2 Skalarprodukt, Vektorprodukt

Es gibt zwei verschiedene Verknüpfungsregeln für das Produkt von Vektoren.

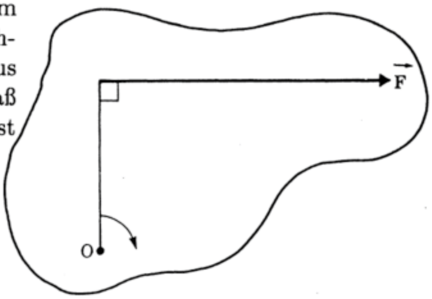
Die mechanische Arbeit ist definiert als Produkt aus Kraft und Weg.[1] Vorausgesetzt wird dabei, daß Kraft und Weg gleiche Richtung haben. Ist das nicht der Fall, gilt:

> Arbeit ist das Produkt aus Weg und
> Kraftkomponente in Wegrichtung.

Die Bestimmung der Arbeit ist eine neue Verknüpfung zweier vektorieller Größen. Das Ergebnis ist ein Skalar. Die Verknüpfung ist ein Beispiel für das *Skalarprodukt*.

Das Drehmoment[2] einer Kraft, die an einem Körper angreift, der um eine Achse drehbar gelagert ist, ist definiert als Produkt aus Kraft und Hebelarm. Vorausgesetzt ist, daß die Kraft senkrecht am Hebelarm angreift. Ist das nicht der Fall, gilt:

> Das Drehmoment ist das Produkt
> aus Hebelarm und Kraftkomponente
> senkrecht zum Hebelarm.



Das Ergebnis ist ein Vektor – das Drehmoment – in Richtung der Drehachse. Eine Verknüpfung zweier vektorieller Größen, die der Bildung des Drehmoments entspricht, ist das *Vektorprodukt*.

Im folgenden wird zunächst jeweils das physikalische Ausgangsproblem und seine Lösung entwickelt und daraufhin wird die allgemeine Verknüpfungsregel definiert.

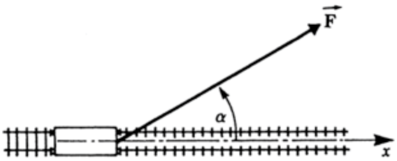
2.1 Skalarprodukt

Physikalisches Ausgangsproblem:
Wir betrachten einen von Schienen geführten Wagen, der sich nur in Richtung der x-Achse bewegen kann.

[1] Unter Weg verstehen wir die Ortsverschiebung des Punktes, an dem die Kraft angreift.
[2] Die Begriffe Arbeit und Drehmoment sind ausführlich dargestellt in:
Martienssen: Einführung in die Physik, Akad. Verlagsgesellschaft, Wiesbaden, Band 1.
Gerthsen, Kneser, Vogel: Physik, Berlin-Heidelberg, 1989

K. Weltner, *Mathematik für Physiker und Ingenieure 1*, Springer-Lehrbuch,
DOI 10.1007/978-3-642-30085-1_2, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2013

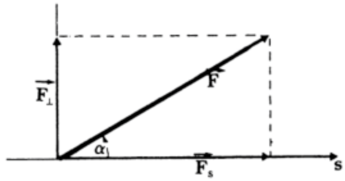
An dem Wagen greife eine konstante Kraft $\vec{F}$ an, die mit der Fahrtrichtung den Winkel α bildet.
Gesucht ist die Arbeit, die von $\vec{F}$ bei einer Fortbewegung des Wagens um eine Strecke $\vec{s}$ geleistet wird.



Um die Wirkung der Kraft $\vec{F}$ zu studieren, zerlegen wir sie in zwei Komponenten:

Kraftkomponente in Richtung des Weges: $\vec{F_s}$

Kraftkomponente senkrecht zum Weg: $\vec{F}_\perp$



Die Arbeit ist das Produkt aus Kraft und zurückgelegtem Weg für eine Kraft in Richtung des Weges. Das ist der Fall für die Kraftkomponente in Wegrichtung. Eine zum Weg senkrechte Kraft leistet keine Arbeit.[3]
Das ist der Fall für die Kraftkomponente senkrecht zum Weg.

Die Kraftkomponente in Wegrichtung ist die Projektion von $\vec{F}$ auf den Weg $\vec{s}$.

Die Projektion von $\vec{F}$ auf $\vec{s}$ ist

$$|\vec{F_s}| = |\vec{F}| \cdot \cos\alpha$$

Damit ist die Arbeit:

$$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos\alpha$$

Verallgemeinerung: Um die Arbeit zu berechnen, haben wir die Beträge zweier Vektoren miteinander multipliziert und die Richtungsabhängigkeit der Vektoren berücksichtigt. Als Ergebnis erhielten wir nicht einen Vektor, sondern einen Skalar. Diese Art der Multiplikation heißt *skalares* oder *inneres Produkt* zweier Vektoren.

