

# Normalkontaktprobleme mit rotationssymmetrischen Körpern ohne Adhäsion

## 3

Valentin L. Popov und Markus Heß

### 3.1 Abbildung von dreidimensionalen Kontaktproblemen in eine Dimension: Die Grundidee

Die *Methode der Dimensionsreduktion* basiert auf der Beobachtung, dass bestimmte Klassen von dreidimensionalen Kontakten *exakt* auf Kontakte mit einer eindimensionalen Winklerschen Bettung abgebildet werden können. Einen Vorgeschmack auf die Methode bietet uns bereits eines der einfachsten Kontaktprobleme: Wird ein flacher, zylindrischer Stempel auf die Oberfläche eines elastischen Halbraums gedrückt (Abb. 3.1a), so ist die Normalsteifigkeit des Kontaktes *proportional zu seinem Durchmesser D*:

$$k_z = DE^*, \quad (3.1)$$

wobei  $E^*$  der effektive Elastizitätsmodul ist und gemäß

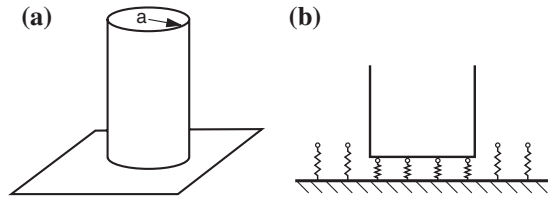
$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \quad (3.2)$$

aus den Elastizitätsmoduln der kontaktierenden Körper  $E_1$  und  $E_2$  sowie ihren Querkontraktionszahlen  $\nu_1$  und  $\nu_2$  hervorgeht.<sup>1</sup> Die Proportionalität der Steifigkeit zum Durchmesser kann auf triviale Weise aber auch durch eine *eindimensionale* Winklersche Bettung wiedergegeben werden.

Die Winklersche Bettung (Abb. 3.1b) ist eine Reihe von gleichartigen, voneinander unabhängigen Federn, die im gleichen Abstand  $\Delta x$  an einer starren Unterlage angebracht sind. Zur Abbildung von Kontinua muss der „Diskretisierungsschritt“  $\Delta x$  natürlich ausreichend klein gewählt werden, was wir immer stillschweigend voraussetzen. Die Zahl der Federn, die mit dem Stempel im Kontakt sind, ist gleich  $D/\Delta x$ . Bezeichnen wir die

<sup>1</sup> Dieses Ergebnis kann in jedem Buch zur Kontaktmechanik gefunden werden, siehe z. B. [1].

**Abb. 3.1** **a** Kontakt eines flachen, zylindrischen Indenters mit einem elastischen Halbraum und **b** das eindimensionale Ersatzmodell



Steifigkeit einer einzelnen Feder durch  $\Delta k_z$ , dann ergibt sich für die Gesamtsteifigkeit des Kontaktes

$$k_z = \Delta k_z \frac{D}{\Delta x}. \quad (3.3)$$

Damit die Gl. (3.1) auch für den Eindruck in die Winklersche Bettung gilt, muss die Steifigkeit pro Längeneinheit gleich dem effektiven Elastizitätsmodul  $E^*$  gewählt werden:

$$\frac{\Delta k_z}{\Delta x} = E^*. \quad (3.4)$$

Die Steifigkeit jeder einzelnen Feder ist demnach

$$\Delta k_z = E^* \Delta x. \quad (3.5)$$

Die Proportionalität der Steifigkeit zum Durchmesser des Stempels ist im Fall der elastischen Bettung auf triviale Weise erfüllt. Im Weiteren wird gezeigt, dass sich die so definierte elastische Bettung auch zur Abbildung einer großen Anzahl von anderen Kontaktaufgaben eignet.

### 3.2 Regeln von Geike & Popov und Regeln von Heß für Normalkontaktprobleme

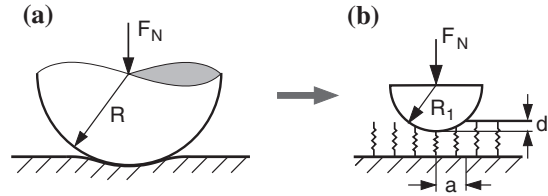
Die Beziehungen zwischen der Normalkraft, der Indentierungstiefe und dem Kontaktradius lassen sich für eine breite Klasse von Profilen exakt über das reduzierte Kontaktproblem mit einer eindimensionalen Winklerschen Bettung reproduzieren. Dabei muss das Oberflächenprofil lediglich nach einfachen Regeln modifiziert werden.

Betrachten wir als erstes den Kontakt zwischen einer elastischen Kugel mit dem Radius  $R$  und einem elastischen Halbraum (das Hertzsche Kontaktproblem, Abb. 3.2a).<sup>2</sup> Bereits 2005 hat Popov in einem Vortrag<sup>3</sup> darauf hingewiesen, dass auch bei einer Kugel (bzw. einem

<sup>2</sup> Streng genommen wird ein parabolisches Profil mit dem Krümmungsradius  $R$  betrachtet.

<sup>3</sup> Deutsch-Russischer Workshop „Numerical simulation methods in tribology: possibilities and limitations“, Technische Universität Berlin, 14.–17. März, 2005. Veröffentlicht in [2].

**Abb. 3.2** **a** Kontakt zwischen einer Kugel und einem elastischen Halbraum und **b** das eindimensionale Ersatzmodell



parabolischen Indenter) die Beziehungen zwischen der Normalkraft, der Indentierungstiefe und dem Kontaktradius durch das eindimensionale Ersatzmodell (Abb. 3.2b) exakt wiedergegeben werden, vorausgesetzt, dass der Radius mit dem Faktor „1/2“ skaliert wird. Für die Kugel werden wir an dieser Stelle die Lösung ausführlich beschreiben, in den nachfolgenden Kapiteln aber meistens auf die Durchführung der Rechnung aufgrund ihrer Einfachheit verzichten und nur die Ergebnisse angeben.

Das eindimensionale Ersatzprofil soll den Krümmungsradius  $R_1$  haben und wird durch die Gleichung

$$\tilde{z} = g(x) = \frac{x^2}{2R_1} \quad (3.6)$$

gegeben. Wird dieses Profil in die Winklersche Bettung um die Tiefe  $d$  eingedrückt, so erhalten wir für die vertikale Verschiebung der Bettung an der Stelle  $x$

$$u_z(x) = d - g(x) = d - \frac{x^2}{2R_1}. \quad (3.7)$$

Die Halbbreite des Kontaktgebietes (der „Kontaktradius“)  $a$  ergibt sich aus der Forderung  $u_z(a) = 0$  und ist

$$a = \sqrt{2R_1 d}. \quad (3.8)$$

Der Beitrag zur Normalkraft einer Feder mit der Koordinate  $x$  ist

$$f_N = \Delta k_z \cdot u_z(x) = E^* \left( d - \frac{x^2}{2R_1} \right) \Delta x. \quad (3.9)$$

