

Kapitel 1

Motivation: Mechanik und Optik



Für ein mathematisches Billard braucht man ein Gebiet G , beispielsweise in der Ebene (den Billardtisch), und einen Massepunkt (die Billardkugel), der sich in diesem Gebiet frei bewegt. Der Massepunkt bewegt sich so lange geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit, bis er auf den Rand trifft. Die Reflexion am Rand ist elastisch und unterliegt einem bekannten Gesetz: *Der Einfallswinkel ist genauso groß wie der Reflexionswinkel*. Nach der Reflexion bewegt sich der Massepunkt mit der neuen Geschwindigkeit weiter frei fort, bis er erneut den Rand trifft; usw. (vgl. Abb. 1.1).

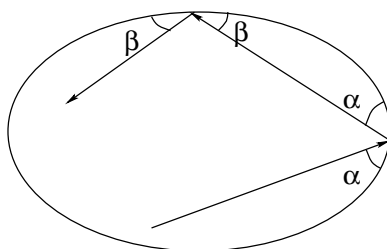


Abb. 1.1 Billardreflexion

Eine äquivalente Beschreibung der Billardreflexion lautet: Die Geschwindigkeit der auftreffenden Billardkugel wird am Auftreffpunkt in eine Normal- und eine Tangentialkomponente zerlegt. Bei der Reflexion ändert die Normalkomponente augenblicklich ihr Vorzeichen, während die Tangentialkomponente gleich bleibt.

Insbesondere ändert sich der Betrag der Geschwindigkeit nicht, und man kann annehmen, dass sich der Punkt ewig mit gleicher Geschwindigkeit weiterbewegt.

Diese Beschreibung gilt für Gebiete im mehrdimensionalen Raum, und noch allgemeiner für andere Geometrien, nicht nur die euklidischen. Wir gehen natürlich davon aus, dass der Punkt an einer glatten Stelle des Randes reflektiert wird. Trifft die Billardkugel aber eine Ecke des Billardtisches, so ist die Reflexion nicht definiert, und die Bewegung der Kugel endet genau dort.

Man kann sich in Bezug auf das Billardsystem viele Fragen stellen; viele werden wir in diesem Buch diskutieren. Sei G beispielsweise ein ebener Billardtisch mit einem glatten Rand. Wir interessieren uns für 2-periodische Hin- und Rück-Billardbahnen in G . Eine 2-periodische Billardbahn ist ein dem Gebiet G eingeschriebener Streckenzug, der an beiden Endpunkten senkrecht auf dem Rand steht. Die folgende Übung ist ziemlich schwer; Sie werden bis Kapitel 6 auf Seite 93 auf eine entsprechende Diskussion warten müssen.

- Übung 1.1** a) Existiert ein Gebiet G , in dem es keine 2-periodischen Billardbahnen gibt?
- b) Nehmen Sie an, dass G zudem konvex ist. Zeigen Sie, dass in G mindestens zwei verschiedene 2-periodische Billardbahnen existieren.
- c) Sei G ein konvexes Gebiet mit glattem Rand im dreidimensionalen Raum. Bestimmen Sie, wie viele 2-periodische Billardbahnen es in G mindestens gibt.
- d) Eine Kreisscheibe G in der Ebene enthält eine 1-parametrische Schar 2-periodischer Billardbahnen, die einmal komplett durch G laufen (diese Trajektorien sind die Durchmesser von G). Gibt es andere konvexe Billardtische mit dieser Eigenschaft?

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit zwei Motivationen dafür, mathematische Billards zu untersuchen: Sie kommen aus der klassischen Mechanik elastischer Teilchen und aus der geometrischen Optik.

► **Beispiel 1.1** Betrachten wir das mechanische System aus zwei Massepunkten m_1 und m_2 auf der positiven Halbachse $x \geq 0$. Der Stoß zwischen den beiden Punkten ist elastisch; Energie und Impuls bleiben also erhalten. Die Reflexion am linken Endpunkt der Halbachse ist ebenfalls elastisch: Trifft ein Punkt die „Wand“ $x = 0$, so ändert seine Geschwindigkeit das Vorzeichen.

Die Koordinaten der Punkte seien x_1 und x_2 . Dann wird der Zustand des Systems durch einen Punkt (x_1, x_2) in der Ebene beschrieben, für dessen Koordinaten die Ungleichung $0 \leq x_1 \leq x_2$ gilt. Folglich ist der *Konfigurationsraum* des Systems ein ebener Keil mit dem Winkel $\pi/4$.

Die Geschwindigkeiten der Massepunkte seien v_1 und v_2 . Solange die Massepunkte nicht zusammenstoßen, bewegt sich der Phasenpunkt (x_1, x_2) mit konstanter Geschwindigkeit (v_1, v_2) . Betrachten wir nun den Zeitpunkt des Zusammenstoßes.

Die Geschwindigkeiten sind dann u_1 und u_2 . Impuls- und Energieerhaltung lauten wie folgt:

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2, \quad \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}. \quad (1.1)$$

Wir führen nun die neuen Variablen $\bar{x}_i = \sqrt{m_i} x_i; i = 1, 2$ ein. In diesen Variablen ist der Konfigurationsraum der Keil, dessen unterer Rand die Gerade $\bar{x}_1 / \sqrt{m_1} = \bar{x}_2 / \sqrt{m_2}$ ist; der Winkel dieses Keils ist $\arctan \sqrt{m_1 / m_2}$ (vgl. Abb. 1.2).

