

Der erste Hauptsatz der Thermodynamik ist der *Satz von der Erhaltung der Energie*. In diesem Kapitel werden wir den ersten Hauptsatz der Thermodynamik in verschiedenen Formen kennenlernen, verbal und mathematisch sowie allgemein gültig und für Sonderfälle.

Die mathematischen Formen des ersten Hauptsatzes beruhen auf der Bilanzierung der Größe Energie, wobei der Bilanzraum ein zuvor definiertes thermodynamisches System ist.

---

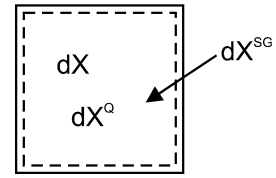
## 5.1 Die allgemeine Struktur einer Bilanzgleichung

Bilanzgleichungen sind immer gleich aufgebaut, unabhängig davon, welche Größe  $X$  bilanziert wird. Solche Größen können beispielsweise die Masse, die Energie, die Entropie oder auch Geld sein.

Der erste Schritt zur Erstellung einer Bilanz ist die Festlegung der Bilanzierungsgröße und des Bilanzraumes. Der monatliche Kontoauszug Ihres Bankkontos stellt beispielsweise nichts anderes als eine Bilanz der Geldmenge über die Zeitspanne eines Monats dar. Der Bilanzraum ist das Konto. Überweisungen von anderen Konten und Einzahlungen erhöhen die Geldmenge und Auszahlungen verringern sie.

Auf die Thermodynamik übertragen ist der Bilanzraum das thermodynamische System. Wird eine Menge der Bilanzierungsgröße  $X$  aus der Umgebung über die Systemgrenze transportiert, so erhöht sich die Menge  $X$  im System. Wird sie aus dem System über dessen Grenze an die Umgebung abgeführt, so verringert sich die Menge  $X$  im System. Außerdem können – sofern vorhanden – Quellen bzw. Senken im System die Menge  $X$  im System erhöhen bzw. verringern. Bei der Bilanzierung einer Teilmasse im System, beispielsweise der Masse des Gases  $\text{CO}_2$ , würde eine Reaktion unter Bildung von  $\text{CO}_2$  (z. B. Verbrennung) einer Quelle, eine Reaktion unter Verbrauch von  $\text{CO}_2$  (z. B. eine Photosynthese) einer Senke entsprechen. Eine Energiequelle oder -senke gibt es nicht.

**Abb. 5.1** Zur Bilanzierung der Größe  $X$  im Bilanzraum bzw. System mit der Systemgrenze SG



Die allgemeine Struktur einer Gleichung zur Bilanzierung der Größe  $X$  in einem System lautet somit in differentieller Form

$$dX = \sum_{k=1}^n dX_k^{\text{SG}} + dX^{\text{Q}}, \quad (5.1)$$

wobei  $dX^{\text{Q}}$  den Quellterm beschreibt und  $k$  verschiedene Transporte  $dX_k^{\text{SG}}$  über die Systemgrenze erfasst werden. Abbildung 5.1 veranschaulicht die Bilanzierungsmethode. Alle Transportgrößen  $dX_k^{\text{SG}}$ , die dem System aus der Umgebung über die Systemgrenze zufließen, werden mit positivem Vorzeichen versehen, alle Größen, die aus dem System in die Umgebung fließen, mit negativem Vorzeichen. Betrachtet man eine Zustandsänderung des Systems vom Zustand 1 in den Zustand 2, so eignet sich besonders gut die Bilanzgleichung in der Form

$$X_2 - X_1 = \sum_{k=1}^n X_{k12}^{\text{SG}} + X_{12}^{\text{Q}}, \quad (5.2)$$

die sich aus der Integration von Gl. 5.1 zwischen den Grenzen 1 und 2 ergibt.

Betrachtet man einen kontinuierlichen Prozess über eine gewisse Zeitspanne  $d\tau$ , so wählt man im Allgemeinen die Bilanzgleichung in der Form

$$\frac{dX}{d\tau} = \sum_{k=1}^n \dot{X}_k^{\text{SG}} + \dot{X}^{\text{Q}}. \quad (5.3)$$

Der Term  $dX/d\tau$  beschreibt die zeitliche Änderung der Größe  $X$  im System. Man bezeichnet diesen Term auch als *Speicherterm*. Der Term  $\dot{X}_k^{\text{SG}}$  beschreibt die Zu- oder Abströme der Bilanzgröße  $X$  über die Systemgrenze je Zeiteinheit.  $\dot{X}_k^{\text{SG}}$  ist somit eine *Stromgröße*. Der *Quellterm*  $\dot{X}^{\text{Q}}$  beschreibt die je Zeiteinheit im Innern des Systems gebildete oder vernichtete Menge der Bilanzgröße  $X$ .

## 5.2 Formulierung des ersten Hauptsatzes und die technische Arbeit

Der erste Hauptsatz der Thermodynamik beschreibt eines der elementarsten und wichtigsten Prinzipien der Physik:

- **Merksatz** Das Prinzip von der Erhaltung der Energie.

Energie kann nicht erzeugt und nicht zerstört werden.

Ein Sonderfall des ersten Hauptsatzes ist der bekannte *Energiesatz der Mechanik*, der die Umwandlung kinetischer Energie eines starren Körpers in potentielle Energie oder den umgekehrten Vorgang beschreibt.