Integration über das Kontaktgebiet ergibt die gesamte Normalkraft

$$F_N = \int_{-a}^a E^* \left( d - \frac{x^2}{2R_1} \right) dx = \int_{-\sqrt{2R_1 d}}^{\sqrt{2R_1 d}} E^* \left( d - \frac{x^2}{2R_1} \right) dx = \frac{4\sqrt{2}E^*}{3} \sqrt{R_1 d^3}. \quad (3.10)$$

Wählen wir nun den Radius der „zweidimensionalen Kugel“ gemäß

$$R_1 = R/2, \quad (3.11)$$

(„Regel von Popov“), so erhalten wir für den Kontaktradius und die Normalkraft *exakt* die Hertzschen Relationen:

$$a = \sqrt{Rd}, \quad (3.12)$$

$$F_N(d) = \frac{4}{3} E^* \sqrt{Rd^3}. \quad (3.13)$$

Die Regel (3.11) bedeutet mit anderen Worten, dass der Schnitt des ursprünglichen dreidimensionalen Profils (in unserem Fall der Kugel mit dem Radius  $R$ ) in der vertikalen Richtung um den Faktor „2“ gestreckt wird.

In seiner Dissertation aus dem Jahre 2011 [3] hat M. Heß gezeigt, dass eine ähnliche *exakte* Abbildung für ein *beliebiges* rotationssymmetrisches Profil möglich ist. In diesem Kapitel werden wir die von Heß gefundenen Abbildungsregeln ohne Beweis anwenden. Ein genauer Beweis dieses Satzes wird im [Kap. 17](#) gegeben.

Im Fokus der nachfolgenden Untersuchungen stehen Kontakte zwischen axial-symmetrischen Körpern und dem elastischen Halbraum. Die Symmetrieachse sei  $z$  und die Oberfläche des elastischen Halbraumes sei durch  $z = 0$  gegeben. Wir parametrisieren die Oberfläche des Halbraums durch die kartesischen Koordinaten  $x$  und  $y$ . Betrachten wir nun einen axial-symmetrischen Körper mit dem Profil

$$\tilde{z} = f_n(r) = c_n r^n, \quad (3.14)$$

wobei  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  ist und  $n$  eine beliebige positive (nicht notwendig ganze) Zahl darstellt. Definieren wir jetzt ein eindimensionales Profil entsprechend

$$\tilde{z} = g_n(x) = \tilde{c}_n |x|^n. \quad (3.15)$$

Wie im [Kap. 17](#) gezeigt wird, ist der Kontakt des dreidimensionalen Profils (3.14) mit dem elastischen Halbraum zum Kontakt des zweidimensionalen Profils (3.15) mit der Winklerschen Bettung (3.4) dann äquivalent, wenn die folgende *Regel von Heß* angewendet wird:

$$\tilde{c}_n = \kappa_n c_n, \quad \kappa_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{n \Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2} + \frac{1}{2})}, \quad (3.16)$$

wobei  $\Gamma(n)$  die Gamma-Funktion ist:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt. \quad (3.17)$$

Die *exakte* Äquivalenz zwischen dem drei- und dem eindimensionalen Problem gilt für die Beziehungen zwischen der Normalkraft, dem Kontaktradius und der Indentierungstiefe. An dieser Stelle sei vermerkt, dass wir wie in den Eingangsbeispielen eindimensionale Profile grundsätzlich mit  $g(x)$  bezeichnen, und dreidimensionale Profile mit  $f(r)$ . Beide werden

von der Indenterspitze aus nach oben positiv gezählt, was durch die zusätzlich eingeführte Koordinate  $\tilde{z}$  ausgedrückt wird (siehe z. B. Abb. 3.4). In Tab. 3.1 sind die Werte des Skalierungsfaktors  $\kappa_n$  für verschiedene  $n$  dargestellt und in Abb. 3.3 für  $0 < n \leq 5$  graphisch veranschaulicht.

Hervorgehoben sind die Werte für einen kegelförmigen und einen parabolischen Indenter. Hierfür gelten  $\kappa_1 = \frac{1}{2}\pi$  und  $\kappa_2 = 2$ . Letzterer stimmt selbstverständlich mit der *Regel von Popov* überein, die eine Halbierung des Krümmungsradius verlangt.

Von herausragender Bedeutung ist die Tatsache, dass eine exakte Abbildung eines dreidimensionalen Kontaktproblems auf die eindimensionale Winklersche Bettung nicht nur für einzelne Profile der Form (3.14), sondern auch für *beliebige Superpositionen* solcher Formen gilt. Betrachten wir dazu ein zusammengesetztes Profil gemäß

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(r) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n. \quad (3.18)$$

Die Regel von Heß wird in diesem Fall wie folgt angewendet: Aus dem Profil (3.18) wird ein eindimensionales Profil

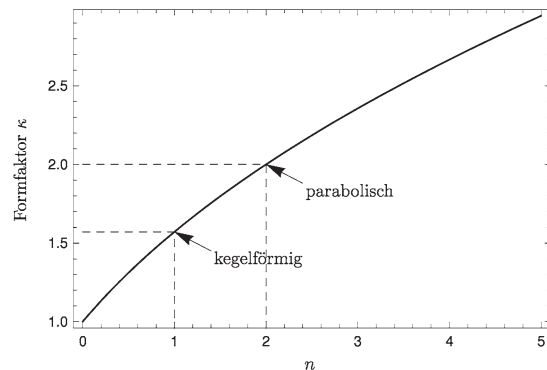
$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n \Rightarrow g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_n |x|^n \quad (3.19)$$

generiert. Im Kap. 17 wird gezeigt, dass beim Eindruck des Profils (3.19) in die Winklersche Bettung mit einer Steifigkeit entsprechend (3.4) die Beziehungen zwischen der Normalkraft, dem Kontaktradius und der Eindrücktiefe dieselben bleiben, wie im dreidimensionalen Fall.

**Tab. 3.1** Skalierungsfaktor  $\kappa_n$  für ausgewählte Exponenten der Formfunktion

n	0.5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\kappa_n$	1.311	1.571	2	2.356	2.667	2.945	3.2	3.436	3.657	3.866	4.063

**Abb. 3.3** Abhängigkeit des Skalierungsfaktors  $\kappa$  von der Potenz  $n$



Die Möglichkeit, Kontakte von dreidimensionalen, axial-symmetrischen Körpern der Form (3.14) auf eindimensionale Systeme abzubilden, folgt bereits aus allgemeinen Skalierungsgründen und es ist lehrreich, jene an dieser Stelle kurz zu diskutieren. Aus der Dimensionsanalyse und der Selbstaffinität<sup>4</sup> der Profile (3.14) geht hervor, dass der Kontaktradius und die Indentierungstiefe durch eine Beziehung mit der gleichen Potenz zusammenhängen, wie die Form des Profils selbst:

$$d = \kappa_n c_n a^n \quad (3.20)$$

wobei  $\kappa_n$  eine dimensionslose Konstante ist. Beim Eindruck des eindimensionalen Profils (3.15) in die Winklersche Bettung bestimmt sich die Eindrücktiefe trivialerweise nach

$$d = \tilde{c}_n a^n. \quad (3.21)$$

Durch die geeignete Wahl  $\tilde{c}_n = \kappa_n c_n$  kann man demnach immer garantieren, dass die Beziehungen Indentierungstiefe-Kontaktradius in beiden Fällen übereinstimmen.