Schreibweise: Arbeit $=$ W $= \vec{F} \cdot \vec{s}$

Für zwei beliebige Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die den Winkel α einschließen, erhalten wir als inneres Produkt $\vec{a} \cdot \vec{b} = |a| \cdot |b| \cdot \cos\alpha$

Definition: Das *innere* oder *skalare* Produkt zweier Vektoren ist gleich dem Produkt ihrer Beträge mit dem Kosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels α .

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$$

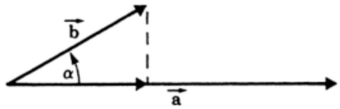
[3] Unmittelbar einsichtig ist dies, wenn man eine Bewegung in horizontaler Richtung unter dem Einfluß der Gewichtskraft betrachtet. Weg und Kraft stehen aufeinander senkrecht, es wird keine Arbeit geleistet.

Zur Schreibweise: Gleichwertig zur Notierung $\vec{a} \cdot \vec{b}$ sind die Schreibweisen: $(\vec{a},\, \vec{b})$ und $< \vec{a}, \vec{b} >$.

Geometrische Deutung: Das skalare Produkt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist gleich dem Produkt aus

dem Betrag des Vektors $\vec{a}$ und dem Betrag der Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$

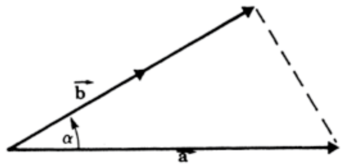
$\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\alpha$



oder dem Produkt aus

dem Betrag des Vektors $\vec{b}$ und dem Betrag der Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$

$\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{b}|\,|\vec{a}| \cos\alpha$



Diese Deutung können wir auf das Ausgangsproblem übertragen. Wir können die Arbeit auch so ermitteln, daß wir die Ortsverschiebung in zwei Komponenten zerlegen:

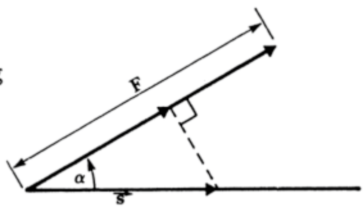
Wegkomponente in Kraftrichtung

Wegkomponente senkrecht zur Kraftrichtung

Auch dann gilt für die Arbeit:

$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$

$W = |\vec{F}|\,|\vec{s}| \cos\alpha$

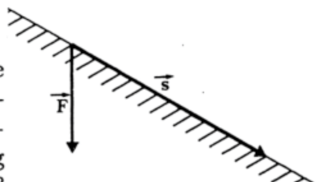


Beispiel: An einem Körper greife die Kraft $\vec{F}$ mit einem Betrag $|\vec{F}| = 5\,N$ an. Der Körper wird um die Wegstrecke $|\vec{s}| = 10\,m$ verschoben. Der von $\vec{F}$ und $\vec{s}$ eingeschlossene Winkel betrage $60°$. Die von $\vec{F}$ geleistete Arbeit W beträgt dann:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cos(60°)$$

$$W = 5N \cdot 10\,m \cdot \cos 60°$$

$$W = 5N \cdot 10\,m \cdot \frac{1}{2} = 25\,N \cdot m$$



Wichtig ist, bei physikalischen Größen jeweils die Maßeinheiten (N, m) mit zu berücksichtigen. Dieses Beispiel kann aufgefaßt werden als die Bewegung eines Körpers auf einer durch die Richtung von $\vec{s}$ gegebenen schiefen Ebene unter dem Einfluß der Gewichtskraft $\vec{F} = m\vec{g}$.

2.1.1 Sonderfälle

Skalarprodukt senkrecht aufeinander stehender Vektoren:
In diesem Fall ist $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und $\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

Damit ist das Skalarprodukt beider Vektoren 0.

Die Umkehrung dieses Sachverhalts ist wichtig: Ist bekannt, daß das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ verschwindet, folgt zwangsläufig, daß die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht aufeinander stehen, falls $\vec{a} \neq 0$ und $\vec{b} \neq 0$ ist.

> *Zwei Vektoren $\vec{a} \neq 0$ und $\vec{b} \neq 0$ stehen genau dann aufeinander senkrecht, wenn ihr inneres Produkt $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ist.*

Skalarprodukt paralleler Vektoren.
Der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossene Winkel ist Null. Wegen $\cos(0) = 1$ erhält man

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = a \cdot b \text{ daraus folgt weiter } \vec{a}\vec{a} = a^2$$

2.1.2 Kommutativ- und Distributivgesetz

Für das Skalarprodukt gelten das Kommutativgesetz und das Distributivgesetz. Beide werden hier ohne Beweis mitgeteilt.