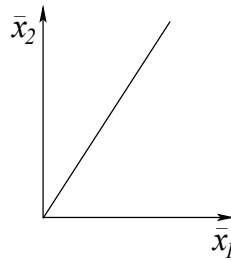


Abb. 1.2 Konfigurationsraum zweier Massepunkte auf der Halbachse

Im neuen Koordinatensystem skalieren die Geschwindigkeiten wie die Koordinaten: $\bar{v}_1 = \sqrt{m_1} v_1$, etc. Umschreiben der Gleichung (1.1) liefert:

$$\sqrt{m_1} \bar{u}_1 + \sqrt{m_2} \bar{u}_2 = \sqrt{m_1} \bar{v}_1 + \sqrt{m_2} \bar{v}_2, \quad \bar{u}_1^2 + \bar{u}_2^2 = \bar{v}_1^2 + \bar{v}_2^2. \quad (1.2)$$

Die zweite dieser Gleichungen sagt uns, dass sich der Betrag des Geschwindigkeitsvektors $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ beim Stoß nicht ändert. Die erste Gleichung aus (1.2) sagt uns, dass auch das Skalarprodukt des Geschwindigkeitsvektors mit dem Vektor $(\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2})$ erhalten bleibt. Der letzte Vektor ist tangential zum Rand des Konfigurationsraumes: $\bar{x}_1 / \sqrt{m_1} = \bar{x}_2 / \sqrt{m_2}$. Folglich ändert sich die Tangentialkomponente des Geschwindigkeitsvektors nicht, und die Konfigurationstrajektorie wird an diesem Rand nach dem Billardgesetz reflektiert.

Genauso betrachten wir einen Stoß des linken Massepunktes mit der Wand $x = 0$; ein solcher Stoß entspricht der Billardreflexion an der vertikalen Randkomponente des Konfigurationsraumes. Daraus schlussfolgern wir, dass das System aus zwei elastisch reflektierten Massepunkten m_1 und m_2 auf der Halbachse isomorph zum Billard im Winkel $\sqrt{m_1 / m_2}$ ist.

Als unmittelbare Konsequenz daraus können wir die Anzahl der Stöße in unserem System berechnen. Dazu betrachten wir das Billardsystem im Winkel α . Anstatt die Billardbahn an den Seiten des Keils zu reflektieren, spiegeln wir den Keil an der entsprechenden Seite und entfalten die Billardbahn zu einer Geraden (vgl. Abb. 1.3 auf der nächsten Seite). Diese, aus der geometrischen Optik inspirierte *Entfaltungs-*

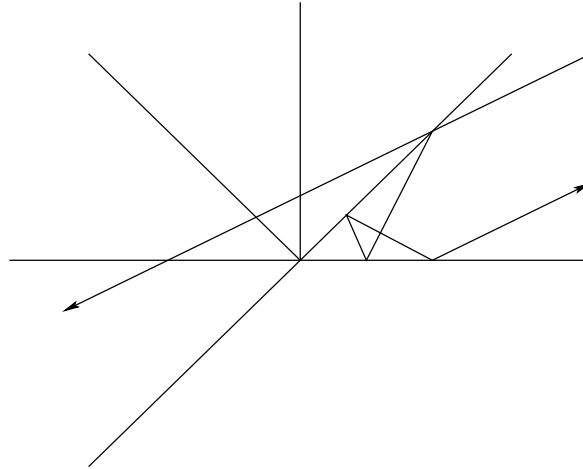


Abb. 1.3 Entfaltung einer Billardbahn in einem Keil

methode ist ein sehr nützlicher Trick, wenn es darum geht, Billard in Polygonen zu untersuchen.

Sehen wir uns die entfaltete Billardbahn in einem Keil an (vgl. Abb. 1.3), so stellen wir fest, dass die Anzahl der Reflexionen durch $\lceil \pi/\alpha \rceil$ von oben beschränkt ist ($\lceil x \rceil$ ist die Aufrundungsfunktion, sie ordnet x die kleinste ganze Zahl zu, die nicht kleiner als x ist). Für das System der beiden Massepunkte auf der Halbachse ist die obere Schranke für die Anzahl der Stöße

$$\left\lceil \frac{\pi}{\arctan \sqrt{m_1/m_2}} \right\rceil. \quad (1.3)$$

Übung 1.2 Übertragen Sie die obere Schranke für die Anzahl der Stöße auf den Fall eines Keils, der innen konvex ist (vgl. Abb. 1.4).

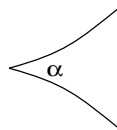


Abb. 1.4 Ebener Keil, der innen konvex ist

Übung 1.3 a) Interpretieren Sie das System aus zwei Massepunkten auf einer Strecke mit elastischen Stößen untereinander und an den Endpunkten der Strecke als ein Billard.

b) Zeigen Sie, dass das System aus drei Massepunkten m_1, m_2 und m_3 auf einer Geraden mit elastischen Stößen untereinander isomorph ist zum Billard in einem Keil im dreidimensionalen Raum. Beweisen Sie, dass für den Raumwinkel des Keils gilt:

$$\arctan \left(m_2 \sqrt{\frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 m_2 m_3}} \right). \quad (1.4)$$

c) Legen Sie das Bezugssystem in den Schwerpunkt, und reduzieren Sie das obige System auf das Billard im Innern eines ebenen Winkels (1.4).

d) Untersuchen Sie das System dreier Massepunkte mit elastischer Reflexion auf der Halbachse.

1.1 Exkurs: Billard zur Berechnung von π . Mithilfe von Gleichung (1.3) können wir die ersten Dezimalstellen der Zahl π berechnen. Im Folgenden geben wir dazu eine Kurzdarstellung des Artikels [39] von G. Galperin an.

Wir betrachten zwei Massepunkte auf der Halbachse und nehmen an, dass $m_2 = 100^k m_1$ ist. Der erste Massepunkt soll sich in Ruhe befinden, dem zweiten geben wir einen Impuls nach links. Sei $N(k)$ die Gesamtzahl der Stöße und Reflexionen im System, die nach der vorherigen Diskussion endlich ist. Wir behaupten, dass

$$N(k) = 3141592653589793238462643383 \dots$$

ist, nämlich die Zahl aus den ersten $k + 1$ Dezimalstellen von π . Wir wollen erläutern, warum diese Behauptung fast sicher gilt.

Unter der gewählten Anfangsbedingung (der erste Massepunkt befand sich in Ruhe) bewegt sich die Konfigurationstrajektorie in einer Richtung in den Keil, die parallel zur vertikalen Seite ist. In diesem Fall ist die Anzahl der Reflexionen durch eine Modifikation der Gleichung (1.3) gegeben, nämlich durch

$$N(k) = \left\lceil \frac{\pi}{\arctan(10^{-k})} \right\rceil - 1.$$

Diese Tatsache ergibt sich aus der bekannten Entfaltungsmethode.