Wie die Erfahrung lehrt, ändert sich die Energie  $E$  eines im Schwerfeld reibungsfrei bewegten starren Körpers stets so, dass die Summe aus kinetischer und potentieller Energie konstant bleibt. Eine Abnahme der kinetischen Energie hat eine Zunahme der potentiellen und umgekehrt eine Zunahme der kinetischen eine Abnahme der potentiellen Energie zur Folge, und es gilt:

$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \text{const.}$$

Man nennt diesen Zusammenhang den *Energiesatz der Mechanik*. Er ist ein Erfahrungssatz und kann daher nicht bewiesen werden. Als Beweis für die Richtigkeit ist allein die Tatsache anzusehen, dass alle Folgerungen aus dem Energiesatz mit der Erfahrung übereinstimmen.

Die Thermodynamik erfordert eine Erweiterung des Energiesatzes der Mechanik, um zusätzlich die Änderung der inneren Energie eines Systems und den Energieaustausch mit der Umgebung des Systems in Form von Wärme, Arbeit und an Materietransport gebundene Energie zu erfassen. Das Prinzip der Energieerhaltung lautet dann in allgemeiner Form:

► **Merksatz** Jedes System besitzt eine extensive Zustandsgröße Energie. Diese Systemenergie ändert sich nur durch Zu- oder Abfuhr von Energie über die Systemgrenze.

Überträgt man in diesem Sinne die allgemeine Struktur der Bilanzgleichung (5.1) auf die Bilanzierungsgröße Energie, so folgt für die Änderung der Systemenergie  $E$

$$dE = dQ + dL + \sum_{k=1}^n dM_k \left( u_k + \frac{w_k^2}{2} + gz_k \right), \quad (5.4a)$$

da über die Systemgrenze nur die Energieformen Wärme  $Q$ , Arbeit  $L$  und mit Masse  $M_k$  transportierte Energie (siehe Abschn. 4.4) ausgetauscht werden und Energiequellen oder -senken nicht existieren können.

Betrachtet man ein abgeschlossenes System, also ein System, über dessen Systemgrenzen keine Energie transportiert werden kann, so ergibt die Energiebilanzgleichung

$$dE = 0.$$

Eine häufig verwendete Formulierung des ersten Hauptsatzes lautet daher:

► **Merksatz** In einem abgeschlossenen System ist die Summe aller Energieänderungen gleich null.

Diese Formulierungen des ersten Hauptsatzes sind, ebenso wie der Energiesatz der Mechanik als Sonderfall des ersten Hauptsatzes, Erfahrungssätze.

Die Arbeit  $dL$  in der Energiebilanzgleichung (5.4a) ist die gesamte am System verrichtete Arbeit und beinhaltet auch die in Abschn. 4.4 erläuterte Verschiebearbeit  $p v dM$ , die mit dem Transport der Masse  $dM$  über die Systemgrenze verknüpft ist. Wie in Abschn. 4.4 gezeigt wurde, lässt sich diese Verschiebearbeit mit Hilfe der Definition der Zustandsgröße Enthalpie,  $h = u + p v$ , in geschickter Weise mit dem Term  $dM(u + w^2/2 + g z)$  zu einem Term  $dM(h + w^2/2 + g z)$  zusammenfassen. Damit lässt sich die Energiebilanzgleichung (5.4a) auch wie folgt schreiben:

$$dE = dQ + dL_t + \sum_{k=1}^n dM_k \left( h_k + \frac{w_k^2}{2} + g z_k \right), \quad (5.4b)$$

wobei man die hierin verwendete Arbeit  $dL_t$  als *technische Arbeit* bezeichnet, da diese in durchströmten technischen Apparaten z. B. als Nutzen abgeführt werden kann oder als Aufwand zugeführt werden muss. Die technische Arbeit  $dL_t$  umfasst demnach alle Formen von Arbeit, die am System verrichtet werden, mit Ausnahme der Verschiebearbeit  $p v dM$ , die an den Transport der Masse  $dM$  über die Systemgrenze gekoppelt ist.

Für offene Systeme gilt somit der Zusammenhang

$$dL_t = dL - \sum_{k=1}^n p_k v_k dM_k \quad (5.5)$$

zwischen der Gesamtarbeit  $dL$  und der technischen Arbeit  $dL_t$ . Für geschlossene Systeme unterscheiden sich Gesamtarbeit und technische Arbeit nicht, d. h.

$$dL_t = dL.$$

### 5.3 Der erste Hauptsatz für geschlossenen Systeme

Bei geschlossenen Systemen ist ein Materietransport über die Systemgrenze per Definition unmöglich. Die Energiebilanz nach Gl. 5.4a vereinfacht sich wegen  $dM = 0$  für ein geschlossenes System daher zu

$$dE = dQ + dL \quad (5.6a)$$

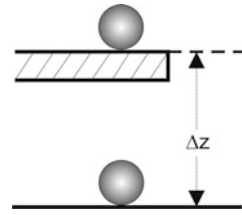
Da sich die Systemenergie  $E$  nach Gl. 4.1 aus innerer Energie, kinetischer Energie und potentieller Energie zusammensetzt, ist

$$dU + dE_{\text{kin}} + dE_{\text{pot}} = dQ + dL. \quad (5.6b)$$

Beschreibt man die Änderung eines Systems von Zustand 1 in den Zustand 2, so wählt man die integrierte Form der Energiebilanzgleichung,

$$E_2 - E_1 = U_2 - U_1 + E_{\text{kin},2} - E_{\text{kin},1} + E_{\text{pot},2} - E_{\text{pot},1} = Q_{12} + L_{12}. \quad (5.7)$$