Darüber hinaus ist die differentielle Kontaktsteifigkeit sowohl im eindimensionalen als auch im dreidimensionalen Fall gleichermaßen durch

$$\frac{\partial F_N}{\partial d} = 2aE^* \quad (3.22)$$

gegeben (Beweis siehe [4] oder [5]). Integration dieser Gleichung unter Berücksichtigung von (3.21) liefert sowohl für den ein- als auch für den dreidimensionalen Fall die Beziehung

$$F_N = \int dF_N = 2E^* \int a d(d) = 2E^* \int a \tilde{c}_n n a^{n-1} da = 2E^* \tilde{c}_n \frac{n}{n+1} a^{n+1}. \quad (3.23)$$

Zweifellos muss damit auch die Kraft als Funktion der Indentierungstiefe in beiden Fällen identisch sein:

$$F_N = \frac{2n}{n+1} E^* \tilde{c}_n^{-1/n} d^{\frac{n+1}{n}}. \quad (3.24)$$

Wenn wir uns nur auf die Kraft-Verschiebungs-Beziehung beschränken, so wird die Abbildbarkeit von drei- auf eindimensionale Systeme noch allgemeiner und ist für beliebige selbstaffine Oberflächen möglich, egal ob axial-symmetrisch oder nicht: Die Potenzabhängigkeit (3.24) ist allein durch die Selbstaffinität bedingt und gilt für beliebige Oberflächen mit gegebenem Hurst-Exponenten. Offensichtlich lässt sich der richtige Koeffizient immer durch das Strecken des Profils um einen passenden Faktor erreichen, wenn die Potenz in der Kraft-Verschiebungs-Beziehung stimmt. Wie wir im [Kap. 10](#) sehen

<sup>4</sup> Unter Selbstaffinität versteht man die folgende Eigenschaft: Wird das Profil (3.14) in der horizontalen Richtung um den Faktor  $C$  gestreckt und gleichzeitig in der vertikalen Richtung um den Faktor  $C^n$ , so erhält man das ursprüngliche Profil. Die Potenz  $n$  bezeichnet man als *Hurst-Exponent*.

werden, gilt das auch für selbstaffine fraktale raue Oberflächen. Dies eröffnet den Weg für die schnelle Berechnung von Kontakten mit rauen Oberflächen und ist daher von besonderem Interesse.

Auch die Superpositionsregel (3.19) hat eine einfache physikalische Bedeutung und hängt ausschließlich mit dem linearen Verhalten des Mediums zusammen. Stellen wir uns dazu vor, dass zwei Profile  $f_1(r)$  und  $f_2(r)$  vorliegen und dass für den Eindruck des ersten Profils *bis zum Erreichen des Kontaktradius  $a$*  die Kraft  $F_1(a)$  erforderlich ist. Für den Eindruck des zweiten Profils *bis zum gleichen Kontaktradius  $a$*  muss hingegen die Kraft  $F_2(a)$  aufgebracht werden. Die jeweils erreichten Eindrücktiefen bezeichnen wir mit  $d_1(a)$  und  $d_2(a)$ . Wenn wir nun zunächst den Eindruck  $f_1(r)$  vornehmen und dann *zusätzlich  $f_2(r)$  auf dem gleichen Gebiet* mit dem Radius  $a$ , so folgt unmittelbar aus der Linearität des Mediums, dass die dafür erforderliche Kraft

$$F_N(a) = F_1(a) + F_2(a) \quad (3.25)$$

ist. Die Eindrücktiefe ist dabei „per Konstruktion“

$$d(a) = d_1(a) + d_2(a). \quad (3.26)$$

Das sind genau die zwei Eigenschaften, die für die Abbildung von zusammengesetzten Profilen nach der Regel (3.19) notwendig sind. Um Missverständnisse zu vermeiden, möchten wir unterstreichen, dass das Superpositionsprinzip nicht (oder nicht exakt) gilt, wenn die Wirkungsgebiete beider Profile unterschiedlich sind.

### 3.3 Allgemeine Abbildung rotationssymmetrischer Profile

Den Mittelpunkt vorausgegangener Betrachtungen bildeten die äußerst einfachen Abbildungsregeln, die für Kontaktprofile in Form von Potenzfunktionen bestehen. Durch die Wahl eines beliebigen, positiv reellen Exponenten auf der einen Seite und durch das aus der Linearität resultierende Superpositionsprinzip auf der anderen Seite sind damit große Klassen axialsymmetrischer Kontakte exakt abbildbar. Die Äquivalenz von ein- und dreidimensionalen Systemen ist jedoch keineswegs auf solche Klassen beschränkt, sondern allgemeingültig für *alle* axialsymmetrischen Kontakte mit einfach zusammenhängender Kontaktfläche. Die Berechnung des Ersatzprofils aus der Profilfunktion des dreidimensionalen Kontaktes gehorcht dabei der Formel

$$g(x) = x \int_0^x \frac{f'(r)}{\sqrt{x^2 - r^2}} dr, \quad (3.27)$$

deren Allgemeingültigkeit in [Kap. 17](#) belegt wird. Dass diese Regel im Fall von Potenzfunktionen gemäß (3.14) auf die einfachen Streckbeziehungen (3.16) führt, kann dort ebenso nachvollzogen werden. Abgesehen von der expliziten Anwendung der Formel (3.27) ändert sich jedoch nichts in der Vorgehensweise der Reduktionsmethode

zur Bestimmung der Abhängigkeiten zwischen Kontaktradius, Eindrücktiefe und Normalkraft. Das möchten wir nachfolgend an einem Beispiel schrittweise erläutern und betrachten dazu den Eindruck des abschnittsweise definierten Profils

$$f(r) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq r < b \\ \frac{r^2 - b^2}{2R} & \text{für } b \leq r \leq a \end{cases} \quad (3.28)$$

in den elastischen Halbraum. Wie aus Abb. 3.4 hervorgeht, können wir das Profil als einen ursprünglich parabolischen Asperiten interpretieren, dessen Spitze mit der Zeit verschlissen wurde.

Die Anwendung von (3.27) verlangt die erste Ableitung des Originalprofils (3.28)

$$f'(r) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq r < b \\ \frac{r}{R} & \text{für } b \leq r \leq a \end{cases}, \quad (3.29)$$

die nach Einsetzen in (3.27) und anschließender Integration auf das Ersatzprofil<sup>5</sup>

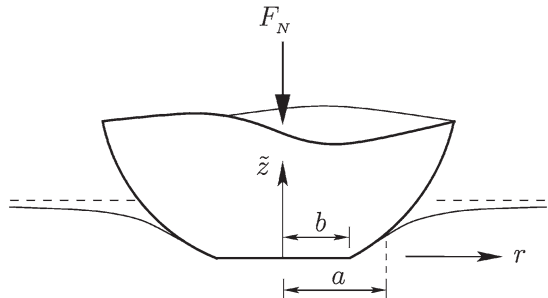
$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq |x| < b \\ \frac{|x|}{R} \sqrt{x^2 - b^2} & \text{für } b \leq |x| \leq a \end{cases} \quad (3.30)$$

führt. Darin haben wir die zunächst nur für  $x \geq 0$  definierte Funktion  $g$  achsensymmetrisch fortgesetzt, was durch einfaches Austauschen der Variable  $x$  durch ihren Betrag  $|x|$  geschieht und wir durchaus auch schon in der Definitionsgleichung (3.27) hätten berücksichtigen können (siehe Kap. 17). Dieses Profil ist dem Original in Abb. 3.5 gegenübergestellt.