Kommutativgesetz $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

Distributivgesetz $\quad \vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$

2.2 Kosinussatz

Mit Hilfe des inneren Produktes und des Distributivgesetzes läßt sich der Kosinussatz leicht gewinnen. Für die drei Vektoren in der Abbildung gilt:

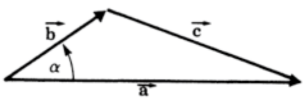
$$\vec{c} + \vec{b} = \vec{a} \qquad \vec{c} = (\vec{a} - \vec{b})$$

Bildet man das innere Produkt des Vektors $\vec{c}$ mit sich selbst, erhält man

$$c^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

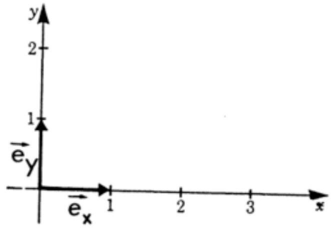
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2|\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\alpha$$



Das ist der bekannte Kosinussatz. Für $\alpha = 90°$ oder $\frac{\pi}{2}$ geht er in den Satz des Pythagoras für rechtwinklige Dreiecke über.

2.3 Skalares Produkt in Komponentendarstellung

Sind zwei Vektoren in Komponentendarstellung gegeben, läßt sich das Skalarprodukt berechnen. Für die Überlegung ist es hilfreich, zunächst die Ergebnisse des Skalarproduktes von Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen zu ermitteln. Das innere Produkt von Einheitsvektoren in gleicher Richtung ist 1; das innere Produkt von Einheitsvektoren, die senkrecht aufeinander stehen, verschwindet. Also gilt:

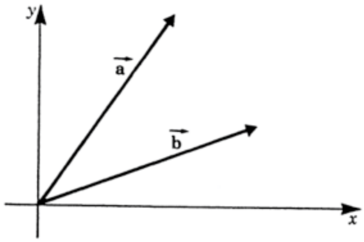


$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = 1$$

$$\vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = 1$$

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0$$

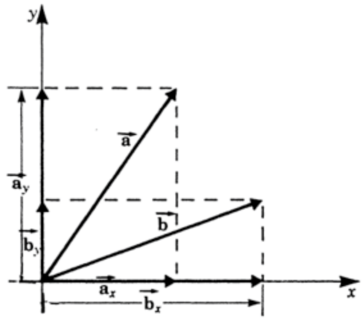
$$\vec{e}_y \cdot \vec{e}_x = 0$$



In einem ebenen kartesischen Koordinatensystem seien zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ so verschoben, daß sie im Nullpunkt beginnen. Wir stellen beide Vektoren mit ihren Komponenten dar:

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y$$

$$\vec{b} = b_x \cdot \vec{e}_x + b_y \cdot \vec{e}_y$$



In dem Ausdruck $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ersetzen wir die Vektoren durch ihre Komponenten.

Dann erhält man:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y) \cdot (b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y)$$

Ausmultipliziert ergibt sich

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x b_x \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x + a_x b_y \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y + a_y b_x \vec{e}_y \cdot \vec{e}_x + a_y b_y \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y)$$

Wir setzen die Ergebnisse der inneren Produkte der Einheitsvektoren ein:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y \tag{2.1}$$

Das Skalarprodukt ist die Summe der Produkte jener Komponenten, die gleiche Richtung haben. Bei räumlichen Vektoren muß zusätzlich die z-Koordinate betrachtet werden. Es gilt, ohne daß der Beweis hier geführt wird, die Regel:

Regel: Skalarprodukt in Komponentendarstellung[4]

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Damit ist auch ein einfacher Weg gegeben, den Betrag eines Vektors aus seinen Komponenten zu berechnen. Es gilt: $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$

In Komponenten:

$$a^2 = a_x a_x + a_y a_y + a_z a_z \qquad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Beispiel: Gegeben: $\vec{a} = (2,\ 3,\ 1), \vec{b} = (-1,\ 0,\ 4)$

Gesucht: Skalarprodukt der beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$

Lösung: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2(-1) + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 4 = -2 + 0 + 4 = 2$$

Als Betrag der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erhält man:

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a^2} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14} \approx 3,74$$

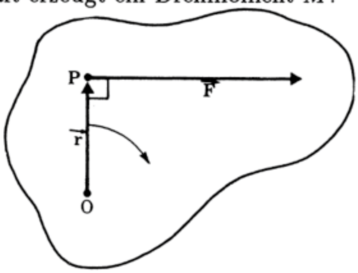
$$|\vec{b}| = b = \sqrt{b^2} = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17} \approx 4,12$$

2.4 Vektorprodukt

2.4.1 Drehmoment

Ein starrer Körper sei um eine feste Drehachse O drehbar gelagert. An diesem Körper greife im Punkt P eine Kraft $\vec{F}$ an. Die Kraft erzeugt ein Drehmoment M.

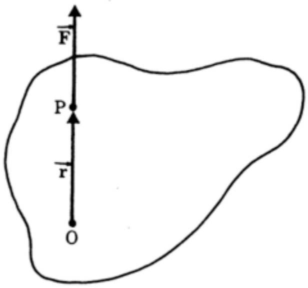
Erster Sonderfall: Der Ortsvektor von der Drehachse zum Punkt P und die Kraft stehen senkrecht aufeinander. Dann ist das Drehmoment gleich dem Produkt der Beträge von Ortsvektor $\vec{r}$ (Hebelarm) und Kraft $\vec{F}$.



$$M = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \quad \text{(Hebelgesetz)}$$

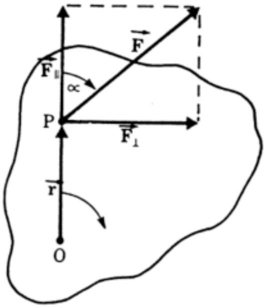
[4] Das Skalarprodukt führt unabhängig von der Lage des Koordinatensystems immer zu dem gleichen Zahlenwert. Dies gilt, obwohl sich bei einer Drehung des Koordinatensystems die einzelnen Komponenten der Vektoren im allgemeinen ändern.