**Abb. 5.2** Zum Energiesatz der Mechanik



Sie entspricht der allgemeinen Form der Bilanzgleichung (5.2). Beschreibt man einen kontinuierliche Prozess über die Zeitspanne  $d\tau$ , so wählt man die Form analog zur allgemeinen Bilanzgleichung (5.3)

$$\frac{dE}{d\tau} = \frac{dU}{d\tau} + \frac{dE_{\text{kin}}}{d\tau} + \frac{dE_{\text{pot}}}{d\tau} = \dot{Q} + P \quad (5.8)$$

mit dem Wärmestrom  $\dot{Q}$  und der Leistung  $P$  (Einheit W oder J/s). Die Gln. 5.6a bis 5.8 stellen die mathematische Formulierung des ersten Hauptsatzes für ein geschlossenes System dar.

Ein Sonderfall des kontinuierlichen Prozesses ist der *stationäre Prozess*. Stationär bedeutet, dass die Zustandsgrößen des Systems keine zeitlichen Änderungen erfahren, d. h.  $dE/d\tau = 0$ . In diesem Fall gilt für ein geschlossenes System

$$0 = \dot{Q} + P. \quad (5.9)$$

Drei Beispiele mögen diese Zusammenhänge verdeutlichen:

Eine Kugel liege wie in Abb. 5.2 skizziert auf einem Podest der Höhe  $\Delta z$  über dem Erdboden. Die Kugel sei in diesem Zustand 1 in Ruhe. Das Podest wird reibungsfrei weggezogen, die Kugel fällt im Schwerfeld. Im Zustand 2 trifft sie gerade auf dem Erdboden auf mit der Geschwindigkeit  $w_2$ . Wir definieren nun die Kugel als System. In diesem Fall gilt, dass weder Wärme noch Arbeit während der Zustandsänderung transportiert werden, also  $Q_{12} = 0$  und  $L_{12} = 0$ . Weiter gilt  $E_{\text{kin},1} = 0$ , da die Kugel im Zustand 1 in Ruhe ist, und  $U_2 = U_1$ , da sich die innere Energie der Kugel nicht ändert.

Somit folgt aus Gl. 5.7

$$E_{\text{kin},2} + E_{\text{pot},2} - E_{\text{pot},1} = 0$$

oder

$$M \frac{w_2^2}{2} + Mg(z_2 - z_1) = 0.$$

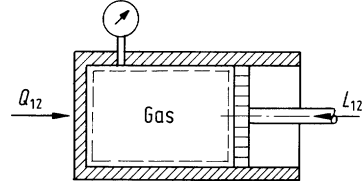
Damit lässt sich die Geschwindigkeit  $w_2$  aus

$$\frac{w_2^2}{2} = g(z_1 - z_2) = g\Delta z$$

bestimmen zu

$$w_2 = \sqrt{2g\Delta z}.$$

**Abb. 5.3** Arbeits- und Wärmeaustausch mit der Umgebung



Wir haben in diesem Beispiel den Energiesatz der Mechanik als Sonderfall des ersten Hauptsatzes betrachtet.

Nun denken wir uns das System Gas in Abb. 5.3 von einem Zustand 1 in einen Zustand 2 überführt, indem wir es mit einer Umgebung höherer oder tieferer Temperatur in Kontakt bringen und gleichzeitig den Kolben verschieben. Während der Zustandsänderung werden Wärme  $Q_{12}$  und Arbeit  $L_{12}$  mit der Umgebung ausgetauscht.

Die kinetische Energie des ruhenden Systems ist Null,  $E_{\text{kin},2} = E_{\text{kin},1} = 0$ . Die potentielle Energie ändert sich nicht, da die Lage des Systems unverändert bleibt, d. h.  $E_{\text{pot},2} - E_{\text{pot},1} = 0$ . Es gilt daher entsprechend Gl. 5.7

$$U_2 - U_1 = Q_{12} + L_{12} . \quad (5.10a)$$

Zufuhr von Wärme und Arbeit bewirken also eine Erhöhung der inneren Energie, deren Abfuhr eine Verringerung der inneren Energie. Bezieht man Wärme, Arbeit und innere Energie auf die Masse  $M$  des Systems, so lautet der erste Hauptsatz für geschlossene ruhende Systeme

$$u_2 - u_1 = q_{12} + l_{12} . \quad (5.10b)$$

Setzt man weiter voraus, dass nur Volumenänderungsarbeit verrichtet wird und der Prozess nicht reibungsfrei abläuft, so kann man ausgehend von Gl. 4.36 die auf die Masse des Systems bezogene Arbeit auch schreiben

$$l_{12} = - \int_1^2 p \, dv + l_{\text{diss},12} .$$

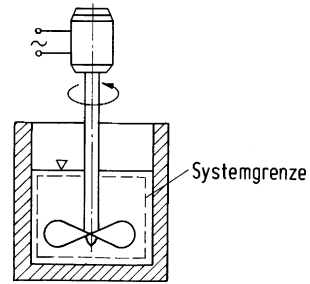
Damit lautet der erste Hauptsatz in diesem besonderen Fall

$$u_2 - u_1 = q_{12} - \int_1^2 p \, dv + l_{\text{diss},12} . \quad (5.11)$$

Im dritten Beispiel betrachten wir das System einer Flüssigkeit, Abb. 5.4, in die ein Rührer getaucht ist, der für eine bestimmte Zeit  $d\tau$  kontinuierlich in Bewegung gesetzt wird.