Für den Moment wollen wir 10^{-k} mit x bezeichnen. Diese Zahl x ist sehr klein, und wir erwarten, dass $\arctan x$ sehr nah an x ist. Genauer heißt das

$$0 < \left(\frac{1}{\arctan x} - \frac{1}{x} \right) < x \quad \text{für } x > 0. \quad (1.5)$$

Übung 1.4 Beweisen Sie (1.5) durch Taylor-Entwicklung von $\arctan x$.

Die ersten k Stellen der Zahl

$$\left\lceil \frac{\pi}{x} \right\rceil - 1 = \lceil 10^k \pi \rceil - 1 = \lfloor 10^k \pi \rfloor$$

stimmen mit den ersten $k + 1$ Dezimalstellen von π überein. Die zweite Gleichung ergibt sich aus der Tatsache, dass $10^k \pi$ keine ganze Zahl ist; $\lfloor y \rfloor$ ist die Abrundungsfunktion, sie ordnet y die größte ganze Zahl zu, die nicht größer als y ist.

Wir sind fertig, wenn wir zeigen können, dass gilt:

$$\left\lceil \frac{\pi}{x} \right\rceil = \left\lceil \frac{\pi}{\arctan x} \right\rceil. \quad (1.6)$$

Nach (1.5) ist

$$\left\lceil \frac{\pi}{x} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{\pi}{\arctan x} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{\pi}{x} + \pi x \right\rceil. \quad (1.7)$$

Die Zahl $\pi x = 0,0 \dots 031415 \dots$ hat nach dem Dezimalkomma $k - 1$ Nullen. Deshalb kann sich die linke Seite von Gleichung (1.7) nur dann von ihrer rechten Seite unterscheiden, wenn es in der Dezimalentwicklung von π nach den ersten $k + 1$ Stellen eine Kette von $k - 1$ Neunen gibt. Wir wissen nicht, ob eine solche Kette jemals vorkommt, aber für große Werte von k ist das extrem unwahrscheinlich. Existiert eine solche Kette nicht, dann werden die beiden Ungleichungen in (1.7) zu Gleichungen, Gleichung (1.6) gilt, und daraus ergibt sich die Behauptung. ♣

Wir wollen uns nun Beispielen für mechanische Systeme zuwenden, die auf Billards führen. Beispiel 1.1 ist ziemlich alt, und ich weiß nicht, wo es erstmals betrachtet wurde. Obwohl ihm das nächste Beispiel ähnelt, ist dieses wiederum überraschend aktuell (vgl. [29, 45]).

► **Beispiel 1.2** Wir betrachten drei Massepunkte m_1, m_2 und m_3 mit elastischer Reflexion auf dem Kreis. Wir erwarten, dass auch dieses mechanische System zu einem Billard isomorph ist.

Seien x_1, x_2 und x_3 die Winkelkoordinaten dieser Punkte. Indem wir S^1 als $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ betrachten, heben wir die Koordinaten in den Raum der reellen Zahlen. Wir bezeichnen die gehobenen Koordinaten mit demselben Buchstaben, aber mit Überstrich. (Diese Hebung ist nicht eindeutig: Wir können jede Koordinate um ein Vielfaches von 2π ändern.) Wie in Beispiel 1.1 reskalieren wir die Koordinaten. Stöße zwischen Paaren von Massepunkten entsprechen drei Scharen paralleler Ebenen im dreidimensionalen Raum:

$$\frac{\bar{x}_1}{\sqrt{m_1}} = \frac{\bar{x}_2}{\sqrt{m_2}} + 2k\pi, \quad \frac{\bar{x}_2}{\sqrt{m_2}} = \frac{\bar{x}_3}{\sqrt{m_3}} + 2m\pi, \quad \frac{\bar{x}_3}{\sqrt{m_3}} = \frac{\bar{x}_1}{\sqrt{m_1}} + 2n\pi$$

mit $k, m, n \in \mathbf{Z}$.

Alle beteiligten Ebenen stehen senkrecht auf der Ebene

$$\sqrt{m_1}\bar{x}_1 + \sqrt{m_2}\bar{x}_2 + \sqrt{m_3}\bar{x}_3 = \text{const.}, \quad (1.8)$$

und sie zerlegen diese Ebene in kongruente Dreiecke. Die Ebenen zerlegen wiederum den Raum in kongruente, unendliche Dreiecksprismen, und das System aus drei Massepunkten auf dem Kreis ist isomorph zum Billard in einem solchen Prisma. Die Raumwinkel der Prismen haben Sie bereits in Übung 1.3 b) berechnet.

Analog zu Übung 1.3 c) können wir einen Freiheitsgrad eliminieren. Und zwar hat der Schwerpunkt des Systems die Winkelgeschwindigkeit

$$\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Wir können das Bezugssystem in diesen Schwerpunkt legen. In den neuen Koordinaten bedeutet das

$$\sqrt{m_1}\bar{v}_1 + \sqrt{m_2}\bar{v}_2 + \sqrt{m_3}\bar{v}_3 = 0,$$

und daher gilt Gleichung (1.8). Mit anderen Worten: Unser System reduziert sich auf das Billard im Innern eines spitzwinkligen Dreiecks mit den Winkeln

$$\arctan \left(m_i \sqrt{\frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 m_2 m_3}} \right) \quad i = 1, 2, 3.$$

Anmerkung 1 Beispiel 1.2 und Übung 1.3 liefern mechanische Systeme, die isomorph zum Billard im Innern eines rechtwinkligen oder eines spitzwinkligen Dreiecks sind. Interessant wäre es, ähnliche Interpretationen für ein stumpfwinkliges Dreieck zu finden.

Übung 1.5 Dieses Problem stammt von S. Wagon. Nehmen Sie an, dass 100 identische, elastisch zusammenstoßende Massepunkte beliebig auf einem 100 m langen Intervall verteilt sind und sich jeder Massepunkt mit einer bestimmten Geschwindigkeit, die nicht kleiner als 1 m/s ist, nach links oder rechts fortbewegt. Erreicht ein Massepunkt eines der beiden Enden des Intervalls, so fällt er herab und verschwindet. Wie lange muss man höchstens warten, bis alle Punkte verschwunden sind?