Zweiter Sonderfall: Der Ortsvektor zum Angriffspunkt der Kraft und die Kraft haben die gleiche Richtung. Dann erzeugt die Kraft $\vec{F}$ kein Drehmoment auf den Körper.



$$M = 0$$

Im allgemeinen Fall schließen die Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{F}$ den Winkel α miteinander ein. Hier liegt es nahe, die Berechnung des Drehmomentes M auf die beiden Sonderfälle zurückzuführen. Dazu wird der Kraftvektor in zwei Komponenten zerlegt:



Eine Komponente senkrecht zu $\vec{r}$: $\vec{F}_{\perp}$

Eine Komponente in Richtung von $\vec{r}$: $\vec{F}_{\|}$

Nur die erste Komponente liefert einen Beitrag zum Drehmoment. Wenn $\vec{F}$ und $\vec{r}$ den Winkel α einschließen, erhalten wir die zu $\vec{r}$ senkrechte Komponente von $\vec{F}$ als Projektion von $\vec{F}$ auf eine Senkrechte zu $\vec{r}$:

$$|\vec{F}\perp| = |\vec{F}| \cdot \sin\alpha$$

Das Drehmoment kann nun als Produkt der Beträge von $\vec{r}$ mit der zu $\vec{r}$ senkrechten Komponenten von $\vec{F}$ aufgefaßt werden:

Definition:	Drehmoment $M = \|\vec{r}\| \cdot \|\vec{F}\| \cdot \sin\alpha$

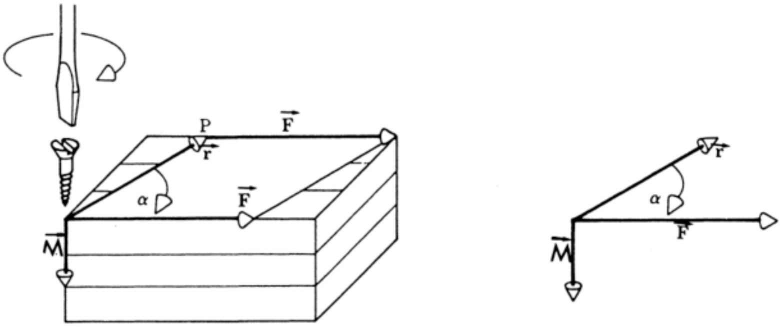
2.4.2 Das Drehmoment als Vektor

Das Drehmoment $\vec{M}$ ist eine vektorielle physikalische Größe. Dem Drehmoment müssen wir noch eine Richtung zuordnen, die den Drehsinn berücksichtigt. Hier gilt folgende Festlegung:

Der Drehmomentvektor $\vec{M}$ steht senkrecht auf der von den Vektoren $\vec{F}$ und $\vec{r}$ aufgespannten Ebene.

Der Vektor $\vec{M}$ weist in die Richtung, in die eine Rechtsschraube sich hineindrehen würde, wenn man $\vec{r}$ auf kürzestem Wege so dreht, daß $\vec{r}$ auf $\vec{F}$ fällt.

Wir wollen die beiden Aussagen anhand von Abbildungen erläutern. Die Drehachse gehe durch den Punkt A
Die Kraft $\vec{F}$ greife in P an. $\vec{r}$ sei der Ortsvektor von A nach P. Die beiden Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{F}$ bestimmen eine Ebene im Raum. $\vec{F}$ werde jetzt in den Anfangspunkt von $\vec{r}$ verschoben.



Um $\vec{r}$ in $\vec{F}$ zu überführen, ist eine Drehung um den Winkel φ nötig. Eine Rechtsschraube würde sich bei einer solchen Drehung in die Ebene hineinbewegen.

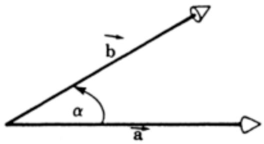
Die Richtung des Drehmomentes $\vec{M}$ wird so festgelegt, daß sie in die durch die Rechtsschraube gegebene Richtung weist.

2.4.3 Definition des Vektorprodukts

Wir fassen die Verknüpfung zweier Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{F}$ in der Form, in der das Drehmoment ermittelt wurde, als neues Produkt zweier Vektoren auf. Dieses Produkt ergibt einen Vektor. Es gilt eine neue Rechenvorschrift. Das Produkt heißt *Vektorprodukt* oder *Äußeres Produkt*.

Das Vektorprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ läßt sich unabhängig von der physikalischen Interpretation der beiden Vektoren geometrisch definieren und verallgemeinern. Diese Definition ist willkürlich, aber zweckmäßig für die Anwendungen.