Selbstverständlich fällt der Sonderfall  $b = 0$  mit der Abbildungsregel von Popov zusammen, wovon wir uns leicht überzeugen, wenn wir (3.28) und (3.30) unter dieser Vorgabe vergleichen.

Bei bekanntem Ersatzprofil können wir nun dem bereits vorgestellten Reduktionsverfahren zur Lösung des Kontaktproblems folgen. Dazu müssen wir lediglich das

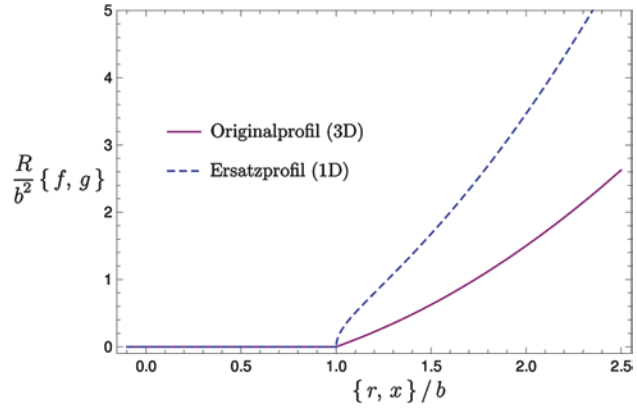
**Abb. 3.4** Qualitative Darstellung des Eindrucks eines an der Spitze abgeflachten, parabolischen Profils in den elastischen Halbraum



<sup>5</sup> Im Weiteren kann es vorkommen, dass wir von einem eindimensionalen Profil sprechen; gemeint ist selbstverständlich das Profil im eindimensionalen Modell.



**Abb. 3.5** Parabolischer Indenter mit „verschlossener“ Spitze: Original- und Ersatzprofil im Vergleich



starre Profil nach (3.30) in die eindimensionale Winklersche Bettung drücken, was die Oberflächenverschiebung

$$u_z(x) = d - g(x) = d - \frac{|x|}{R} \sqrt{x^2 - b^2} \quad (3.31)$$

hervorruft. Eindrücktiefe, Kontaktradius und Normalkraft müssen exakt die dreidimensionalen Abhängigkeiten aufzeigen. Die Eindrücktiefe als Funktion des Kontaktradius ergibt sich aus der Forderung, dass die Verschiebung am Kontaktrand verschwindet:

$$u_z(a) = 0 \Rightarrow d = g(a) = \frac{a}{R} \sqrt{a^2 - b^2}. \quad (3.32)$$

Die Normalkraft bilden wir aus der Summe aller Federkräfte

$$F_N = E^* \int_{-a}^a [d - g(x)] dx = 2E^* \int_0^a d dx - \frac{2E^*}{R} \int_b^a x \sqrt{x^2 - b^2} dx, \quad (3.33)$$

was nach Integration und geeigneten Umformungen mithilfe von (3.32)

$$F_N(a) = \frac{2E^*}{3R} (2a^2 + b^2) \cdot \sqrt{a^2 - b^2} \quad (3.34)$$

liefert. Die aus der Reduktionsmethode gewonnenen Resultate (3.32) und (3.34) sind exakt die von Ejike [6] erarbeiteten Lösungen des dreidimensionalen Kontaktproblems. Der Vollständigkeit halber sei hier noch die Beziehung zwischen Normalkraft und Eindrücktiefe angegeben, die nach Auflösung von (3.32) nach  $a$  und anschließendem Einsetzen in (3.34) wie folgt lautet:

$$F_N(d) = \frac{\sqrt{2}E^*b^3}{3R} \left( 2 + \sqrt{1 + \left( \frac{2R}{b^2} d \right)^2} \right) \cdot \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \left( \frac{2R}{b^2} d \right)^2}}. \quad (3.35)$$

Weitere Kontaktaufgaben, die zur Berechnung des Ersatzprofils die explizite Anwendung der Umrechnungsformel (3.27) verlangen, sind in den Aufgaben zu diesem und den beiden Folgekapiteln zu finden.

### 3.4 Abbildung von Spannungen

In dem eindimensionalen Kontaktproblem mit der Winklerschen Bettung lassen sich Spannungen nicht unmittelbar definieren. Auch wenn die Kraft-Verschiebung-Kontakttradius-Beziehungen richtig wiedergegeben werden, scheint der Teil der kontaktmechanischen Information, der mit den Spannungen zusammenhängt, verloren zu gehen. In Wirklichkeit ist das aber nicht der Fall. In der bereits erwähnten Dissertation von M. Heß [3] wurde gezeigt, dass sich die Druckverteilung für einen beliebigen dreidimensionalen Kontakt aus der Lösung des entsprechenden eindimensionalen Problems wiederherstellen lässt. Der zugehörige Beweis ist in Kap. 17 zu finden. Im vorliegenden Kapitel formulieren wir die Regel zur Berechnung der Druckverteilung ohne Beweis.

Bei der Winklerschen Bettung sind in jeder Kontaktkonfiguration die Federkräfte  $f_N(x)$  unmittelbar gegeben. Auch die Streckenlast  $q(x)$  (oder lineare Kraftdichte) lässt sich direkt definieren:

$$q(x) = \frac{f_N(x)}{\Delta x}. \quad (3.36)$$

Im Kap. 17 wird unter anderem gezeigt, dass sich die Normalspannung  $\sigma_{zz}(r)$  im Kontaktgebiet des dreidimensionalen Kontaktproblems aus obiger Streckenlast  $q(x)$  durch die folgende Integraltransformation (Abel-Transformation) ermitteln lässt:

$$\sigma_{zz}(r) = \frac{1}{\pi} \int_r^\infty \frac{q'(x)}{\sqrt{x^2 - r^2}} dx. \quad (3.37)$$

Als Beispiel für die Anwendung dieses Verfahrens betrachten wir wieder das Hertzsche Kontaktproblem. Für die Streckenlast ergibt sich aus (3.9)

$$\begin{aligned} q(x) &= E^* \left( d - \frac{x^2}{2R_1} \right), \quad \text{für } |x| < a = \sqrt{2R_1 d} \\ q(x) &= 0, \quad \text{für } |x| > a = \sqrt{2R_1 d} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Ihre Ableitung ist  $q'(x) = -E^*x/R_1$  innerhalb des Kontaktgebietes und Null außerhalb. Einsetzen in (3.37) liefert

$$\sigma_{zz}(r) = -\frac{E^*}{\pi R_1} \int_r^\infty \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - r^2}} = -\frac{E^*}{\pi R_1} \int_r^a \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - r^2}} = -\frac{2}{\pi} E^* \left( \frac{d}{R} \right)^{1/2} \sqrt{1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2}, \quad (3.39)$$

was mit dem bekannten Hertzschen Ergebnis genau übereinstimmt.