Das System sei adiabatisch,  $\dot{Q} = 0$ , und der Einfachheit halber sei angenommen, dass der Elektromotor, der den Rührer antreibt, seine bekannte elektrische Leistung  $P$  vollständig in Wellenleistung umsetzt. Das System befinde sich zudem bezüglich seiner äußeren Koordinaten in Ruhe, d. h.  $dE_{\text{kin}} = 0$  und  $dE_{\text{pot}} = 0$ . Damit vereinfacht sich der erste Hauptsatz

**Abb. 5.4** Zum kontinuierlichen Prozess



nach Gl. 5.8 zu

$$\frac{dU}{d\tau} = P. \quad (5.12)$$

Die Zufuhr von Wellenleistung führt hier demnach zur Erhöhung der inneren Energie der Flüssigkeit.

## 5.4 Messung und Eigenschaften von innerer Energie und Wärme

Der erste Hauptsatz für geschlossene Systeme erlaubt es, eine Messvorschrift für die innere Energie und für die Wärme anzugeben. Zur *Messung der inneren Energie* betrachtet man ein geschlossenes, adiabates System, das sich in Ruhe befindet. Der erste Hauptsatz in differentieller Form lautet hierfür

$$dU = dL. \quad (5.13)$$

Erfährt das System eine Zustandsänderung von 1 nach 2, so folgt:

$$U_2 - U_1 = (L_{12})_{\text{ad}}.$$

Die einem geschlossenen adiabaten System zugeführte Arbeit  $(L_{12})_{\text{ad}}$  dient folglich zur Erhöhung der inneren Energie. Umgekehrt stammt die von einem solchen System verrichtete Arbeit aus seinem Vorrat an innerer Energie. Während die an einem System verrichtete Arbeit im Allgemeinen vom Verlauf der Zustandsänderung abhängt, ist die Arbeit bei geschlossenen adiabaten Systemen nur durch den Anfangs- und Endzustand des Systems gegeben und unabhängig vom Zustandsverlauf, da die innere Energie eine Zustandsgröße ist. Die innere Energie eines Systems kann also bis auf eine additive Konstante dadurch gemessen werden, dass man das geschlossene System adiabatisch isoliert und dann die am System verrichtete Arbeit bestimmt. Da man einen Zustand mit der Energie Null nicht herstellen kann, ist es nach dieser Methode nicht möglich, den Absolutwert der inneren Energie zu ermitteln. Man legt daher willkürlich einen Bezugszustand für die innere Energie fest und misst also Energiedifferenzen gegenüber diesem Zustand. Dass die auf diese Weise ermittelte innere Energie noch eine additive Konstante enthält, ist belanglos, wenn man

Zustandsänderungen untersucht, da dann immer nur Differenzen von inneren Energien vorkommen und somit die Konstanten wegfallen<sup>1</sup>.

Wird an dem geschlossenen adiabaten System Volumenänderungsarbeit während einer quasistatischen, reibungsfreien Zustandsänderung geleistet, ist also keine Dissipation vorhanden, so ist die Änderung der inneren Energie wegen Gl. 4.33

$$U_2 - U_1 = - \int_1^2 p \, dV.$$

Es gilt somit für das geschlossene adiabate System

$$p = - \left( \frac{dU}{dV} \right).$$

Der Druck  $p$  ist somit bekannt, wenn man die innere Energie  $U$  eines solchen Systems in Abhängigkeit vom Volumen  $V$  kennt. Umgekehrt ist die inneren Energie bekannt, wenn man den Druck und das Volumen des Systems kennt. Man kann daher die innere Energie als Funktion der beiden unabhängigen Variablen  $p$  und  $V$  oder wegen der für Gase und Flüssigkeiten gegebener chemischer Zusammensetzung gültigen thermischen Zustandsgleichung  $f(p, V, T) = 0$  auch als Funktion von Volumen und Temperatur darstellen

$$U = U(V, T). \quad (5.14)$$

Diese Gleichung gilt allerdings nur unter der einschränkenden Voraussetzung, dass es sich um ein homogenes System handelt, das aus einem einheitlichen Stoff besteht. Wir nannten dies ein einfaches System. Andernfalls könnten weitere Variablen die innere Energie beeinflussen, z. B. die chemische Zusammensetzung, die elektrische oder die magnetische Feldstärke.

In Kap. 6 werden wir zeigen, dass die innere Energie idealer Gase nur von der Temperatur abhängt

$$U = U(T) \quad (\text{ideale Gase}). \quad (5.15)$$

Dies ist in Übereinstimmung mit der kinetischen Deutung der inneren Energie nach Abschn. 4.1.2.