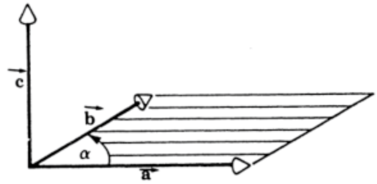
Wir betrachten zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Sie seien auf einen gemeinsamen Anfangspunkt gebracht. Der eingeschlossene Winkel sei φ
Als äußeres Produkt oder Vektorprodukt ist der Vektor



$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

mit folgenden Eigenschaften definiert:

Betrag von $\vec{c}$: $|\vec{c}| = a \cdot b \cdot \sin\varphi$



Geometrische Bedeutung: Der Betrag von $\vec{c}$ ist der Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

Richtung von $\vec{c}$: $\vec{c}$ steht senkrecht auf der durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ festgelegten Ebene.

Richtungssinn von $\vec{c}$*:* Dreht man $\vec{a}$ auf kürzestem Wege in $\vec{b}$, so zeigt $\vec{c}$ in die Richtung, in die sich eine Rechtsschraube bewegen würde. (Rechtsschraubenregel)

Definition: *Äußeres* oder *vektorielles* Produkt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

Der Vektor $\vec{c}$ hat folgende Eigenschaften:

1. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha$
2. $\vec{c}$ steht senkrecht auf der durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bestimmten Ebene
3. Die Orientierung von $\vec{c}$ wird mit Hilfe der Rechtsschraubenregel bestimmt.

Zur Schreibweise: Das Vektorprodukt wird geschrieben:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad \text{(gesprochen } \vec{a} \text{ Kreuz } \vec{b}\text{)} \qquad \text{oder} \quad \vec{c} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$$

Es gilt das hier ohne Beweis mitgeteilte *Distributivgesetz*:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

Weiter gilt, daß man skalare Faktoren eines Vektors ausklammern kann:

$$\vec{a} \times \lambda\vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$$

Beispiel: Gegeben seien die beiden Vektoren $\vec{a}$ mit dem Betrag $|\vec{a}| = 4$ und $\vec{b}$ mit dem Betrag $|\vec{b}| = 3$, die einen Winkel von 30° einschließen. Dann ist der Betrag des Produktvektors $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin 30° = 4 \cdot 3 \cdot 0,5 = 6$$

2.4.4 Sonderfälle

Vektorprodukt paralleler Vektoren: Das Parallelogramm entartet zu einem Strich mit dem Flächeninhalt 0. Das Vektorprodukt gibt in diesem Fall den Nullvektor $\vec{0}$ (den Pfeil läßt man jedoch meist fort).

Insbesondere gilt: $\vec{a} \times \vec{a} = 0$

Die Umkehrung ist wichtig: Ist von zwei Vektoren bekannt, daß ihr äußeres Produkt verschwindet, so wissen wir, daß sie parallel sind, wenn $\vec{a} \neq 0$ und $\vec{b} \neq 0$ sind.

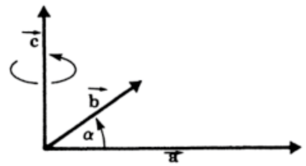
Zwei Vektoren $\vec{a} \neq 0$ und $\vec{b} \neq 0$ sind genau dann parallel, wenn ihr äußeres Produkt $\vec{a} \times \vec{b}$ gleich 0 ist.

Vektorprodukt senkrecht aufeinander stehender Vektoren: In diesem Fall gilt:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

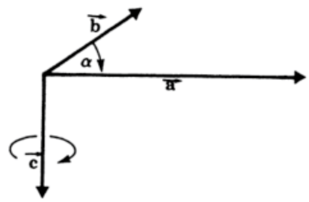
2.4.5 Vertauschung der Reihenfolge

Vertauscht man die Reihenfolge der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, so ändert das Vektorprodukt das Vorzeichen. Das äußere Produkt ist also nicht kommutativ. Es muß immer auf die Reihenfolge der beiden Faktoren geachtet werden.



Beweis: Die Abbildung zeigt die Bildung des Vektorproduktes $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.
Der Richtungssinn von $\vec{c}$ ergibt sich dadurch, daß $\vec{a}$ auf kürzestem Weg in $\vec{b}$ gedreht wird.
Bildet man demgegenüber das Vektorprodukt $\vec{b} \times \vec{a}$ so muß $\vec{b}$ auf kürzestem Weg in $\vec{a}$ gedreht werden. Dabei wechselt der Drehsinn der Schraube das Vorzeichen.

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

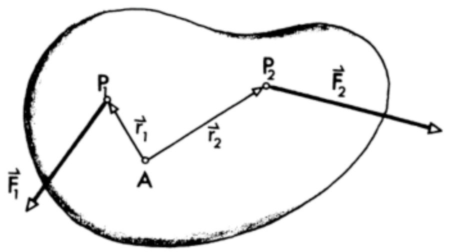


2.4.6 Allgemeine Fassung des Hebelgesetzes

Ein Körper sei um die Drehachse A drehbar gelagert. An dem Körper greifen die Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ an den Punkten P_1 und P_2 an.
Die Kraft $\vec{F}_1$ erzeugt das Drehmoment $\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1$.
Die Kraft $\vec{F}_2$ erzeugt das Drehmoment

$$\vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$

Die Orientierung von $\vec{M}_1$ und $\vec{M}_2$ ergibt sich gemäß der Rechtsschraubenregel.