Weitere Beispiele zur Spannungsberechnung axial-symmetrischer Kontakte nach Gl. (3.37) werden in den Aufgaben zu diesem Kapitel behandelt.

### 3.5 Abbildung von nicht-rotationssymmetrischen Körpern

Geschrieben in der Form

$$k_z = 2E^* \beta \sqrt{\frac{A}{\pi}} \quad (3.40)$$

ist die Gleichung für die Kontaktsteifigkeit auch für nicht runde Querschnitte gültig ( $A$  ist hier die Kontaktfläche). Die Konstante  $\beta$  hat für “nicht zu komplizierte” Profile immer die Größenordnung 1 (siehe [7]):

Runder Querschnitt:	$\beta = 1,000$	
Dreieckiger Querschnitt:	$\beta = 1,034$	(3.41)
Quadratischer Querschnitt:	$\beta = 1,012$	

Die Gl. (3.40) kann in der Form (3.1) geschrieben werden, wenn wir den effektiven Durchmesser  $D$  wie folgt definieren:

$$D = 2\beta \sqrt{\frac{A}{\pi}}. \quad (3.42)$$

Diese Regel erlaubt die Abbildung nicht axial-symmetrischer Kontakte auf einen eindimensionalen Kontakt mit der Winklerschen Bettung.

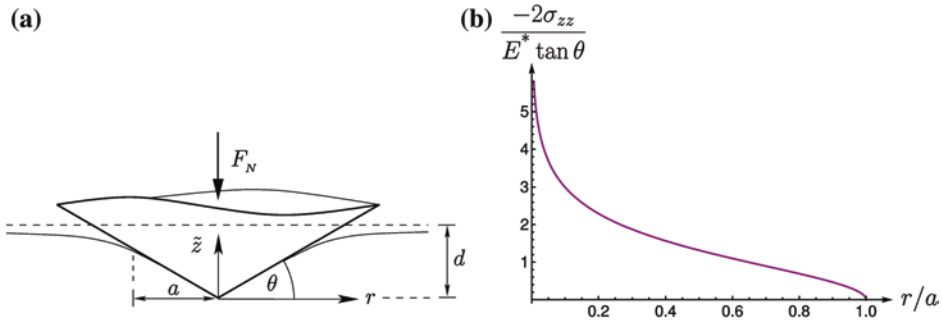
### Aufgaben

**Aufgabe 1:** Das Kontaktproblem zwischen einem Kegel und einem elastischen Halbraum (Abb. 3.6a) soll mittels der Reduktionsmethode gelöst werden. Berechnen Sie dazu den Kontaktradius und die Normalkraft als Funktionen der Eindringtiefe.

**Lösung:**

Die Form eines Kegels wird durch die Gleichung  $f(r) = \tan \theta \cdot r$  beschrieben. Der entsprechende Skalierungsfaktor beträgt  $\kappa_1 = \pi/2$ , so dass das äquivalente eindimensionale Profil durch  $g(x) = (\pi/2) \tan \theta \cdot |x|$  gegeben wird. Wird der Indenter um  $d$  eingedrückt, so ist die Vertikalverschiebung der Bettung im Punkt  $x$  durch  $u_z(x) = d - (\pi/2) \tan \theta \cdot |x|$  gegeben. Den Kontaktradius berechnen wir aus der Forderung  $u_z(a) = 0$  und erhalten so die gesuchte Abhängigkeit von der Eindringtiefe:

$$a = \frac{2}{\pi} \frac{d}{\tan \theta}. \quad (3.43)$$



**Abb. 3.6** **a** Kontakt zwischen einem starren kegelförmigen Indenter und dem elastischen Halbraum, **b** Druckverteilung im Normalkontakt zwischen einem starren kegelförmigen Indenter und dem elastischen Halbraum

Die Normalkraft ergibt sich aus der „Summation der Federkräfte“:

$$F_N = 2E^* \int_0^a u_z(x) dx = 2E^* \int_0^a (d - (\pi/2) \tan \theta \cdot x) dx = \frac{2}{\pi} E^* \frac{d^2}{\tan \theta}. \quad (3.44)$$

Beide Ergebnisse stimmen selbstverständlich *exakt* mit jenen des dreidimensionalen Kontaktproblems überein [8].

**Aufgabe 2:** Gegeben sei das Profil  $f(r) = C \cdot r^n$  eines starren, axialsymmetrischen Indenters, der in den elastischen Halbraum gedrückt wird. Ermitteln Sie den Kontaktradius und die Normalkraft in Abhängigkeit von der Indentierungstiefe mit Hilfe der Reduktionsmethode.

**Lösung:**

Das äquivalente eindimensionale Profil ist  $g(x) = C\kappa_n |x|^n$ . Der Kontaktradius berechnet sich aus der Bedingung  $g(a) = d$  zu

$$a = \left( \frac{d}{C\kappa_n} \right)^{1/n}. \quad (3.45)$$

Das Verschiebungsfeld ist durch  $u_z(x) = d - C\kappa_n |x|^n$  bestimmt und für die Normalkraft erhalten wir

$$F_N = 2E^* \int_0^a u_z(x) dx = 2E^* \int_0^a (d - C\kappa_n x^n) dx = \frac{2n}{n+1} \frac{E^* d^{\frac{n+1}{n}}}{(C\kappa_n)^{1/n}}. \quad (3.46)$$

Abermals geben die Resultate *exakt* die Abhängigkeiten der dreidimensionalen Problemstellung wieder (s. Kap. 17).

**Aufgabe 3:** Der Halbraumkontakt eines gemäß  $f(r) = \frac{r^2}{2R} + |r| \tan \theta$  zusammengesetzten Profils soll mit der Reduktionsmethode untersucht werden. Ermitteln Sie den Kontaktradius und die Normalkraft in Abhängigkeit von der Eindrücktiefe.

