac{\delta \varphi}{\delta z} \right)$$

- Der Gradient steht senkrecht auf den Niveauflächen $\varphi = \text{const.}$ Er zeigt in die Richtung der größten Veränderung der Funktionswerte $\varphi = \varphi(x, y, z)$.
- Der Betrag des Gradienten ist ein Maß für die Änderung des Funktionswertes senkrecht zu den Niveauflächen pro Weeinheit.

14.4 Übungsaufgaben

- 14.1 A Bilden Sie die partiellen Ableitungen nach x, y und ggf. nach z von den Funktionen

a) $f(x, y) = \sin x + \cos y$

b) $f(x, y) = x^2 \sqrt{1 - y^2}$

c) $f(x, y) = e^{-(x^2 + y^2)}$

d) $f(x, y, z) = xyz + xy + z$

- 14.1 B Berechnen Sie die Steigung der Tangente in x - und y -Richtung für die Fläche $z = x^2 + y^2$ im Punkt $P = (0, 1)$

- 14.1.1 Berechnen Sie die partiellen Ableitungen f_{xx} , f_{xy} , f_{yx} und f_{yy} der Funktion

$$z = R^2 - x^2 - y^2$$

- 14.2 A Bestimmen Sie die Linien gleicher Höhe, die den Abstand 0,5 von der x - y -Ebene haben, für die Flächen

a) $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}$

b) $z = -x - 2y + 2$

Geben Sie die Funktionsgleichungen der zugehörigen Höhenlinien an.

- 14.2 B Berechnen Sie das totale Differential für die Funktionen

a) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

b) $z = x^2 + y^2$

c) $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

- 14.3.1 Von den skalaren Feldern $\varphi(x, y)$ sind der Gradient und die Höhenlinien zu berechnen. φ beschreibt eine Fläche.

a) $\varphi = -x - 2y + 2$

b) $\varphi = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}$

c) $\varphi = \frac{10}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

- 14.3.2 A Welche Form haben die Niveauflächen der skalaren Felder

a) $\varphi(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}$

b) $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2$

c) $\varphi(x, y, z) = x + y - 3z$

- B Berechnen Sie die Gradienten für diese drei skalaren Felder.

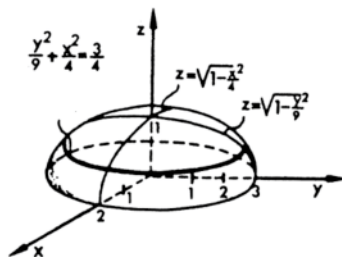
Lösungen

14.1 A a) $f_x = \cos x$ $f_y = -\sin x$
 b) $f_x = 2x\sqrt{1-y^2}$ $f_y = \frac{-x^2 y}{\sqrt{1-y^2}}$
 c) $f_x = -2xe^{-(x^2+y^2)}$ $f_y = -2ye^{-(x^2+y^2)}$
 d) $f_x = yz + y$ $f_y = xz + x$ $f_z = xy + 1$

14.1 B Tangente in x -Richtung: $2x$
 Steigung in x -Richtung im Punkt P: 0
 Tangente in y -Richtung: $2y$
 Steigung in y -Richtung im Punkt P: 2

14.1.1 $f_{xx} = -2$ $f_{yx} = 0$
 $f_{xy} = 0$ $f_{yy} = -2$

14.2 A a) $z = 0,5 = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}$



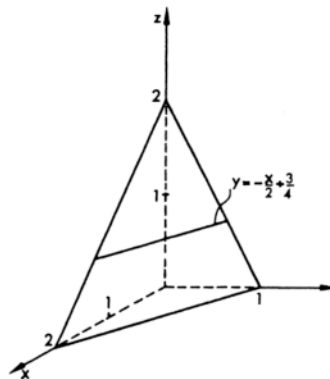
Die Höhenlinie ist durch die Beziehung $\frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{4} = \frac{3}{4}$ gegeben.

Dies ist eine Ellipse.

b) $z = 0,5 = -x - 2y + 2$

Gleichung der Höhenlinie:

$$y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{4}$$



14.2 B a) $dz = \frac{-x dx}{\sqrt{1-x^2-y^2}} - \frac{y dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

b) $dz = 2x dx + 2y dy$

c) $df = -\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} (x dx + y dy + z dz)$

14.3.1 a) $\text{grad } \varphi = (-1, -2)$

Die Höhenlinien sind Geraden mit der Gleichung

$$y = -\frac{x}{2} + 1 - \frac{c}{2}$$

b) $\text{grad } \varphi = \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}} \left(\frac{x}{4}, \frac{y}{9}\right)$

Die Höhenlinien sind Ellipsen, sie erfüllen die Gleichung

$$c^2 - 1 = -\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$$

c) $\text{grad } \varphi = -\frac{10}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} (x, y)$

Die Höhenlinien sind Kreise mit dem Radius c .

14.3.2 A a) Die Niveauflächen sind Kugelschalen, sie erfüllen die Gleichung

$$c^{\frac{2}{3}} = x^2 + y^2 + z^2$$

b) Die Niveauflächen sind Zylinder mit dem Radius $c^{\frac{1}{2}}$ und erfüllen die Gleichung $x^2 + y^2 = c$

c) Die Niveauflächen sind Ebenen mit der Gleichung

$$z = \frac{x}{3} + \frac{y}{3} - \frac{c}{3}$$

14.3.2 B a) $\text{grad } \varphi = 3(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} (x, y, z)$

b) $\text{grad } \varphi = (2x, 2y, 0)$

c) $\text{grad } \varphi = (1, 1, -3)$

<http://www.springer.com/978-3-642-25518-2>

Mathematik für Physiker und Ingenieure 2

Basiswissen für das Grundstudium - mit mehr als 900

Aufgaben und Lösungen online

Weltner, K.

2013, IX, 237 S. 210 Abb. Mit Online-Extras., Softcover

ISBN: 978-3-642-25518-2