In unserem Beispiel haben $\vec{M}_1$ und $\vec{M}_2$ entgegengesetzte Richtung. An dem Körper herrscht Gleichgewicht, wenn $\vec{M}_1$ und $\vec{M}_2$ gleichen Betrag und entgegengesetzte Richtung haben:

$$\vec{M}_1 = -\vec{M}_2 \qquad \text{oder} \qquad \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = 0$$

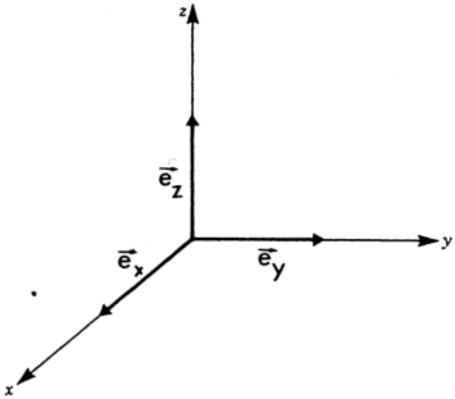
Greifen an einem Körper beliebig viele Kräfte an, so herrscht Gleichgewicht, falls die Summe aller Drehmomente verschwindet.
Die allgemeine Fassung des Hebelgesetzes lautet daher für den Gleichgewichtsfall:

$$\sum_i \vec{M}_i = 0$$

2.5 Vektorprodukt in Komponentendarstellung

Sind zwei Vektoren in Komponentendarstellung bekannt, läßt sich das Vektorprodukt ermitteln. Für die Überlegung ist es hilfreich, zunächst die Ergebnisse des äußeren Produktes der Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen zu ermitteln. Gemäß Abbildung und Definition ergibt sich als äußeres Produkt von Einheitsvektoren:

$$\begin{aligned}
\vec{e}_x \times \vec{e}_x &= 0 \\
\vec{e}_x \times \vec{e}_y &= \vec{e}_z \\
\vec{e}_x \times \vec{e}_z &= -\vec{e}_y \\
\vec{e}_y \times \vec{e}_y &= 0 \\
\vec{e}_y \times \vec{e}_x &= -\vec{e}_z \\
\vec{e}_y \times \vec{e}_z &= \vec{e}_x \\
\vec{e}_z \times \vec{e}_z &= 0 \\
\vec{e}_z \times \vec{e}_x &= \vec{e}_y \\
\vec{e}_z \times \vec{e}_y &= -\vec{e}_x
\end{aligned}$$



Das Vektorprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ wird so hingeschrieben, daß $\vec{a}$ und $\vec{b}$ als Summe ihrer Komponenten dargestellt werden. Dann werden beide Klammern ausmultipliziert und die Ergebnisse der Vektormultiplikation der Einheitsvektoren berücksichtigt:

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z) \times (b_x\vec{e}_x + b_y\vec{e}_y + b_z\vec{e}_z) \\
&= a_xb_x \cdot \vec{e}_x \times \vec{e}_x + a_xb_y \cdot \vec{e}_x \times \vec{e}_y + a_xb_z \cdot \vec{e}_x \times \vec{e}_z \\
&+ a_yb_x \cdot \vec{e}_y \times \vec{e}_x + a_yb_y \cdot \vec{e}_y \times \vec{e}_y + a_yb_z \cdot \vec{e}_y \times \vec{e}_z \\
&+ a_zb_x \cdot \vec{e}_z \times \vec{e}_x + a_zb_y \cdot \vec{e}_z \times \vec{e}_y + a_zb_z \cdot \vec{e}_z \times \vec{e}_z
\end{aligned}$$

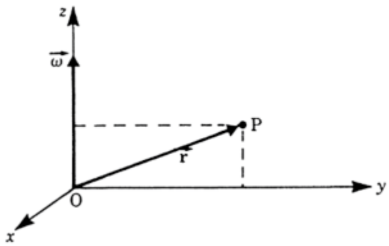
Fassen wir die Komponenten mit gleichen Einheitsvektoren zusammen und berücksichtigen wir die Ergebnisse der äußeren Produkte der Einheitsvektoren, so erhalten wir:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{e}_x + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{e}_y + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{e}_z$$

Das Vektorprodukt ist wieder ein Vektor.[5]

Anwendungsbeispiel:
Bahngeschwindigkeit bei Drehbewegungen. Bei Drehbewegungen gilt, daß die Bahngeschwindigkeit eines beliebigen Punktes das Vektorprodukt aus Winkelgeschwindigkeit und einem Ortsvektor von der Drehachse zum Punkt P ist.