**Lösung:**

Das äquivalente eindimensionale Profil ist

$$g(x) = \kappa_2 \frac{x^2}{2R} + \kappa_1 |x| \tan \theta = \frac{x^2}{R} + \frac{\pi}{2} |x| \tan \theta. \quad (3.47)$$

Den Kontaktradius ermitteln wir aus der Bedingung

$$g(a) = \frac{a^2}{R} + \frac{\pi}{2} a \tan \theta = d, \quad (3.48)$$

so dass sich die folgende Kontaktradius-Verschiebungs-Relation ergibt:

$$a = \sqrt{\left(\frac{\pi}{4} R \tan \theta\right)^2 + Rd} - \frac{\pi}{4} R \tan \theta. \quad (3.49)$$

Das eindimensionale Verschiebungsfeld ist durch  $u_z(x) = d - \frac{x^2}{R} - \frac{\pi}{2} |x| \tan \theta$  gegeben, wodurch wir für die Normalkraft die Gleichung

$$F_N = 2E^* \int_0^a u_z(x) dx = 2E^* \int_0^a \left(d - \frac{x^2}{R} - \frac{\pi}{2} |x| \tan \theta\right) dx \quad (3.50)$$

erhalten, die nach Ausführung der Integration

$$F_N = 2E^* \left( da - \frac{a^3}{3R} - \frac{\pi}{4} a^2 \tan \theta \right) \quad (3.51)$$

ergibt und nach Einsetzen von (3.49) sowie einfachen Umformungen auf den gesuchten Zusammenhang zwischen Normalkraft und Eindrücktiefe führt:

$$F_N = \frac{\pi^3 R^2 (\tan \theta)^3 E^*}{96} \left( \sqrt{1 + \frac{16d}{\pi^2 R (\tan \theta)^2}} - 1 \right) \left( 1 + \frac{32d}{R \pi^2 (\tan \theta)^2} - \sqrt{1 + \frac{16d}{\pi^2 R (\tan \theta)^2}} \right). \quad (3.52)$$

**Aufgabe 4:** Mithilfe der Abel-Transformation ist die Spannungsverteilung im Kontakt zwischen einem flachen, zylindrischen Indenter und einem elastischen Halbraum zu berechnen.

**Lösung:**

Wir beginnen mit der Berechnung der Streckenlast im eindimensionalen Ersatzmodell. Bei einem flachen, zylindrischen Indenter ist die Streckenlast  $q(x)$  konstant und gleich

$$q(x) = \begin{cases} F_N/(2a), & \text{für } |x| < a \\ 0, & \text{für } |x| > a \end{cases} \quad (3.53)$$

Für die Ableitung erhalten wir

$$q'(x) = \frac{F_N}{2a} (\delta(x+a) - \delta(x-a)), \quad (3.54)$$

wobei  $\delta(x)$  die Diracsche  $\delta$ -Funktion bezeichnet. Das Integral (3.37) nimmt die Form

$$\sigma_{zz}(r) = \frac{1}{\pi} \int_r^\infty \frac{q'(x)}{\sqrt{x^2 - r^2}} dx = \frac{1}{\pi} \frac{F_N}{2a} \int_r^\infty \frac{(\delta(x+a) - \delta(x-a))}{\sqrt{x^2 - r^2}} dx \quad (3.55)$$

an. Die Diracsche Funktion hat die Eigenschaft  $\int f(x)\delta(x-a)dx = f(a)$ , wenn das Integrationsgebiet den Punkt  $x = a$  enthält und ist Null andernfalls. Somit ergibt die Integration in (3.55)

$$\sigma_{zz}(r) = \frac{1}{\pi} \frac{F_N}{2a} \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}}, & \text{für } r < a \\ 0, & \text{für } r > a \end{cases}. \quad (3.56)$$

Das ist die *exakte* Spannungsverteilung, welche sich im dreidimensionalen Kontakt zwischen einem starren, flachen, zylindrischen Stempel und dem elastischen Halbraum einstellt.

**Aufgabe 5:** Mithilfe der Abel-Transformation ist die Spannungsverteilung im Kontakt zwischen einem starren Kegel und einem elastischen Halbraum zu berechnen.

**Lösung:**

Wir betrachten das entsprechende eindimensionale Ersatzmodell aus Aufgabe 1. Die Vertikalverschiebung der Bettung an der Stelle  $x$  ist  $u_z(x) = d - (\pi/2) \tan \theta \cdot |x|$ , woraus wir für die Streckenlast  $q(x) = E^* \cdot u_z(x) = E^* (d - (\pi/2) \tan \theta \cdot |x|)$  erhalten. Zur Berechnung der Normalspannungen setzen wir ihre Ableitung  $q'(x) = -(\pi/2)E^* \tan \theta \cdot \text{sign}(x)$  in Gl. (3.37) ein

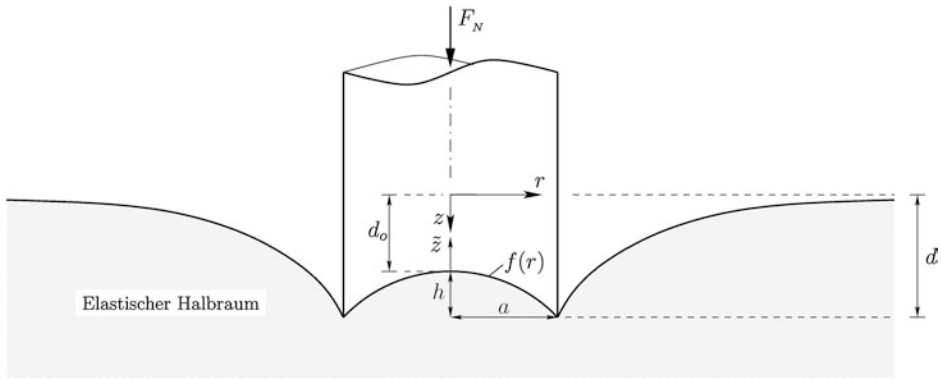
$$\sigma_{zz}(r) = \frac{1}{\pi} \int_r^\infty \frac{q'(x)}{\sqrt{x^2 - r^2}} dx = -\frac{1}{2} E^* \tan \theta \int_r^a \frac{dx}{\sqrt{x^2 - r^2}}. \quad (3.57)$$

Die Berechnung des Integrals ergibt

$$\sigma_{zz}(r) = \begin{cases} -\frac{1}{2} E^* \tan \theta \cdot \ln \left( \frac{a}{r} + \sqrt{\left(\frac{a}{r}\right)^2 - 1} \right), & \text{für } r < a \\ 0, & \text{für } r > a \end{cases}, \quad (3.58)$$

was natürlich auch in diesem Fall die *exakte* dreidimensionale Spannungsverteilung ist. Sie ist in Abb. 3.6b grafisch veranschaulicht.

**Aufgabe 6:** Für den Kontakt eines starren, zylindrischen Indenters mit einem parabolisch-konkaven Profil nach Abb. 3.7 sind die Normalkraft und die Normalspannungen



**Abb. 3.7** Qualitative Darstellung des (vollständigen) Eindrucks eines starren, zylindrischen Indenters mit einem parabolisch-konkaven Profil in den elastischen Halbraum

mithilfe der Reduktionsmethode zu bestimmen. Anstelle der Eindrücktiefe  $d$  soll die Verschiebung über die geometrischen Größen  $d_o$  und  $h$  formuliert werden. Ein vollständiger Kontakt sei vorausgesetzt.

