

# Inhaltsverzeichnis

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Vektorrechnung</b>   | <b>13</b> |
| 1.1      | Skalare und Vektoren . . . . .                                | 13        |
| 1.2      | Addition von Vektoren . . . . .                               | 16        |
| 1.2.1    | Summe zweier Vektoren: Geometrische Addition . . . . .        | 16        |
| 1.3      | Subtraktion von Vektoren . . . . .                            | 17        |
| 1.3.1    | Der Gegenvektor . . . . .                                     | 17        |
| 1.3.2    | Differenz zweier Vektoren: Geometrische Subtraktion . . . . . | 18        |
| 1.4      | Das rechtwinklige Koordinatensystem . . . . .                 | 19        |
| 1.5      | Komponente und Projektion eines Vektors . . . . .             | 20        |
| 1.6      | Komponentendarstellung im Koordinatensystem . . . . .         | 22        |
| 1.6.1    | Ortsvektoren . . . . .  | 22        |
| 1.6.2    | Einheitsvektoren . . . . .                                    | 23        |
| 1.6.3    | Komponentendarstellung eines Vektors . . . . .                | 24        |
| 1.6.4    | Summe zweier Vektoren in Komponentenschreibweise . . . . .    | 25        |
| 1.6.5    | Differenz von Vektoren in Komponentenschreibweise . . . . .   | 27        |
| 1.7      | Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar . . . . .       | 28        |
| 1.8      | Betrag eines Vektors . . . . .                                | 29        |
| 1.9      | Übungsaufgaben . . . . .                                      | 31        |
| <b>2</b> | <b>Skalarprodukt, Vektorprodukt</b>                           | <b>37</b> |
| 2.1      | Skalarprodukt . . . . .                                       | 37        |
| 2.1.1    | Sonderfälle . . . . .   | 40        |
| 2.1.2    | Kommutativ- und Distributivgesetz . . . . .                   | 40        |
| 2.2      | Kosinussatz . . . . .   | 40        |
| 2.3      | Skalares Produkt in Komponentendarstellung . . . . .          | 41        |
| 2.4      | Vektorprodukt . . . . .                                       | 42        |
| 2.4.1    | Drehmoment . . . . .  | 42        |

---

\*Die mit einem Stern (\*) gekennzeichneten Abschnitte werden beim ersten Durchgang anhand der Leitprogramme übersprungen.