Massepunkte zu betrachten ist in Dimensionen größer als 1 sinnlos: Die Massepunkte werden mit Wahrscheinlichkeit 1 nie zusammenstoßen. Stattdessen betrachtet man das System harter Kugeln in einem Behälter; der Stoß der Kugeln untereinander und mit den Wänden ist dabei elastisch. Ein solches System ist in der statistischen Mechanik von großem Interesse: Es dient als Modell für ein ideales Gas.

Im nächsten Beispiel werden wir ein spezielles System dieser Art betrachten. Zunächst wollen wir aber den elastischen Stoß zwischen zwei Kugeln beschreiben. Dabei haben die beiden Kugeln die Massen m_1 und m_2 und die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 (die Dimension des umgebenden Raumes spezifizieren wir nicht näher). Wir betrachten den Moment des Zusammenstoßes. Wir zerlegen die Geschwindigkeiten in eine Radial- und eine Tangentialkomponente:

$$v_i = v_i^r + v_i^t, \quad i = 1, 2.$$

Die Richtung der Radialkomponente ist die Richtung der Achse zwischen den Mittelpunkten der Kugeln, und die Tangentialkomponente steht senkrecht darauf. Bei einem Stoß bleiben die Tangentialkomponenten gleich, und die Radialkomponenten ändern sich so, als wären die Kugeln zusammenstoßende Massepunkte auf einer Geraden, also wie in Gleichung (1.1).

Übung 1.6 Betrachten Sie einen nichtzentralen Stoß zwischen zwei elastischen Kugeln. Beweisen Sie: Befand sich eine Kugel anfangs in Ruhe, so bewegen sich die Kugeln nach dem Stoß in orthogonale Richtungen.

► **Beispiel 1.3** Betrachten wir das System aus zwei identischen elastischen Scheiben von Radius r auf dem „Einheitsstorus“ $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$. Der Ort einer Scheibe wird durch die Lage ihres Mittelpunktes beschrieben, das ist ein Punkt auf dem Torus. Für zwei Kreisscheiben mit den Mittelpunkten x_1 und x_2 kann der Abstand zwischen x_1 und x_2 nicht kleiner als $2r$ sein. Die Menge dieser Punkte (x_1, x_2) ist der Konfigurationsraum unseres Systems. Jedes x_i kann in den $\mathbf{R}^2$ gehoben werden; eine solche Hebung ist bis auf die Addition eines ganzzahligen Vektors bestimmt. Die Geschwindigkeit v_i ist auf jeden Fall ein wohldefinierter Vektor im $\mathbf{R}^2$.

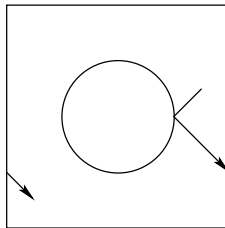


Abb. 1.5 Reduzierter Konfigurationsraum zweier Scheiben auf dem Torus

Wie in Beispiel 1.2 können wir die Anzahl der Freiheitsgrade reduzieren, indem wir den Schwerpunkt des Systems festhalten. Wir betrachten also die Differenz $x = x_2 - x_1$. Das ist ein Punkt auf dem Torus, der mindestens $2r$ von dem Punkt entfernt ist, der für den Ursprung des $\mathbf{R}^2$ steht (vgl. Abb. 1.5). Folglich ist der reduzierte Konfigurationsraum der Torus mit einem Loch in der Form einer Kreisscheibe mit dem Radius $2r$. Die Geschwindigkeit eines Konfigurationspunktes ist dann der Vektor $v_2 - v_1$.

Wenn die beiden Kreisscheiben zusammenstoßen, liegt der Konfigurationspunkt auf dem Rand des Lochs. Sei v die Geschwindigkeit des Punktes x vor dem Zusammenstoß und u seine Geschwindigkeit danach. Dann haben wir die Zerlegungen

$$v = v_2 - v_1 = (v_2^t - v_1^t) + (v_2^r - v_1^r), \quad u = u_2 - u_1 = (u_2^t - u_1^t) + (u_2^r - u_1^r).$$

Nach dem Reflexionsgesetz ändern sich die Tangentialkomponenten nicht: $u_1^t = v_1^t, u_2^t = v_2^t$. Um u_1^r und u_2^r zu bestimmen, verwenden wir (1.1) mit $m_1 = m_2$. Die Lösung dieses Systems ist: $u_1^r = v_2^r, u_2^r = v_1^r$. Folglich ist $u = (v_2^t - v_1^t) - (v_2^r - v_1^r)$. Bedenken Sie, dass der Vektor $v_2^t - v_1^t$ senkrecht auf x steht und folglich tangential zum Rand des Konfigurationsraumes ist, während der Vektor $v_2^r - v_1^r$ kollinear zu x ist und folglich senkrecht auf dem Rand steht. Deshalb ergibt sich der Vektor u aus v durch die Billardreflexion am Rand.

Daraus schließen wir, dass das (reduzierte) System aus zwei identischen elastischen Kreisscheiben auf dem Torus isomorph ist zum Billard auf einem Torus mit einem kreisscheibenförmigen Loch. Dieses Billardsystem ist unter dem Namen Sinai-Billard [99, 100] bekannt. Es war das erste Beispiel für ein Billardsystem mit chaotischem Verhalten; über solche Billardsysteme werden wir in Kapitel 8 sprechen.

Die Beispiele 1.1, 1.2 und 1.3 belegen ein allgemeines Prinzip: Ein konservatives mechanisches System mit elastischen Stößen ist zu einem gewissen Billard isomorph.

1.2 Exkurs: Konfigurationsräume. Konfigurationsräume einzuführen ist ein konzeptionell wichtiger und nichttrivialer Schritt bei der Untersuchung komplexer Systeme. Das folgende aufschlussreiche Beispiel ist in der russischen mathematischen Folklore weit verbreitet; es stammt von N. Konstatinov (vgl. [4]).