Die Drehachse in der Abbildung ist die z-Achse. Die Winkelgeschwindigkeit betrage $\vec{\omega}$. Der Ortsvektor zum Punkt P habe die Koordinaten $\vec{r} = (0, r_y, r_z)$. Die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ hat die Koordinaten $(0, 0, \omega_z)$. Dann ist die Geschwindigkeit an der Stelle P:



$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = (-r_y \cdot \omega_z \cdot \vec{e}_x, 0, 0)$$

[5] In Determinantenschreibweise – siehe Kapitel Determinanten und lineare Gleichungssysteme – kann das Vektorprodukt symbolisch wie folgt geschrieben werden:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

2.6 Übungsaufgaben

2.1 A Berechnen Sie das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$

a) $|\vec{a}| = 3;\quad |\vec{b}| = 2;\quad \alpha = (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$

b) $|\vec{a}| = 2;\quad |\vec{b}| = 5;\quad \alpha = 0^o$

c) $|\vec{a}| = 1;\quad |\vec{b}| = 4;\quad \alpha = \frac{\pi}{4}$

d) $|\vec{a}| = 2,5;\quad |\vec{b}| = 3;\quad \alpha = 120^o$

B Welche Aussagen über den Winkel $\alpha = (\vec{a}, \vec{b})$ kann man aufgrund der folgenden Ergebnisse machen?

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|$ c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}{2}$ d) $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$

2.2 A Berechnen Sie das Skalarprodukt

a) $\vec{a} = (3,\ -1,\ 4)$
$\vec{b} = (-1,\ 2,\ 5)$

b) $\vec{a} = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{3}\right)$
$\vec{b} = \left(\frac{1}{6},\ -2,\ 3\right)$

c) $\vec{a} = \left(-\frac{1}{4},\ 2,\ -1\right)$
$\vec{b} = \left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{5}{3}\right)$

d) $\vec{a} = (1,\ -6,\ 1)$
$\vec{b} = (-1,\ -1,\ -1)$

B Stellen Sie durch Rechnung fest, welche der beiden Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ senkrecht aufeinander stehen.

a) $\vec{a} = (0,\ -1,\ 1)$
$\vec{b} = (1,\ 0,\ 0)$

b) $\vec{a} = (2,\ -3,\ 1)$
$\vec{b} = (-1,\ 4,\ 2)$

c) $\vec{a} = (-1,\ 2,\ -5)$
$\vec{b} = (-8,\ 1,\ 2)$

d) $\vec{a} = (4,\ -3,\ 1)$
$\vec{b} = (-1,\ -2,\ -2)$

e) $\vec{a} = (2,\ 1,\ 1)$
$\vec{b} = (-1,\ 3,\ -2)$

f) $\vec{a} = (4,\ 2,\ 2)$
$\vec{b} = (1,\ -4,\ 2)$

C Berechnen Sie den von den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossenen Winkel.

a) $\vec{a} = (1,\ -1,\ 1)$
$\vec{b} = (-1,\ 1,\ -1)$

b) $\vec{a} = (-2,\ 2,\ -1)$
$\vec{b} = (0,\ 3,\ 0)$

D An einem Körper greift die Kraft $\vec{F} = (0,\ +5\ \text{N})$ an.
Wir verschieben ihn um die Wegstrecke $\vec{s}$.
Berechnen Sie die geleistete mechanische Arbeit W.

a) $\vec{s}_1 = (3\,m,\, 3\,m)$ b) $\vec{s}_2 = (2\,m,\, 1\,m)$ c) $\vec{s}_3 = (2\,m,\, 0\,m)$

2.3 A Berechnen Sie $|\vec{a} \times \vec{b}|$

a) $|\vec{a}| = 2$ $|\vec{b}| = 3$ $\alpha = (\vec{a}, \vec{b}) = 60^o$

b) $|\vec{a}| = \frac{1}{2}$ $|\vec{b}| = 4$ $\alpha = 0^o$ c) $|\vec{a}| = 8$ $|\vec{b}| = \frac{3}{4}$ $\alpha = 90^o$

B Berechnen Sie den Flächeninhalt A des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms

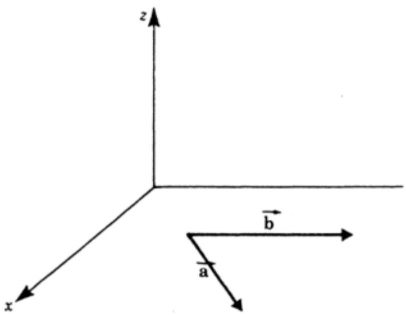
a) $|\vec{a}| = 2,5$ $|\vec{b}| = 2$ $\alpha = \frac{\pi}{4}$ b) $|\vec{a}| = \frac{3}{2}$ $|\vec{b}| = 1$ $\alpha = \frac{\pi}{6}$

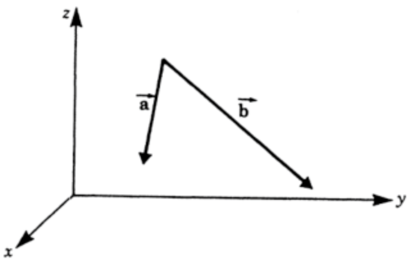
c) $|\vec{a}| = \frac{3}{4}$ $|\vec{b}| = 4$ $\alpha = \frac{\pi}{3}$

C Zeichnen Sie die Richtung, in die der Vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ zeigt.

a) $\vec{a}$ und $\vec{b}$ liegen in der x-y-Ebene.

b) $\vec{a}$ und $\vec{b}$ liegen in der y-z-Ebene.