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 2.4.2    | Das Drehmoment als Vektor . . . . .  | 43        |
| 2.4.3    | Definition des Vektorprodukts . . . . .  | 44        |
| 2.4.4    | Sonderfälle . . . . .  | 45        |
| 2.4.5    | Vertauschung der Reihenfolge . . . . .   | 46        |
| 2.4.6    | Allgemeine Fassung des Hebelgesetzes . . . . .                                   | 46        |
| 2.5      | Vektorprodukt in Komponentendarstellung . . . . .                                | 47        |
| 2.6      | Übungsaufgaben . . . . .   | 49        |
| <b>3</b> | <b>Einfache Funktionen, Trigonometrische Funktionen</b>                          | <b>53</b> |
| 3.1      | Der mathematische Funktionsbegriff . . . . .                                     | 53        |
| 3.1.1    | Der Funktionsbegriff . . . . .   | 53        |
| 3.2      | Graphische Darstellung von Funktionen . . . . .                                  | 56        |
| 3.2.1    | Ermittlung des Graphen aus der Gleichung für die Gerade . .                      | 57        |
| 3.2.2    | Bestimmung der Gleichung einer Geraden aus ihrem Graphen                         | 59        |
| 3.2.3    | Graphische Darstellung von Funktionen . . . . .                                  | 60        |
| 3.2.4    | Veränderung von Funktionsgleichungen und ihrer Graphen .                         | 62        |
| 3.3      | Winkelfunktionen, Trigonometrische Funktionen . . . . .                          | 63        |
| 3.3.1    | Einheitskreis . . . . .  | 63        |
| 3.3.2    | Sinusfunktion . . . . .  | 64        |
| 3.3.3    | Kosinusfunktion . . . . .  | 71        |
| 3.3.4    | Zusammenhang zwischen Kosinus- und Sinusfunktion . . . .                         | 72        |
| 3.3.5    | Tangens, Kotangens . . . . .   | 73        |
| 3.3.6    | Additionstheoreme, Superposition von Trigonometrischen Funk-<br>tionen . . . . . | 74        |
| 3.4      | Übungsaufgaben . . . . .   | 78        |
| <b>4</b> | <b>Potenzen, Logarithmus, Umkehrfunktionen</b>                                   | <b>82</b> |
| 4.1      | Potenzen, Exponentialfunktion . . . . .  | 82        |
| 4.1.1    | Potenzen . . . . .   | 82        |
| 4.1.2    | Rechenregeln für Potenzen . . . . .  | 83        |
| 4.1.3    | Exponentialfunktion . . . . .  | 84        |
| 4.2      | Logarithmus, Logarithmusfunktion . . . . .                                       | 86        |
| 4.2.1    | Logarithmus . . . . .  | 86        |
| 4.2.2    | Rechenregeln für Logarithmen . . . . .   | 89        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 4.2.3    | Logarithmusfunktion . . . . .   | 91         |
| 4.3      | Hyperbolische Funktionen* . . . . .   | 92         |
| 4.4      | Umkehrfunktionen, inverse Funktionen . . . . .                                | 94         |
| 4.4.1    | Umkehrfunktion oder inverse Funktion . . . . .                                | 94         |
| 4.4.2    | Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen: Arcusfunktionen* . . . . . | 96         |
| 4.4.3    | Umkehrfunktionen der hyperbolischen Funktionen: Areafunktionen* . . . . .     | 98         |
| 4.4.4    | Logarithmusfunktion als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion: . . . . .     | 99         |
| 4.5      | Mittelbare Funktion, Funktion einer Funktion . . . . .                        | 99         |
| 4.6      | Übungsaufgaben . . . . .  | 101        |
| <b>5</b> | <b>Differentialrechnung</b>   | <b>103</b> |
| 5.1      | Folge und Grenzwert . . . . .   | 103        |
| 5.1.1    | Die Zahlenfolge . . . . .   | 103        |
| 5.1.2    | Grenzwert einer Zahlenfolge . . . . .   | 104        |
| 5.1.3    | Grenzwert einer Funktion . . . . .  | 106        |
| 5.2      | Stetigkeit . . . . .  | 108        |
| 5.3      | Reihe und Grenzwert . . . . .   | 109        |
| 5.3.1    | Reihe . . . . .   | 109        |
| 5.3.2    | Geometrische Reihe . . . . .  | 111        |
| 5.4      | Die Ableitung einer Funktion . . . . .  | 112        |
| 5.4.1    | Die Steigung einer Geraden . . . . .  | 112        |
| 5.4.2    | Die Steigung einer beliebigen Kurve . . . . .                                 | 112        |
| 5.4.3    | Der Differentialquotient . . . . .  | 114        |
| 5.4.4    | Physikalische Anwendung: Die Geschwindigkeit . . . . .                        | 115        |
| 5.4.5    | Das Differential . . . . .  | 116        |
| 5.5      | Praktische Berechnung des Differentialquotienten . . . . .                    | 117        |
| 5.5.1    | Differentiationsregeln . . . . .  | 117        |
| 5.5.2    | Ableitung einfacher Funktionen . . . . .                                      | 119        |
| 5.5.3    | Ableitung komplizierter Funktionen . . . . .                                  | 123        |
| 5.6      | Höhere Ableitungen . . . . .  | 125        |
| 5.7      | Maxima und Minima . . . . .   | 126        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 5.8      | Differentiationsregeln, Ableitung einfacher Funktionen . . . . .     | 129        |
| 5.9      | Tangentenvektor und Normalenvektor . . . . .                         | 130        |
| 5.10     | Übungsaufgaben . . . . .   | 131        |
| <b>6</b> | <b>Integralrechnung</b>  | <b>134</b> |
| 6.1      | Die Stammfunktion . . . . .  | 134        |
| 6.2      | Flächenproblem und bestimmtes Integral . . . . .                     | 136        |
| 6.3      | Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung . . . . .           | 138        |
| 6.4      | Bestimmtes Integral . . . . .  | 141        |
| 6.4.1    | Beispiele für das bestimmte Integral . . . . .                       | 143        |
| 6.5      | Zur Technik des Integrierens . . . . .                               | 145        |
| 6.5.1    | Verifizierungsprinzip . . . . .                                      | 145        |
| 6.5.2    | Stammintegrale . . . . .   | 146        |
| 6.5.3    | Konstanter Faktor und Summe . . . . .                                | 147        |
| 6.5.4    | Integration durch Substitution . . . . .                             | 147        |
| 6.5.5    | Partielle Integration . . . . .                                      | 149        |
| 6.6      | Rechenregeln für bestimmte Integrale . . . . .                       | 150        |
| 6.7      | Substitution bei bestimmten Integralen . . . . .                     | 151        |
| 6.8      | Mittelwertsatz der Integralrechnung . . . . .                        | 153        |
| 6.9      | Uneigentliche Integrale . . . . .                                    | 153        |
| 6.10     | Arbeit im Gravitationsfeld . . . . .                                 | 155        |
| 6.11     | Übungsaufgaben . . . . .   | 158        |
| <b>7</b> | <b>Taylorreihe und Potenzreihen</b>                                  | <b>163</b> |
| 7.1      | Vorbemerkung . . . . .   | 163        |
| 7.2      | Entwicklung einer Funktion in eine Taylorreihe . . . . .             | 164        |
| 7.3      | Gültigkeitsbereich der Taylorentwicklung (Konvergenzbereich) . . . . | 168        |
| 7.4      | Das Näherungspolynom . . . . .                                       | 169        |
| 7.4.1    | Abschätzung des Fehlers . . . . .                                    | 171        |
| 7.5      | Allgemeine Taylorreihenentwicklung . . . . .                         | 172        |
| 7.6      | Nutzen der Taylorreihenentwicklung . . . . .                         | 173        |
| 7.6.1    | Polynome als Näherungsfunktionen . . . . .                           | 173        |
| 7.6.2    | Tabelle gebräuchlicher Näherungspolynome . . . . .                   | 176        |
| 7.6.3    | Integration über Potenzreihenentwicklung . . . . .                   | 177        |
| 7.7      | Übungsaufgaben . . . . .   | 179        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| <b>8</b> | <b>Komplexe Zahlen</b>   | <b>183</b> |
| 8.1      | Definition und Eigenschaften der komplexen Zahlen . . . . .  | 183        |
| 8.1.1    | Die imaginäre Zahl . . . . .   | 183        |
| 8.1.2    | Komplexe Zahlen . . . . .  | 183        |
| 8.1.3    | Anwendungsgebiete . . . . .  | 184        |
| 8.1.4    | Rechenregeln für komplexe Zahlen . . . . .   | 184        |
| 8.2      | Komplexe Zahlen in der Gauß'schen Zahlenebene . . . . .  | 186        |
| 8.2.1    | Die Gauß'sche Zahlenebene . . . . .  | 186        |
| 8.2.2    | Komplexe Zahlen in der Schreibweise mit Winkelfunktionen . . . . .   | 187        |
| 8.3      | Die Exponentialform einer komplexen Zahl . . . . .   | 189        |
| 8.3.1    | Eulersche Formel . . . . .   | 189        |
| 8.3.2    | Umkehrformeln zur Eulerschen Formel . . . . .  | 190        |
| 8.3.3    | Komplexe Zahlen als Exponenten . . . . .   | 190        |
| 8.3.4    | Multiplikation und Division komplexer Zahlen . . . . .   | 193        |
| 8.3.5    | Potenzieren und Wurzelziehen komplexer Zahlen . . . . .  | 194        |
| 8.3.6    | Periodizität von $r \cdot e^{i\alpha}$ . . . . .   | 195        |
| 8.4      | Übungsaufgaben . . . . .   | 197        |
| <b>9</b> | <b>Differentialgleichungen</b>   | <b>202</b> |
| 9.1      | Begriff der Differentialgleichung, Einteilung der Differentialgleichungen  | 202        |
| 9.1.1    | Begriff der Differentialgleichung, Separation der Variablen . . . . .  | 202        |
| 9.1.2    | Einteilung der Differentialgleichungen . . . . .   | 203        |
| 9.2      | Die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung 1. und 2. Ordnung . . . . .                               | 206        |
| 9.2.1    | Lösung homogener linearer Differentialgleichungen, der Exponentialansatz . . . . .                                 | 206        |
| 9.2.2    | Allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . . . | 213        |
| 9.3      | Variation der Konstanten* . . . . .  | 218        |
| 9.3.1    | Variation der Konstanten für den Fall einer Doppelwurzel . . . . .   | 218        |
| 9.3.2    | Bestimmung einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung . . . . .                                 | 220        |
| 9.4      | Randwertprobleme . . . . .   | 221        |
| 9.4.1    | Randwertprobleme bei Differentialgleichungen 1. Ordnung . . . . .  | 221        |