Betrachten wir das folgende Problem. Zwischen den Städten A und B gibt es zwei Straßen. Nehmen Sie an, dass zwei Autos, zwischen denen ein Seil der Länge $2r$ gespannt ist, von A nach B fahren können, ohne dass das Seil reißt. Beweisen Sie, dass zwei kreisförmige Waggonen mit dem Radius r , die sich in entgegengesetzten Richtungen auf diesen Straßen bewegen, zwangsläufig zusammenstoßen.

Um das Problem zu lösen, parametrisieren wir jede Straße von A nach B durch die Einheitslänge. Dann ist der Konfigurationsraum der Punktepaare mit je einem Punkt auf jeder Straße das Einheitsquadrat. Die Bewegung der Autos von A nach B wird

durch eine stetige Kurve beschrieben, die die Punkte $(0,0)$ und $(1,1)$ miteinander verbindet. Die Bewegung der Waggons wird durch eine Kurve beschrieben, die die Punkte $(0,1)$ und $(1,0)$ miteinander verbindet. Diese Kurven müssen sich schneiden, und ein Schnittpunkt steht für einen Zusammenstoß der Waggons (vgl. Abb. 1.6).

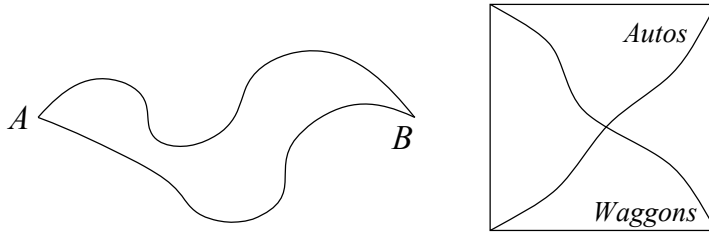


Abb. 1.6 Das Problem der zwei Straßen

Eine interessante Klasse von Konfigurationsräumen ergibt sich aus ebenen Stabanordnungen, das sind Systeme aus starren Stäben mit Gelenkverbindungen. Ein Pendel besteht beispielsweise aus einem Stab, der an einem Ende aufgehängt ist; sein Konfigurationsraum ist der Kreis S^1 . Ein Doppelpendel besteht aus zwei gekoppelten Stäben, die an einem Ende aufgehängt sind; ihr Konfigurationsraum ist der Torus $T^2 = S^1 \times S^1$.

Übung 1.7 Betrachten Sie eine Stabanordnung aus vier Einheitssegmenten, die zwei feste Punkte im Abstand $d \leq 4$ miteinander verbinden (vgl. Abb. 1.7).

- Bestimmen Sie die Dimension des Konfigurationsraumes der Stabanordnung.
- Sei $d = 3,9$. Beweisen Sie, dass der Konfigurationsraum die Sphäre S^2 ist.
- Sei $d = 1$. Beweisen Sie, dass der Konfigurationsraum die Sphäre mit vier Henkeln ist, also eine Fläche mit dem Geschlecht 4.

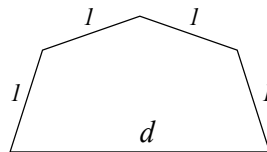


Abb. 1.7 Eine ebene Stabanordnung

Diese Übung hat Sie hoffentlich davon überzeugt, dass der Konfigurationsraum einer ebenen Stabanordnung, also eines sehr einfachen mechanischen Systems, eine komplizierte Topologie haben kann. Tatsächlich kann diese Topologie beliebig kom-

pliziert sein (was diese Aussage im Einzelnen bedeutet, wollen wir hier nicht näher diskutieren; vgl. M. Kapovich und J. Millson [56]).

Zum Abschluss dieses Exkurses wollen wir ein sehr einfaches System erwähnen: eine Gerade im Raum, die im Ursprung aufgehängt ist. Der Konfigurationsraum ist $\mathbf{RP}^2$, das ist die reelle projektive Ebene (vgl. Exkurs 5.4 auf Seite 82 für eine Diskussion). Befindet sich die Gerade im $\mathbf{R}^n$, so ist der Konfigurationsraum der reelle projektive Raum $\mathbf{RP}^{n-1}$. Dieser Raum spielt in der Geometrie und in der Topologie eine sehr prominente Rolle. Für eine orientierte Gerade ist der entsprechende Konfigurationsraum selbstverständlich die Sphäre S^{n-1} . ♣

Nun wollen wir uns kurz mit einer weiteren Motivationsquelle für die Untersuchung von Billards befassen, und zwar mit der geometrischen Optik. Nach dem *Fermat'schen Prinzip* breitet sich Licht von einem Punkt A zu einem Punkt B auf dem Weg aus, für den es die kürzeste Zeit benötigt. In einem homogenen und isotropen Medium, d. h. in einer euklidischen Geometrie, „wählt“ das Licht also die Gerade AB .

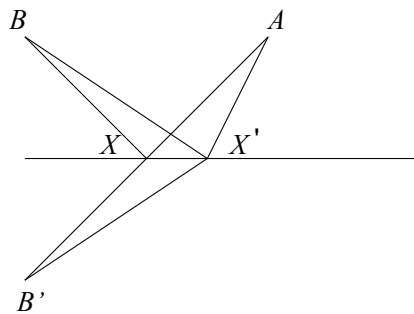


Abb. 1.8 Reflexion an einem flachen Spiegel

Wir betrachten jetzt eine einzelne Reflexion an einem Spiegel, den wir als Gerade l in der Ebene auffassen (vgl. Abb. 1.8). Nun suchen wir nach einer geknickten Linie AXB mit minimaler Länge und $X \in l$. Um die Lage des Punktes X zu bestimmen, spiegeln wir B an l und verbinden den Spiegelpunkt mit A . Offensichtlich ist für jede andere Lage des Punktes X die geknickte Linie $AX'B$ länger als AXB . Aus dieser Konstruktion ergibt sich, dass die Winkel zwischen dem einfallenden Strahl AX und l und dem ausgehenden Strahl XB und l gleich sind. Das Billardreflexionsgesetz ergibt sich also unmittelbar aus dem Fermat'schen Prinzip.

Übung 1.8 Seien A und B Punkte im Innern eines ebenen Keils. Konstruieren Sie einen Lichtstrahl von A nach B , der an jeder Seite des Keils reflektiert wird.