#### Lösung:

Zunächst stellen wir die Oberflächenverschiebung innerhalb des Kontaktgebietes für den axialsymmetrischen Kontakt auf. Dabei nutzen wir anstelle der Eindrücktiefe  $d$  die mittige Verschiebung  $d_o$ , sodass wie bei konvexen Profilen auch für das konkave Profil  $f(0) = 0$  garantiert ist. Dann gilt:

$$u_z(r) = d_o - f(r) = d_o + \frac{h}{a^2} r^2. \quad (3.59)$$

Das Originalprofil enthält einen quadratischen Term, den wir lediglich mit dem entsprechenden Streckfaktor multiplizieren müssen, um zur Geometrie des Ersatzsystems zu gelangen:

$$g(x) = \kappa_2 f(|x|) = -2 \frac{h}{a^2} x^2. \quad (3.60)$$

Aus der zugehörigen Oberflächenverschiebung im eindimensionalen Modell ermitteln wir für die Normalkraft

$$F_N = 2E^* \int_0^a [d_o - g(x)] dx = 2E^* \int_0^a \left( d_o + 2 \frac{h}{a^2} x^2 \right) dx = 2E^* a \left( d_o + \frac{2}{3} h \right). \quad (3.61)$$

Zur Berechnung der Normalspannungen im Originalkontakt benötigen wir die Ableitung der Streckenlast  $q'(x)$  im dimensionsreduzierten Abbild sowie den Randwert  $q(a)$ :

$$q(x) = E^* \left( d_o + 2 \frac{h}{a^2} x^2 \right) \Rightarrow q'(x) = 4E^* \frac{h}{a^2} x \text{ und } q(a) = E^* (d_o + 2h). \quad (3.62)$$

Einsetzen von (3.62) in (3.37) führt nach Ausführung der Integration und elementaren Umformungen auf die gesuchten Normalspannungen

$$\sigma_{zz}(r) = -\frac{E^*}{\pi} \cdot \frac{d_o - 2h + 4h \left( \frac{r}{a} \right)^2}{\sqrt{a^2 - r^2}}. \quad (3.63)$$

Selbstverständlich stimmen die Ergebnisse (3.61) und (3.63) exakt mit jenen überein, die sich im dreidimensionalen, axialsymmetrischen Kontakt einstellen, was ein Vergleich mit der von Barber [9] gegebenen Lösung bestätigt, wenn man die Umrechnung  $d_o = d - h$  berücksichtigt. Es sei nochmal nachdrücklich darauf hingewiesen, dass ein vollständiger Kontakt vorausgesetzt wurde, welcher der Forderung  $\sigma_{zz}(0) \leq 0$  genügen muss. Aus Gleichung (3.63) folgt dann die Bedingung  $d_o \geq 2h$ . Da sich die Reduktionsmethode in der hier vorgestellten Form nur zur Abbildung von vollständigen Kontakten (und nicht ringförmigen Kontaktgebieten) eignet, geht die genannte Forderung nicht unmittelbar aus dem Ersatzmodell hervor. Außerdem ist die exakte Abbildung nur für  $F_N(d_o)$  und nicht für  $F_N(d)$  garantiert, weil die maximale Verschiebung (Eindrücktiefe) bei konkaven Profilen am Rand und nicht in der Mitte auftritt.

**Aufgabe 7:** Die Methode der Dimensionsreduktion ist für ein transversal-isotropes Medium zu formulieren.

**Lösung:**

Ein transversal-isotropes Medium ist ein Medium, welches in einer Ebene isotrop ist. Unter kristallinen Körpern gehören zu dieser Klasse alle Körper des hexagonalen Kristallsystems. Auch ein Faserverbund mit der Anordnung von Fasern parallel zu einer Richtung stellt ein transversal isotropes Medium dar. Ein lineares transversal isotropes Medium wird durch 5 elastische Moduln vollständig bestimmt. Wenn wir die Symmetrieachse des Mediums als „3“ bezeichnen, sind die Achsen „2“ und „3“ „äquivalent“ und können in der von diesen Achsen aufgespannten Ebene beliebig gewählt werden. Das Hookesche Gesetz sieht für dieses Medium wie folgt aus:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22} + C_{13}\varepsilon_{33} \\ \sigma_{22} &= C_{12}\varepsilon_{11} + C_{11}\varepsilon_{22} + C_{13}\varepsilon_{33} \\ \sigma_{33} &= C_{13}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + C_{33}\varepsilon_{33} \\ \sigma_{12} &= (C_{11} - C_{12})\varepsilon_{12} \\ \sigma_{23} &= 2C_{44}\varepsilon_{23} \\ \sigma_{31} &= 2C_{44}\varepsilon_{31}. \end{aligned} \quad (3.64)$$



Die Anwendbarkeit der Dimensionsreduktionsmethode beruht alleine auf der Tatsache, dass die differentielle Steifigkeit eines Mediums ausschließlich durch die Form des aktuellen Kontaktgebietes bestimmt wird. Bei rotationssymmetrischen Profilen wird sie durch die Steifigkeit eines Kontaktes zwischen einem starren, flachen zylindrischen Indenter und dem entsprechenden elastischen Halbraum gegeben. Die Regel für die Anwendung der Dimensionsreduktionsmethode auf ein beliebiges linear elastisches Medium ist daher die folgende: Man bestimme zunächst die Steifigkeit  $k_z$  des Kontaktes mit einem flachen, zylindrischen Stempel mit dem Durchmesser  $D$  und wähle dann als äquivalentes eindimensionales System eine Winklersche Bettung mit einer Steifigkeit pro Längeneinheit gleich  $k_z/D$ . Diese Methode kann auf ein beliebiges Medium angewendet werden, für welches die Lösung des Kontaktproblems mit einem starren, flachen zylindrischen Stempel vorhanden ist.

Die Lösung für die Steifigkeit eines Kontaktes zwischen einem flachen, zylindrischen Indenter und einem transversal-isotropen Medium (mit der Symmetrieachse parallel zum Normalenvektor) können wir unmittelbar der Arbeit von H.Y. Yu [10] entnehmen. Sie ist durch die Gl. (3.1) gegeben mit

$$E^* = \frac{2(\bar{C}_{13}^2 - C_{13}^2)}{\bar{C}_{13}(\nu_1 + \nu_2)}, \quad (3.65)$$

wobei die folgenden Bezeichnungen eingeführt wurden

$$\nu_1 = \left[ \frac{(\bar{C}_{13} - C_{13})(2\bar{C}_{13} - I_0)}{4C_{33}C_{44}} \right]^{1/2} + \left[ \frac{(\bar{C}_{13} + C_{13})I_0}{4C_{33}C_{44}} \right]^{1/2} \quad (3.66)$$

$$\nu_2 = \left[ \frac{(\bar{C}_{13} - C_{13})(2\bar{C}_{13} - I_0)}{4C_{33}C_{44}} \right]^{1/2} - \left[ \frac{(\bar{C}_{13} + C_{13})I_0}{4C_{33}C_{44}} \right]^{1/2} \quad (3.67)$$

$$\bar{C}_{13} = (C_{11}C_{33})^{1/2} \quad (3.68)$$

$$I_0 = \bar{C}_{13} - C_{13} - 2C_{44}. \quad (3.69)$$

Einsetzen von (3.66–3.69) in (3.65) ergibt

$$E^* = \frac{2\sqrt{C_{44}}(C_{11}C_{33} - C_{13}^2)}{\sqrt{C_{11}}\sqrt{(\sqrt{C_{11}C_{33}} - C_{13})(C_{13} + 2C_{44} + \sqrt{C_{11}C_{33}})}}. \quad (3.70)$$

**Aufgabe 8:** Für den Normalkontakt zwischen einer Kugel vom Radius  $R$  und dem linear elastischen Halbraum sind die Eindrücktiefe und die Normalkraft als Funktion des Kontaktradius mithilfe der Reduktionsmethode zu entwickeln. Entgegen der parabolischen Näherung von Hertz soll dabei die exakte Kugelform Berücksichtigung finden und zur Berechnung des Ersatzprofils von der allgemeinen Umrechnungsformel (3.27) Gebrauch gemacht werden.