|           |  |            |
|-----------|--|------------|
| 9.4.2     | Randwertprobleme bei Differentialgleichungen 2. Ordnung . .          | 222        |
| 9.5       | Anwendungen . . . . .  | 224        |
| 9.5.1     | Der radioaktive Zerfall . . . . .                                    | 224        |
| 9.5.2     | Der harmonische ungedämpfte Oszillator . . . . .                     | 224        |
| 9.6       | Übungsaufgaben . . . . .   | 233        |
| <b>10</b> | <b>Wahrscheinlichkeitsrechnung</b>                                   | <b>237</b> |
| 10.1      | Einleitung . . . . .   | 237        |
| 10.2      | Wahrscheinlichkeitsbegriff . . . . .                                 | 238        |
| 10.2.1    | Ereignis, Ergebnis, Zufallsexperiment . . . . .                      | 238        |
| 10.2.2    | Die „klassische“ Definition der Wahrscheinlichkeit . . . . .         | 239        |
| 10.2.3    | Die „statistische“ Definition der Wahrscheinlichkeit . . . . .       | 240        |
| 10.2.4    | Allgemeine Eigenschaften der Wahrscheinlichkeiten . . . . .          | 242        |
| 10.2.5    | Wahrscheinlichkeit für Verbundereignisse . . . . .                   | 244        |
| 10.3      | Abzählmethoden . . . . .   | 247        |
| 10.3.1    | Permutationen . . . . .  | 247        |
| 10.3.2    | Kombinationen . . . . .  | 249        |
| 10.4      | Übungsaufgaben . . . . .   | 251        |
| <b>11</b> | <b>Wahrscheinlichkeitsverteilungen</b>                               | <b>252</b> |
| 11.1      | Diskrete und kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilungen . . . . | 252        |
| 11.1.1    | Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen . . . . .                   | 252        |
| 11.1.2    | Kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilungen . . . . .            | 254        |
| 11.2      | Mittelwert . . . . .   | 257        |
| 11.3      | Binomialverteilung und Normalverteilung . . . . .                    | 259        |
| 11.3.1    | Eigenschaften der Normalverteilung . . . . .                         | 261        |
| 11.3.2    | Herleitung der Binomialverteilung . . . . .                          | 264        |
| 11.4      | Anhang A . . . . .   | 266        |
| 11.5      | Übungsaufgaben . . . . .   | 269        |
| <b>12</b> | <b>Fehlerrechnung</b>  | <b>270</b> |
| 12.1      | Aufgabe der Fehlerrechnung . . . . .                                 | 270        |
| 12.2      | Mittelwert und Varianz . . . . .                                     | 271        |
| 12.2.1    | Mittelwert . . . . .   | 271        |