Der Spiegel sei nun eine beliebige glatte Kurve l (vgl. Abb. 1.9). Auch hier gilt das Variationsprinzip: Der Reflexionspunkt X minimiert die Länge der geknickten

Linie AXB . Wir wollen mithilfe der Analysis das Reflexionsgesetz herleiten. Sei dazu X ein Punkt in der Ebene. Wir definieren die Funktion $f(X) = |AX| + |BX|$. Der Gradient der Funktion $|AX|$ ist der Einheitsvektor in Richtung von A nach X , und mit $|BX|$ verhält es sich entsprechend. Wir interessieren uns für die kritischen Punkte von $f(X)$ unter der Bedingung $X \in l$. Nach dem Prinzip der Lagrange-Multiplikatoren ist X genau dann ein kritischer Punkt, wenn $\nabla f(X)$ orthogonal zu l ist. Die Summe der Einheitsvektoren von A nach X und von B nach X steht genau dann senkrecht auf l , wenn AX und BX gleiche Winkel mit l bilden. Wieder kommen wir auf das Billardreflexionsgesetz. Natürlich funktioniert dasselbe Argument, wenn der Spiegel eine glatte Hyperfläche in einem mehrdimensionalen Raum ist. Und es funktioniert auch in anderen Riemann'schen Geometrien, nicht nur in den euklidischen.

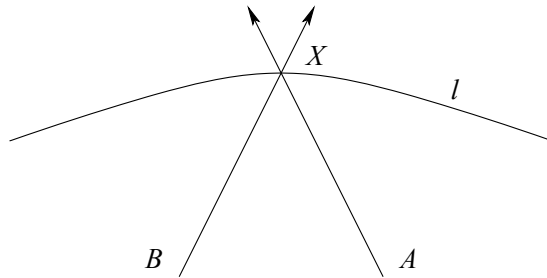


Abb. 1.9 Reflexion an einem gekrümmten Spiegel

Das obige Argument könnte man anhand eines anderen mechanischen Modells umformulieren. Dazu sei l ein Draht, X sei ein kleiner Ring, der ohne Reibung über den Draht rutschen kann, und AXB sei ein elastisches Band, das an A und B befestigt ist. Das elastische Band hat im Gleichgewichtszustand eine minimale Länge, und die Gleichgewichtsbedingung für den Ring X ist, dass die Summe der beiden gleichen Spannkraften entlang der Segmente XA und XB orthogonal zu l ist. Daraus ergibt sich wieder die Bedingung gleicher Winkel.

1.3 Exkurs: Huygens'sches Prinzip, Finsler-Metrik und Finsler-Billard. In einem nicht-homogenen anisotropen Medium hängt die Lichtgeschwindigkeit vom Ort und von der Richtung ab. Dann sind die Lichttrajektorien nicht zwangsläufig Geraden. Ein bekanntes Beispiel ist ein Lichtstrahl, der von Licht in Wasser übergeht (vgl. Abb. 1.10 auf der nächsten Seite). Seien c_1 und c_0 die Lichtgeschwindigkeiten in Wasser und in der Luft. Dann gilt $c_1 < c_0$, und die Lichttrajektorie ist eine geknickte Linie, die das *Snellius'sche Brechungsgesetz* erfüllt:

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{c_0}{c_1}.$$

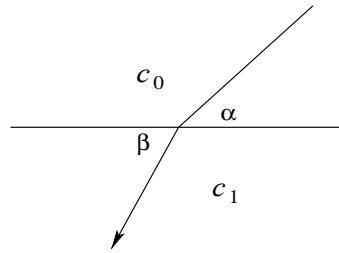


Abb. 1.10 Das Snellius'sche Brechungsgesetz

Übung 1.9 Leiten Sie das Snellius'sche Brechungsgesetz aus dem Fermat'schen Prinzip her.¹

Um die optischen Eigenschaften des Mediums zu beschreiben, definieren wir die „Einheitssphäre“ $S(X)$ in jedem Punkt X : Sie besteht aus den Einheitstangententialvektoren im Punkt X . Die Hyperfläche S heißt *Indikatrix*. Wir nehmen an, dass sie glatt, zentralsymmetrisch und streng konvex ist. Für den euklidischen Raum sind die Indikatrizien beispielsweise an allen Punkten identische Einheitssphären. Ein Feld von Indikatrizien bestimmt die sogenannte *Finsler-Metrik*: Der Abstand zwischen A und B ist die geringste Zeit, die Licht für den Weg von A nach B braucht. Ein Spezialfall der Finsler-Geometrie ist die Riemann'sche Geometrie. In letzterem Fall gibt es an jedem Punkt X eine (variable) euklidische Struktur im Tangentialraum, und die Indikatrix $S(X)$ ist die Einheitssphäre in dieser euklidischen Struktur.

Ein weiteres Beispiel ist die *Minkowski-Metrik*. Dies ist eine Finsler-Metrik in einem Vektorraum, deren Indikatrizien an verschiedenen Punkten durch Parallelverschiebungen auseinander hervorgehen. Die Lichtgeschwindigkeit hängt in einem Minkowski-Raum von der Richtung, nicht aber vom Ort ab; das entspricht einem homogenen, aber anisotropen Medium. Minkowskis Motivation, diese Geometrien zu untersuchen, ergab sich aus der Zahlentheorie.

Die Ausbreitung des Lichts folgt dem *Huygens'schen Prinzip*. Wir halten einen Punkt A fest und betrachten die Orte der Punkte F_t , die das Licht von dort aus in einer vorgegebenen Zeit erreichen kann. Die Hyperfläche F_t heißt *Wellenfront*, und sie besteht aus den Punkten mit dem Finsler-Abstand t von A . Nach dem Huygens'schen Prinzip lässt sich $F_{t+\varepsilon}$ folgendermaßen konstruieren: Wir betrachten jeden Punkt von F_t als Lichtquelle, und $F_{t+\varepsilon}$ ist die Einhüllende der ε -Fronten dieser Punkte. Sei $X \in F_t$, und sei u der Finsler-Einheitstangententialvektor an die Lichttrajektorie von A nach X . Nach einer infinitesimalen Version des Huygens'schen Prinzips ist der

¹ Es gab einen heißen Disput zwischen Fermat und Descartes darüber, ob die Lichtgeschwindigkeit mit der Dichte des Mediums zu- oder abnimmt. Descartes glaubte irrtümlich, dass sich Licht in Wasser schneller ausbreitet als in Luft.