Zur Messung der Wärme bringt man das zuvor beschriebene, geschlossene adiabate System von einem Zustand 1, gekennzeichnet durch bestimmte Werte  $V_1, T_1$  in einen Zustand 2, gekennzeichnet durch bestimmte Werte  $V_2, T_2$ . Hierfür galt

$$U_2 - U_1 = (L_{12})_{\text{ad}}.$$

Nun entfernt man die Wärmeisolierung, sodass das System nicht mehr adiabatisch ist, und überführt es wieder vom Zustand 1 in den Zustand 2. Dabei misst man die am System

<sup>1</sup> Dies gilt im Allgemeinen nicht mehr, wenn chemische Reaktionen vorkommen.



verrichtete Arbeit  $L_{12}$ . Da das System nicht mehr adiabat ist, gilt jetzt

$$U_2 - U_1 = L_{12} + Q_{12} .$$

Vergleicht man beide Prozesse miteinander, so ist

$$(L_{12})_{\text{ad}} - L_{12} = Q_{12} .$$

Damit kann auch die Wärme mit Hilfe der bekannten Energieform Arbeit gemessen werden.

---

## 5.5 Die Massenbilanz für offene Systeme

Die *Gesamtmasse* eines geschlossenen Systems bleibt stets erhalten. Sie ist somit wie die Energie eine *Erhaltungsgröße*. Senken oder Quellen bezüglich der Gesamtmasse existieren nicht. Bei einem offenen System muss die Zu- oder Abnahme der Gesamtmasse des Systems gleich der Differenz aus den zugeführten und den abgeführten Massen sein. Entsprechend der allgemeinen Struktur einer Bilanzgleichung in differentieller Form, Gl. 5.1, bedeutet dies

$$dM = \sum_{k=1}^n dM_k^{\text{SG}} \quad (5.16a)$$

oder

$$dM = \sum_{\text{zu}} dM_{\text{zu}} - \sum_{\text{ab}} dM_{\text{ab}} , \quad (5.16b)$$

wenn man die verschiedenen über die Systemgrenze transportierten Massen  $dM_k^{\text{SG}}$  in zugeführte Massen  $dM_{\text{zu}}$  und abgeführte Massen  $dM_{\text{ab}}$  unterteilt und die in der Literatur für den Massentransport meist gewählte Vorzeichenkonvention<sup>2</sup> verwendet, nach der zugeführte und abgeführte Massen positiv sind, d. h.  $dM_{\text{zu}} > 0$  und  $dM_{\text{ab}} > 0$ .

Für eine Änderung des Systemzustands von 1 nach 2 ergibt sich daraus

$$M_2 - M_1 = \sum_{\text{zu}} M_{\text{zu},12} - \sum_{\text{ab}} M_{\text{ab},12} \quad (5.17)$$

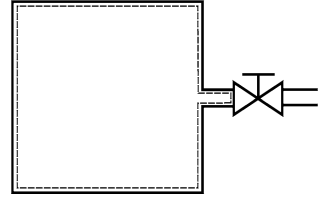
und für einen kontinuierlichen Prozess

$$\frac{dM}{d\tau} = \sum_{\text{zu}} \dot{M}_{\text{zu}} - \sum_{\text{ab}} \dot{M}_{\text{ab}} . \quad (5.18)$$

---

<sup>2</sup> In den folgenden Kapiteln werden die Größen  $dM_{\text{zu}}$  und  $dM_{\text{ab}}$  daher stets als positiv betrachtet, wenngleich dies streng genommen im Hinblick auf Abschn. 5.1 inkonsequent ist.

**Abb. 5.5** Befüllen eines Behälters



Handelt es sich um einen stationären Prozess, muss die zeitliche Änderung der Systemmasse Null sein,  $dM/d\tau = 0$ , und es gilt

$$0 = \sum_{\text{zu}} \dot{M}_{\text{zu}} - \sum_{\text{ab}} \dot{M}_{\text{ab}} . \quad (5.19)$$

Bei einem stationären Prozess muss also die Summe der zuströmenden Massenströme gleich der Summe der abströmenden Massenströme sein.

Betrachten wir hierzu zwei Beispiele, das Befüllen eines zunächst evakuierten Behälters, Abb. 5.5, und das stationäre Durchströmen eines Verdichters, Abb. 5.6.

Der Behälter in Abb. 5.5 sei im Zustand 1 evakuiert. Zum Befüllen wird ein zunächst geschlossenes Ventil geöffnet und Luft strömt aus der Umgebung in den Behälter bis Druckgleichgewicht herrscht (Zustand 2). Im Zustand 1 war die Masse im System  $M_1 = 0$ , und es wurde während der Zustandsänderung ausschließlich Masse zu- und nicht abgeführt. Nach Gl. 5.17 gilt folglich

$$M_2 = M_{\text{zu},12} .$$

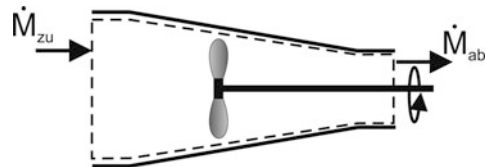
Der stationär arbeitende Verdichter in Abb. 5.6 fördere ein Gas, wobei es auf einen höheren Druck verdichtet wird. Nach Gl. 5.19 gilt in diesem Fall

$$\dot{M}_{\text{zu}} = \dot{M}_{\text{ab}} ,$$

da bei einem stationären Prozess keine Masse im System gespeichert wird, d. h.  $dM/d\tau = 0$ .