---

|   |            |
|---|------------|
| 12.2.2 Varianz . . . . .  | 271        |
| 12.2.3 Mittelwert und Varianz in Stichprobe und Grundgesamtheit .       | 273        |
| 12.2.4 Fehler des Mittelwerts . . . . .                                 | 275        |
| 12.3 Mittelwert und Varianz bei kontinuierlichen Verteilungen . . . . . | 276        |
| 12.4 Normalverteilung . . . . .   | 277        |
| 12.4.1 Verteilung von Zufallsfehlern . . . . .                          | 277        |
| 12.4.2 Vertrauensintervall oder Konfidenzintervall . . . . .            | 278        |
| 12.5 Gewogenes Mittel . . . . .   | 279        |
| 12.6 Fehlerfortpflanzungsgesetz . . . . .                               | 280        |
| 12.7 Regressionsgerade, Korrelation . . . . .                           | 281        |
| 12.7.1 Regressionsgerade, Ausgleichskurve . . . . .                     | 281        |
| 12.7.2 Korrelation und Korrelationskoeffizient . . . . .                | 285        |
| 12.8 Übungsaufgaben . . . . .   | 288        |
| <b>Anhang</b>   | <b>292</b> |
| Grundbegriffe der Mengenlehre . . . . .                                 | 292        |
| Funktionsbegriff . . . . .  | 294        |
| Quadratische Gleichungen . . . . .                                      | 295        |
| Der Computer als Hilfsmittel bei mathematischen Aufgaben. . . . .       | 296        |
| <b>Literatur</b>  | <b>298</b> |
| <b>Sachwortverzeichnis</b>  | <b>299</b> |

<http://www.springer.com/978-3-642-30084-4>

Mathematik für Physiker und Ingenieure 1  
Basiswissen für das Grundstudium - mit mehr als 1400  
Aufgaben und Lösungen online  
Weltner, K.  
2013, IX, 301 S. 291 Abb. Mit Online-Extras., Softcover  
ISBN: 978-3-642-30084-4