Tangentialraum zur Front $T_X F_t$ parallel zum Tangentialraum zur Indikatrix $T_u S(X)$ im Punkt u (vgl. Abb. 1.11).

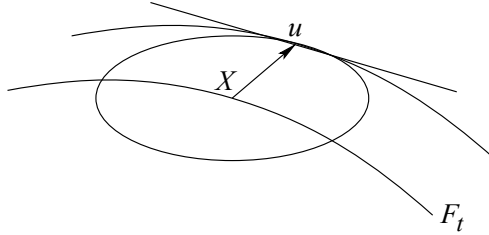


Abb. 1.11 Das Huygens'sche Prinzip

Wir sind nun in der Lage, das Billardreflexionsgesetz in der Finsler-Geometrie herzuleiten. Für den Moment wollen wir eine zweidimensionale Situation betrachten. Sei dazu l ein glatter gekrümmter Spiegel (oder der Rand eines Billardtisches), und AXB sei die Lichttrajektorie (die Lichtbahn) von A nach B . Wir üblich nehmen wir an, dass der Punkt X die Finsler-Länge der geknickten Linie AXB minimiert.

Satz 1.1 *Seien u und v Finsler-Einheitsvektoren, die tangential zu den einfallenden und ausgehenden Strahlen sind. Dann schneiden sich die Tangenten an die Indikatrix $S(X)$ in den Punkten u und v in einem Punkt der Tangente an l im Punkt X (vgl. Abb. 1.12 mit dem Tangentialraum im Punkt X).*

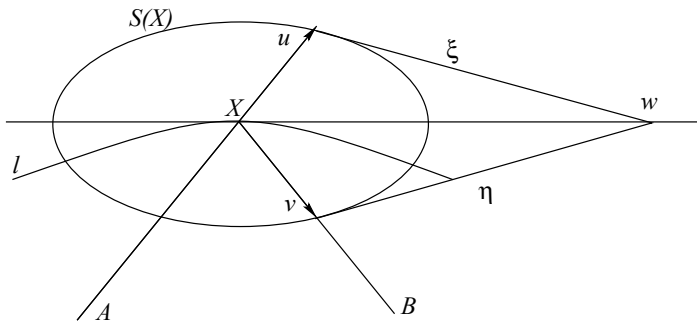


Abb. 1.12 Finsler-Billardreflexion

Beweis. Entsprechend modifiziert wenden wir wieder das Argument aus dem euklidischen Fall an. Wir betrachten die Funktionen $f(X) = |AX|$ und $g(X) = |BX|$ mit dem Abstand im Finsler-Bild. Seien ξ und η Tangentialvektoren an die Indikatrix $S(X)$ in den Punkten u und v . Für die Richtungsableitung gilt $D_u(f) = 1$, denn u ist tangential zur Lichttrajektorie von A nach X . Andererseits ist ξ nach dem Huygens'schen Prinzip tangential zur Front des Punktes A , die durch den Punkt X verläuft.

Diese Front ist eine Niveaulinie der Funktion f ; folglich ist $D_\xi(f) = 0$. Genauso ist $D_\eta(g) = 0$ und $D_v(g) = -1$.

Sei w der Schnittpunkt der Tangenten an $S(X)$ in den Punkten u und v . Dann gilt $w = u + a\xi = v + b\eta$ mit beliebigen reellen Zahlen a und b . Daraus folgt, dass $D_w(f) = 1$, $D_w(g) = -1$ und $D_w(f + g) = 0$ ist. Sei w eine Tangente an den Spiegel l . Dann ist X ein kritischer Punkt der Funktion $f + g$, also die Finsler-Länge der geknickten Linie AXB . Damit ist das Finsler-Reflexionsgesetz bewiesen. $\square$

Ist die Indikatrix ein Kreis, so erhalten wir natürlich das bekannte Gesetz der gleichen Winkel. Für weiterführende Informationen über die Ausbreitung des Lichts und die Finsler-Geometrie, insbesondere das Finsler-Billard, sei auf [2, 3, 8, 49] verwiesen. ♣

1.4 Exkurs: Brachistochrone. Eines der berühmtesten Probleme der Mathematik befasst sich mit der Bahn eines Massepunktes, der sich unter dem Einfluss der Schwerkraft in kürzester Zeit von einem Punkt zum anderen bewegt. Diese Bahnkurve heißt *Brachistochrone* (von griechisch „kürzeste Zeit“). Das Problem wurde von Johann Bernoulli am Ende des 17. Jahrhunderts aufgestellt und von ihm, seinem Bruder Jacob, Leibnitz, L'Hospital und Newton gelöst. In diesem Exkurs beschreiben wir die Lösung von Johann Bernoulli, der sich dem Problem vom geometrischen Standpunkt aus näherte (vgl. [44] für einen historischen Überblick).

Seien A und B die Start- und Endpunkte der gesuchten Kurve, und sei x die horizontale und y die vertikale Achse. Es ist sinnvoll, die y -Achse nach unten zu richten und anzunehmen, dass die y -Koordinate von A null ist. Dann reduziert sich die potentielle Energie des Massepunktes der Masse m nämlich auf mgy mit der Gravitationskonstante g . Sei $v(y)$ die Geschwindigkeit des Massepunktes. Seine kinetische Energie ist $mv(y)^2/2$. Aus der Energieerhaltung ergibt sich

$$v(y) = \sqrt{2gy}. \quad (1.9)$$

Die Geschwindigkeit des Massepunktes hängt also nur von seiner y -Koordinate ab.