Wenngleich wir im Band 1 dieses Buches nur Einstoffsysteme behandeln, so sei bezüglich der Massenbilanz hier dennoch kurz auf die Besonderheiten von Mehrstoffsystemen eingegangen. Zusätzlich zur Bilanzierung der Gesamtmasse eines Systems, Gl. 5.16a bis 5.19, kann es bei Mehrstoffsystemen notwendig sein, für jede Stoffkomponente  $i$  eine Bilanz der Teilmasse  $M_i$  dieser Komponente zu erstellen. Durch Stoffwandlungsprozesse im System können im System einzelne Teilmassen erzeugt werden oder verschwinden.

**Abb. 5.6** Stationärer Verdichter



Beispiele sind eine Verbrennung von Kohlenstoff C unter Bildung von  $\text{CO}_2$ , eine „kalte“ Verbrennung von Wasserstoff  $\text{H}_2$  in einer Brennstoffzelle unter Bildung von  $\text{H}_2\text{O}$  oder eine Photosynthese unter Abbau von  $\text{CO}_2$ . In den Bilanzen der Teilmassen sind also ein Quell- bzw. Senkenterm zu berücksichtigen. In Analogie zu den Bilanzgleichungen für die Gesamtmasse (5.16a) und (5.16b) gilt somit für jede Komponente  $i$  eine Bilanzgleichung für die Teilmasse  $M_i$

$$dM_i = \sum_{k=1}^n dM_{i,k}^{\text{SG}} + dM_i^{\text{Q}} \quad (5.20a)$$

oder

$$dM_i = \sum_{\text{zu}} dM_{i,\text{zu}} - \sum_{\text{ab}} dM_{i,\text{ab}} + dM_i^{\text{Q}}, \quad (5.20b)$$

wobei  $dM_i^{\text{Q}}$  der Quellterm für die Masse der Komponente  $i$  ist.

## 5.6 Der erste Hauptsatz für offene Systeme

Der erste Hauptsatz für offene Systeme unterscheidet sich von dem für geschlossene Systeme dadurch, dass die mit Materietransport über die Systemgrenze ausgetauschte Energie berücksichtigt werden muss. Die differentielle Form des ersten Hauptsatzes für offene Systeme hatten wir bereits kurz in Abschn. 5.2, Gl. 5.4b, abgeleitet. Berücksichtigt man, dass  $k$  einzelne Massen über die Systemgrenze zu- oder abgeführt werden, so ergibt sich

$$dE = dQ + dL_t + \sum_{k=1}^n dM_k^{\text{SG}} \left( h_k + \frac{w_k^2}{2} + gz_k \right). \quad (5.21a)$$

Greift man die bei der Massenbilanz (5.16b) getroffene Vereinbarung der Unterteilung in zugeführte Massen  $dM_{\text{zu}}$  und abgeführte Massen  $dM_{\text{ab}}$  auf, so folgt

$$\begin{aligned} dE = dQ + dL_t + \sum_{\text{zu}} dM_{\text{zu}} \left( h_{\text{zu}} + \frac{w_{\text{zu}}^2}{2} + gz_{\text{zu}} \right) \\ - \sum_{\text{ab}} dM_{\text{ab}} \left( h_{\text{ab}} + \frac{w_{\text{ab}}^2}{2} + gz_{\text{ab}} \right). \end{aligned} \quad (5.21b)$$

Für die Beschreibung einer Zustandsänderung von 1 nach 2 wählt man im Allgemeinen die integrierte Form

$$\begin{aligned} E_2 - E_1 = Q_{12} + L_{t12} + \sum_{\text{zu}} M_{\text{zu}} \left( h_{\text{zu}} + \frac{w_{\text{zu}}^2}{2} + gz_{\text{zu}} \right) \\ - \sum_{\text{ab}} M_{\text{ab}} \left( h_{\text{ab}} + \frac{w_{\text{ab}}^2}{2} + gz_{\text{ab}} \right) \end{aligned} \quad (5.22)$$

und für die Beschreibung eines kontinuierlichen Prozesses die Form

$$\begin{aligned} \frac{dE}{d\tau} = \dot{Q} + P + \sum_{\text{zu}} \dot{M}_{\text{zu}} \left( h_{\text{zu}} + \frac{w_{\text{zu}}^2}{2} + gz_{\text{zu}} \right) \\ - \sum_{\text{ab}} \dot{M}_{\text{ab}} \left( h_{\text{ab}} + \frac{w_{\text{ab}}^2}{2} + gz_{\text{ab}} \right). \end{aligned} \quad (5.23a)$$

Handelt es sich um den Spezialfall eines stationären Prozesses, so gilt vereinfachend  $dE/d\tau = 0$  und  $\sum_{\text{zu}} \dot{M}_{\text{zu}} = \sum_{\text{ab}} \dot{M}_{\text{ab}}$ . Es gilt dann

$$\begin{aligned} \dot{Q} + P = \sum_{\text{ab}} \dot{M}_{\text{ab}} \left( h_{\text{ab}} + \frac{w_{\text{ab}}^2}{2} + gz_{\text{ab}} \right) \\ - \sum_{\text{zu}} \dot{M}_{\text{zu}} \left( h_{\text{zu}} + \frac{w_{\text{zu}}^2}{2} + gz_{\text{zu}} \right). \end{aligned} \quad (5.23b)$$