D Es sei $\vec{a} = 2 \cdot \vec{e}_1$, $\vec{b} = 4 \cdot \vec{e}_2$
und $\vec{c} = -3 \cdot \vec{e}_3$
($\vec{e}_i$ sind die Einheitsvektoren
in Richtung der Koordinatenachsen)

Berechnen Sie

a) $\vec{a} \times \vec{b}$ b) $\vec{a} \times \vec{c}$ c) $\vec{c} \times \vec{a}$

d) $\vec{b} \times \vec{c}$ e) $\vec{b} \times \vec{b}$ f) $\vec{c} \times \vec{b}$

2.4 Berechnen Sie die Komponenten des Vektors $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

a) $\vec{a} = (2, 3, 1)$ $\quad$ b) $\vec{a} = (-2, 1, 0)$

$\vec{b} = (-1, 2, 4)$ $\quad$ $\vec{b} = (1, 4, 3)$

Lösungen

2.1 A a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\alpha = 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 3$ $\quad$ b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 10$

c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2} = 2,82$ $\quad$ d) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 7,5\left(-\frac{1}{2}\right) = -3,75$

B a) $\alpha = \frac{\pi}{2}$, d.h. $\vec{a} \perp \vec{b}$ $\quad$ b) $\alpha = 0$, d.h. $\vec{a} || \vec{b}$

c) $\alpha = \frac{1}{3}\pi$ $\quad$ d) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

2.2 A a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3 - 2 + 20 = +15$ $\quad$ b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1\frac{1}{4}$

c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{11}{12}$ $\quad$ d) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$

B a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, d.h., $\vec{a}$ und $\vec{b}$ stehen senkrecht aufeinander oder mindestens einer der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ ist gleich 0 .

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -12$, d.h. $\vec{a}$ nicht $\perp \vec{b}$

c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, d.h. $\vec{a} \perp \vec{b}$

d) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, also $\vec{a} \perp \vec{b}$

e) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$, also $\vec{a}$ nicht $\perp \vec{b}$

f) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, also $\vec{a} \perp \vec{b}$

C $\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

a) $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{-3}{3} = -1 \Rightarrow \alpha = \pi$

daraus folgt: $\vec{a} = -\vec{b}$

b) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 3$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha = 48^\circ 12'$
(nach Funktionstabelle Anhang IV)

D a) $W_1 = \vec{F}\vec{s}_1 = 0 \text{ N} \cdot 3\,m + 5 \text{ N} \cdot 3\,m = 15 \text{ Nm}$

b) $W_2 = \vec{F}\vec{s}_2 = 5 \text{ Nm}$ c) $W_3 = \vec{F}\vec{s}_3 = 0$

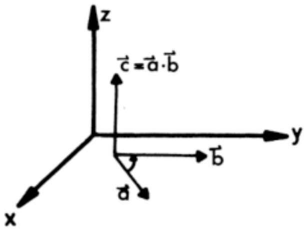
2.3 A a) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\alpha = 6\frac{1}{2}\sqrt{3} = 5,19$

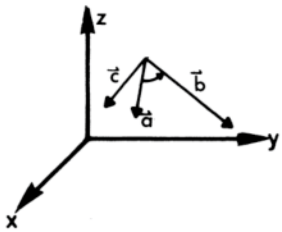
b) $|\vec{a} \times \vec{b}| = 0$ c) $|\vec{a} \times \vec{b}| = 6$

B a) $A = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\alpha = 5\frac{1}{2}\sqrt{2} = 3,52$ b) $A = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

c) $A = 3\frac{1}{2}\sqrt{3} = 2,59$

C a) b)





D a) $\vec{a} \times \vec{b} = -\frac{8}{3}\vec{c}$ b) $\vec{a} \times \vec{c} = \frac{3}{2}\vec{b}$ c) $\vec{c} \times \vec{a} = -\frac{3}{2}\vec{b}$

d) $\vec{b} \times \vec{c} = -6\vec{a}$ e) $\vec{b} \times \vec{b} = 0$ f) $\vec{c} \times \vec{b} = 6\vec{a}$

2.4 $\vec{c} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$

a) $\vec{c} = (10, -9, 7)$ b) $\vec{c} = (3, 6, -9)$

Mathematik für Physiker und Ingenieure 1
Basiswissen für das Grundstudium - mit mehr als 1400 Aufgaben und Lösungen online
Weltner, K.
2013, IX, 301 S. 291 Abb. Mit Online-Extras., Softcover
ISBN: 978-3-642-30084-4