Betrachten wir das durch Gleichung (1.9) beschriebene Medium. Nach dem Fermat'schen Prinzip ist die gesuchte Kurve die Lichttrajektorie von A nach B . Wir können das kontinuierliche Medium durch ein diskretes nähern, das aus dünnen horizontalen Streifen besteht, in denen die Lichtgeschwindigkeit konstant ist. Dabei sind $v_1, v_2, \dots$ die Lichtgeschwindigkeiten im ersten, zweiten, usw. Streifen. Die Winkel, die die Lichttrajektorie (ein Polygonzug) mit den horizontalen Rändern zwischen aufeinanderfolgenden Streifen bildet, seien $\alpha_1, \alpha_2, \dots$. Nach dem Snellius'schen Brechungsgesetz gilt $\cos \alpha_i = \cos \alpha_{i+1}$ (vgl. Abb. 1.10 auf Seite 13). Also gilt für alle i

$$\frac{\cos \alpha_i}{v_i} = \text{const.} \quad (1.10)$$

Nun kommen wir auf den kontinuierlichen Fall zurück. Unter Berücksichtigung von (1.9) ergibt sich aus (1.10) im kontinuierlichen Grenzfall:

$$\frac{\cos \alpha(y)}{\sqrt{y}} = \text{const.} \quad (1.11)$$

Berücksichtigen wir, dass $\tan \alpha = dy/dx$ ist, ergibt sich aus Gleichung (1.11) eine Differentialgleichung für die Brachistochrone $y' = \sqrt{(C-y)/y}$; diese Gleichung kann man lösen, und Johann Bernoulli kannte die Antwort: Die Lösung der Gleichung ist die Zykloide. Das ist die Trajektorie eines Punktes auf einem Kreis, der ohne zu gleiten entlang einer Horizontalen rollt (vgl. Abb. 1.13).²

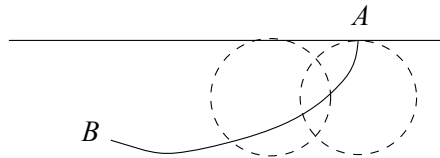


Abb. 1.13 Brachistochrone

Tatsächlich liefert das Argument zum Beweis von Gleichung (1.11) wesentlich mehr. Wir brauchen nicht anzunehmen, dass die Lichtgeschwindigkeit nur von y abhängt. Wir können allgemeiner annehmen, dass die Lichtgeschwindigkeit im Punkt (x, y) durch eine Funktion $v(x, y)$ gegeben ist (also hängt sie nicht von der Richtung ab, und das Medium ist anisotrop). Betrachten wir nun die Niveaulinien der Funktion v , und sei γ eine Lichttrajektorie in diesem Medium. Außerdem sei t die Lichtgeschwindigkeit entlang γ , betrachtet als eine Funktion auf dieser Kurve. Den Winkel zwischen γ und der entsprechenden Niveaulinie $v(x, y) = t$ bezeichnen wir mit $\alpha(t)$. Dann lautet eine Verallgemeinerung von Gleichung (1.11) folgendermaßen.

Satz 1.2 Entlang einer Trajektorie γ gilt:

$$\frac{\cos \alpha(t)}{t} = \text{const.}$$

- Übung 1.10** a) Die Lichtgeschwindigkeit sei durch die Funktion $v(x, y) = y$ gegeben. Beweisen Sie, dass die Lichttrajektorien Kreisbögen sind, deren Mittelpunkte auf der Geraden $y = 0$ liegen.
- b) Die Lichtgeschwindigkeit in einem Medium sei durch die Funktion $v(x, y) = 1/\sqrt{c-y}$ gegeben. Beweisen Sie, dass die Lichttrajektorien Parabelbögen sind.

² Zufällig löst die Zykloide auch ein anderes Problem, nämlich das Problem, eine Kurve AB zu bestimmen, sodass ein Massepunkt, der entlang der Kurve gleitet, am Endpunkt B zu derselben Zeit ankommt, unabhängig davon, an welcher Stelle der Kurve er gestartet ist.

c) Die Lichtgeschwindigkeit in einem Medium sei $v(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Beweisen Sie, dass die Lichttrajektorien Kreisbögen sind, die senkrecht auf dem Einheitskreis um den Ursprung stehen. ♣

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir etliche Variationen von Billardanordnungen erwähnen. Man kann beispielsweise Billard in Potentialfeldern betrachten. Besonders in der physikalischen Literatur populär ist eine weitere Modifikation, nämlich das Billard in einem Magnetfeld (vgl. [16, 114]). Die Stärke des Magnetfeldes, das senkrecht auf der Ebene steht, ist dort durch eine Funktion B über der Ebene gegeben. Auf eine Ladung im Punkt x wirkt die *Lorentz-Kraft*, die proportional zum Magnetfeld $B(x)$ und zur Geschwindigkeit $v(x)$ des Punktes ist; die Lorentz-Kraft wirkt in eine Richtung, die senkrecht auf der Bewegungsrichtung steht. Die freie Bahn einer solchen Punktladung ist eine Kurve, deren Krümmung in jedem Punkt durch die Funktion B bestimmt ist. Für ein konstantes Magnetfeld sind die Trajektorien Kreise mit dem *Larmor-Radius* v/B .³ Trifft die Punktladung auf den Rand des Billardtisches, so wird sie elastisch reflektiert. Das Magnetfeld berührt also das Reflexionsgesetz nicht. Ein besonderes Merkmal magnetischer Billards ist ihre Irreversibilität unter Zeitumkehr: Kehrt man die Richtung der Geschwindigkeit um, durchläuft die Punktladung ihre bisherige Trajektorie nicht in umgekehrter Richtung (es sei denn, das Magnetfeld ist null).

Anmerkung 2 Die beiden Themen, mit denen wir uns in diesem Kapitel befasst haben, nämlich klassische Mechanik und geometrische Optik, sind eng miteinander verknüpft. Bei mechanischen Systemen sind die Trajektorien im Konfigurationsraum Extrema aus einem Variationsprinzip, ähnlich wie bei den Trajektorien des Lichts. Tatsächlich lässt sich die Mechanik als eine Art geometrische Optik beschreiben; genau das war Hamiltons Herangehensweise an die Mechanik (vgl. V. Arnold [3] für Details). Ein wirklich gutes Beispiel für die Analogie zwischen geometrischer Optik und klassischer Mechanik ist die Brachistochrone.

³ Genauso kann man Billard unter der Einwirkung der Corioliskraft betrachten, die mit der Erdrotation zusammenhängt.

Geometrie und Billard

Tabachnikov, S.

2013, XI, 165 S. 99 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-642-31924-2