Wird das offene System nur von einem Stoffstrom durchflossen, so gilt  $\dot{M}_{\text{zu}} = \dot{M}_{\text{ab}} = \dot{M}$ , und aus Gl. 5.23b folgt

$$\dot{Q} + P = \dot{M} \left( h_{\text{ab}} - h_{\text{zu}} + \frac{w_{\text{ab}}^2}{2} - \frac{w_{\text{zu}}^2}{2} + gz_{\text{ab}} - gz_{\text{zu}} \right). \quad (5.23c)$$

Betrachten wir das in Abschn. 5.5 behandelte Beispiel des Befüllens eines starren Behälters, Abb. 5.5, der im Zustand 1 evakuiert war und sich im Zustand 2 nach dem Druckausgleich mit der Umgebung mit Luft gefüllt hatte. Wir nehmen zunächst an, dass diese Zustandsänderung sehr schnell ablief und daher während des Prozesses keine Wärme über die Systemgrenze transportiert wurde. Die Energiebilanz (5.22) vereinfacht sich dann wegen  $E_1 = 0$  (evakuierter Behälter),  $Q_{12} = 0$ ,  $L_{t,12} = 0$  und  $M_{\text{ab}} = 0$  sowie unter Vernachlässigung aller kinetischer und potentieller Energien zu

$$U_2 = M_{\text{zu}} h_{\text{zu}}.$$

Da die zugeführte Masse wegen  $M_1 = 0$  der Systemmasse im Zustand 2 entspricht, ist  $M_2 = M_{\text{zu}}$  und eine Division durch diese Masse ergibt

$$u_2 = h_{\text{zu}}.$$

Die innere Energie der Luft im Behälter im Zustand 2 entspricht also der Enthalpie der Luft in der Umgebung.

Der in Abschn. 5.5, Abb. 5.6, beispielhaft beschriebene stationär arbeitende Verdichter sei adiabatisch, d. h. es gilt  $\dot{Q} = 0$  sowie  $dE/d\tau = 0$ . Gleichung 5.23a vereinfacht sich in diesem Fall unter Vernachlässigung einer Änderung der potentiellen Energie des ein- und austretenden Massenstroms zu

$$0 = P + \dot{M}_{\text{zu}} \left( h_{\text{zu}} + \frac{w_{\text{zu}}^2}{2} \right) - \dot{M}_{\text{ab}} \left( h_{\text{ab}} + \frac{w_{\text{ab}}^2}{2} \right).$$

Da die Massenbilanz  $\dot{M}_{zu} = \dot{M}_{ab}$  für den stationären Prozess ergab, kann mit  $\dot{M} = \dot{M}_{zu} = \dot{M}_{ab}$  daraus die aufgenommene Verdichterleistung zu

$$P = \dot{M} \left( h_{ab} - h_{zu} + \frac{w_{ab}^2 - w_{zu}^2}{2} \right)$$

berechnet werden. Häufig kann die Änderung der kinetischen Energie gegenüber der Enthalpiedifferenz vernachlässigt werden. Dies führt dazu, dass die dem Verdichter zugeführte spezifische Leistung  $P/\dot{M}$  gleich der Erhöhung der spezifischen Enthalpie des Stoffstromes ist.

## 5.7 Technische Arbeit in stationär durchströmten Kontrollräumen

In vielen technischen Maschinen wie Turbinen, Strahltriebwerken, Pumpen oder Kompressoren erfährt das Fluid beim Durchströmen der Maschine eine Druckänderung. Wir wollen die hierbei verrichtete, in der Praxis oft vorkommende und daher sehr wichtige technische Arbeit berechnen. Dazu betrachten wir als Beispiel einen Kompressor, Abb. 5.7, in dem ein Gas vom Druck  $p_1$  auf den Druck  $p_2$  verdichtet wird. Der Kompressor werde stationär durchströmt, in einer Zeitspanne  $\Delta\tau$  tritt also ein Massenelement  $\Delta M$  vom Zustand 1 ein und ein ebenso großes Massenelement  $\Delta M$  vom Zustand 2 aus. Der erste Hauptsatz für dieses stationär durchströmte System lautet analog zu Gl. 5.23c

$$0 = Q_{12} + L_{12} + \Delta M \left( h_1 - h_2 + \frac{w_1^2}{2} - \frac{w_2^2}{2} + gz_1 - gz_2 \right) \quad (5.24a)$$

bzw. nach Division durch das Massenelement  $\Delta M$

$$0 = q_{12} + l_{12} + \left( h_1 - h_2 + \frac{w_1^2}{2} - \frac{w_2^2}{2} + gz_1 - gz_2 \right). \quad (5.24b)$$

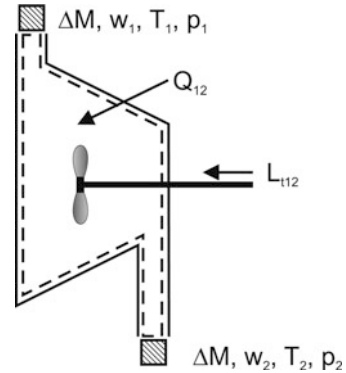
Nun betrachten wir das Massenelement  $\Delta M$  als geschlossenes Ersatzsystem, das in der Maschine eine Zustandsänderung von 1 nach 2 erfährt. Der erste Hauptsatz für dieses Ersatzsystem lautet

$$\Delta M \left( u_2 - u_1 + \frac{w_2^2}{2} - \frac{w_1^2}{2} + gz_2 - gz_1 \right) = Q_{12} + L_{12} \quad (5.25a)$$

bzw. nach Division durch das Massenelement  $\Delta M$

$$\left( u_2 - u_1 + \frac{w_2^2}{2} - \frac{w_1^2}{2} + gz_2 - gz_1 \right) = q_{12} + l_{12}. \quad (5.25b)$$