**Lösung:**

Das exakte Profil einer Kugel vom Radius  $R$  wird über die Funktion

$$f(r) = R - \sqrt{R^2 - r^2} \quad (3.71)$$

beschrieben. Die erste Ableitung von (3.71) lautet

$$f'(r) = \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}}. \quad (3.72)$$

Einsetzen von (3.72) in die allgemeine Formel (3.27) führt auf die Gleichung

$$g(x) = x \int_0^x \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2} \cdot \sqrt{x^2 - r^2}} dr = -x \int_{z(0)}^0 \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}}, \quad (3.73)$$

deren elementares Integral auf der rechten Seite aus der Substitution  $z(r) = \frac{\sqrt{x^2 - r^2}}{\sqrt{R^2 - x^2}}$  hervorgeht und letztendlich das Ersatzprofil

$$g(x) = x \cdot \operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right) = \frac{1}{2}x \ln\left(\frac{R+x}{R-x}\right) \quad (3.74)$$

ergibt. Die beiden „äquivalenten“ Profile im Vergleich, ergänzt durch deren parabolischen

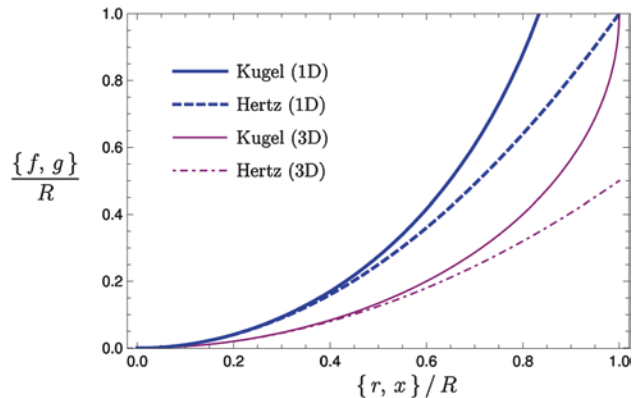
Näherungen, zeigt Abb. 3.8. Die gestrichelten Kurven bestätigen die Regel von Popov.

Mit (3.74) ist zugleich die Oberflächenverschiebung der Winklerschen Bettung gefunden, die am Kontaktrand verschwinden muss und derart die Eindrücktiefe bestimmt

$$u_z(a) = 0 \Rightarrow d = g(a) = \frac{1}{2}a \ln\left(\frac{R+a}{R-a}\right). \quad (3.75)$$

Die der Oberflächenverschiebung proportionalen Federkräfte müssen in der Summe der Normalkraft das Gleichgewicht halten

**Abb. 3.8** Exakte Kugelform und parabolische Näherung (Hertz) einschließlich eindimensionaler Äquivalente



$$F_N = E^* \int_{-a}^a [d - g(x)] dx = 2E^* da - E^* \int_0^a x \ln \left( \frac{R+x}{R-x} \right) dx. \quad (3.76)$$

Eine geeignete partielle Integration liefert zunächst

$$F_N = 2E^* a \left[ d - \frac{R}{2} + \frac{R^2 - a^2}{4a} \ln \left( \frac{R+a}{R-a} \right) \right] \quad (3.77)$$

und nach Einsetzen von (3.75) schließlich die Kontaktkraft als Funktion des Kontaktradius

$$F_N(a) = E^* \frac{R^2 + a^2}{2} \ln \left( \frac{R+a}{R-a} \right) - E^* Ra. \quad (3.78)$$

Die Eindrücktiefe nach (3.75) und die Normalkraft nach (3.78) stimmen mit den auf Segedin [11] zurückgehenden und über Areafunktionen ausgedrückten Lösungen des dreidimensionalen Kontaktes exakt überein. Zum Schluss sei bemerkt, dass wir das hier vorliegende Kugelprofil genauso gut in eine Reihe hätten entwickeln können. Nach Multiplikation der einzelnen Glieder mit den entsprechenden Skalierungsfaktoren gemäß der Regel von Heß ergäbe sich das Ersatzprofil (3.74) in Form einer Potenzreihe. Immer dann, wenn für das Integral in der allgemeinen Umrechnungsformel (3.27) keine geschlossene Lösung existiert, sind wir sogar auf den letztgenannten Weg angewiesen.

---

## Literatur

1. Johnson, K.L.: Contact Mechanics, 6. Nachdruck der 1. Aufl. s.l. Cambridge University Press (2001)
2. Popov, V.L., Psakhie, S.G.: Numerical simulation methods in tribology. Tribol. Int. **40**(6), 916–923 (2007)
3. Heß, M.: Über die exakte Abbildung ausgewählter dreidimensionaler Kontakte auf Systeme mit niedrigerer räumlicher Dimension. Cuvillier, Berlin (2011)
4. Pharr, G.M., Oliver, W.C., Brotzen, F.R.: On the generality of the relationship among contact stiffness, contact area, and elastic modulus during indentation. J. Mater. Res. **7**(3), 613–617 (1992)
5. Popov, V.L.: Kontaktmechanik und Reibung, Von der Nanotribologie bis zur Erdbebendynamik, 2. überarbeitete Aufl., S. 73–74. Springer, Berlin (2010)
6. Eijike, U.B.C.O.: The stress on an elastic half-space due to sectionally smooth-ended punch. J. Elast. **11**(4), 395–402 (1981)
7. King, R.B.: Elastic analysis of some punch problems for a layered medium. Int. J. Solids Struct. **23**(12), 1657–1664 (1987)
8. Love, A.E.H.: Boussinesq's problem for a rigid cone. Q. J. Math. **10**, 161–175 (1939)
9. Barber, J.R.: Indentation of the semi-infinite elastic solid by a concave rigid punch. J. Elast. **6**(2), 149–159 (1976)
10. Yu, H.Y.: A concise treatment of indentation problems in transversely isotropic half-spaces. Int. J. Solids Struct. **38**(10), 2213–2232 (2001)
11. Segedin, C.M.: The relation between load and penetration for a spherical punch. Mathematika **4**, 156–161 (1957)

Methode der Dimensionsreduktion in Kontaktmechanik  
und Reibung

Eine Berechnungsmethode im Mikro- und Makrobereich

Popov, V.L.; Heß, M.

2013, XV, 267 S. 108 Abb., 10 Abb. in Farbe., Hardcover

ISBN: 978-3-642-32672-1