**Abb. 5.7** Technische Arbeit an einem offenen Kontrollsystem am Beispiel Kompressor



Die am Massenelement verrichtete Gesamtarbeit  $l_{12}$  setzt sich additiv zusammen aus der Volumenänderungsarbeit  $l_{v12}$ , der beispielsweise durch Reibung in den Lagern auftretenden Dissipationsarbeit  $l_{diss,12}$  und der mechanischen Arbeit  $l_{m12}$ , die die Änderung der kinetischen und potentiellen Energie bewirkt. Es folgt

$$\left( u_2 - u_1 + \frac{w_2^2}{2} - \frac{w_1^2}{2} + gz_2 - gz_1 \right) = q_{12} + l_{v12} + l_{diss,12} + l_{m12} \quad (5.25c)$$

oder

$$0 = q_{12} + l_{v12} + l_{diss,12} + l_{m12} + \left( u_1 - u_2 + \frac{w_1^2}{2} - \frac{w_2^2}{2} + gz_1 - gz_2 \right). \quad (5.25d)$$

Die im Kompressor verrichtete technische Arbeit lässt sich nun berechnen, indem man Gln. 5.24b und 5.25d gleichsetzt und dabei berücksichtigt, dass wegen  $dh = du + p dv + v dp$

$$h_2 - h_1 = u_2 - u_1 + \int_1^2 p dv + \int_1^2 v dp$$

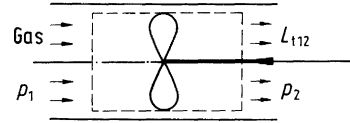
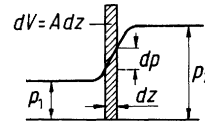
gilt. Es ergibt sich für die technische Arbeit damit

$$l_{t12} = \int_1^2 v dp + l_{diss,12} + l_{m12}. \quad (5.26)$$

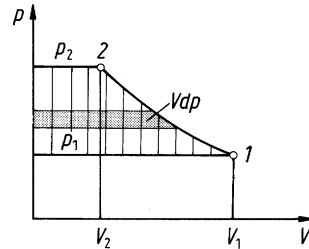
Die technische Arbeit, die an dem Kompressor aufgewendet wird, entspricht also der zur Verschiebung eines Fluidelementes gegen die Druckdifferenz  $dp$  erforderlichen Arbeit zuzüglich der Dissipationsarbeit und der mechanischen Arbeit. Anschaulich kann man dies auch wie folgt ableiten:

Wir betrachten hierzu die Verdichtung eines Gases entsprechend Abb. 5.8. Der Druckanstieg sei durch den in dem oberen Teil des Bildes gezeichneten Kurvenverlauf gegeben. Der Querschnitt  $A$  werde von dem kleinen Gasvolumen  $dV = A dz$  durchströmt. Dieses

**Abb. 5.8** Kompression eines Gases



**Abb. 5.9** Darstellung von  $\int_1^2 V dp$



Volumen muss durch den Verdichter gegen den Druckanstieg  $dp$  verschoben werden. Dazu ist eine technische Arbeit, hier eine Wellenarbeit, zu verrichten. Die aufzuwendende Kraft ist  $dpA$ , der Weg  $dz$  und die technische Arbeit  $dpA dz = dp dV$ . Denkt man sich einen Beobachter an dem Querschnitt  $A$  postiert, der die aufzuwendende Arbeit misst, so würde dieser für jedes Volumen  $dV$  eine technische Arbeit  $dp dV$  registrieren. Addition über alle Volumelemente, welche den Querschnitt  $A$  in einer bestimmten Zeitspanne  $d\tau$  passieren, ergibt dann die Arbeit, um ein Volumen  $V$  gegen den Druckanstieg  $dp$  zu verschieben

$$dL_t = V dp.$$

Die an der Welle der Maschine verrichtete Arbeit diene hier ausschließlich zur Druckerhöhung. Man könnte sie daher auch als „Druckarbeit“ bezeichnen. Da in realen Maschinen auch noch technische Arbeit dissipiert wird, beispielsweise durch Reibung in den Lagern oder durch Verwirbelung des Gases, und das Fluid beschleunigt und im Schwerfeld angehoben werden kann, kommen diese Terme, die nicht zur Druckerhöhung dienen, noch hinzu. Es folgt analog der zuvor abgeleiteten Gl. 5.26 der Zusammenhang

$$dL_t = V dp + dL_{\text{diss}} + dL_m. \quad (5.27)$$

Die Arbeit  $\int_1^2 V dp$  ist die technische Arbeit bei dissipationfreier Zustandsänderung, falls keine mechanische Arbeit verrichtet wird. Sie wird dem Betrag nach durch die senkrecht schraffierte Fläche in Abb. 5.9 dargestellt. Die grau hinterlegte Fläche ist ein Maß für die differentielle Arbeit  $V dp$ .

Thermodynamik

Grundlagen und technische Anwendungen Band 1:

Einstoffsysteme

Stephan, P.; Schaber, K.; Stephan, K.; Mayinger, F.

2013, XIX, 559 S. 208 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-642-30097-4