1 Vom Abstand zur Topologie

Übersicht

Ausgangspunkt dieses Kapitels ist das Konzept der Abstandsmessung, das wir durch den Begriff der Metrik formalisieren. Damit lassen sich Eigenschaften von Punkten und Funktionen beschreiben, die Konzepte wie „in der Nähe von" und „Abwesenheit von Sprüngen" präzisieren. Die einschlägigen mathematischen Begriffe sind Grenzwert, Umgebung und Stetigkeit. Die Frage nach der Existenz von Grenzwerten führt auf zwei Zusatzbedingungen, die man an Mengen mit einer Metrik stellen kann, Kompaktheit und Vollständigkeit. Beide Bedingungen garantieren die Existenz von gewissen Grenzwerten. In Abschnitt 1.4 erheben wir einige grundlegende Eigenschaften der Menge aller Umgebungen zu einer Definition und gelangen so zum Begriff des topologischen Raums. Jede Menge mit einer Metrik trägt die Struktur eines topologischen Raums, das heißt, jeder Satz über topologische Räume ist auch ein Satz über metrische Räume. Es gibt aber auch viele topologische Räume, die nicht durch eine Metrik gegeben sind. Außerdem hängen viele Eigenschaften metrischer Räume nicht von der Wahl der Metrik ab, sondern nur von der zugrunde liegenden Topologie. Die zentralen Begriffe Grenzwert, Stetigkeit und Kompaktheit lassen sich zum Beispiel rein topologisch formulieren. Die topologische Charakterisierung der Kompaktheit ist das abschließende Thema des Kapitels.

J. Hilgert, *Lesebuch Mathematik für das erste Studienjahr*,
DOI 10.1007/978-3-642-34755-9_1, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2013

1.1 Metrische Räume

Man stelle sich zwei Punkte in einer Ebene vor. Was ist der Abstand der beiden Punkte? Die übliche Methode, den Abstand zu definieren, ist, eine gerade Strecke zwischen die beiden Punkte zu legen und dann die Länge dieser Strecke zu messen. In der realen Welt würde man das nicht tun, wenn auf dieser geraden Verbindung ein unüberwindliches Hindernis läge. Dann würde man eventuell von der „Luftlinienentfernung“ sprechen und als wirkliche Entfernung die Länge der kürzesten Straßenverbindung in Kilometern angeben. Bei großen Distanzen in den USA ist es eher üblich anzugeben, wie viele Stunden Autofahrt benötigt werden, um vom Ort x zum Ort y zu gelangen. Diese Angabe würde sich ändern, wenn eine Dauerbaustelle eingerichtet oder eine Brücke auf dem Weg weggeschwemmt würde und man einen Umweg nehmen müsste.

Schon diese simplen Beispiele zeigen, dass sehr unterschiedliche Methoden, Abstände zu beschreiben, denkbar sind. Es stellt sich die Frage, ob solche unterschiedlichen Methoden Gemeinsamkeiten haben, die man präzise beschreiben kann. Wenn man sich darauf festlegt, den Abstand zwischen zwei Punkten einer Menge durch Zahlen beschreiben zu wollen, dann sind die folgenden Eigenschaften sinnvolle Punkte auf einer Liste von Anforderungen an einen Abstand, der diesen Namen verdient:

(i) Abstände sind positiv oder 0.
(ii) Der Abstand zwischen zwei Punkten ist genau dann 0, wenn die beiden Punkte gleich sind.
(iii) Umwege verlängern den Abstand: Die Summe der Abstände zwischen x und y und zwischen y und z ist mindestens so groß wie der Abstand zwischen x und z.

Mathematisch lassen sich die aufgeführten Eigenschaften von Abständen wie folgt formulieren: Sei M eine Menge und $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ eine Funktion (das d steht hier für „Distanz“). Dann soll gelten

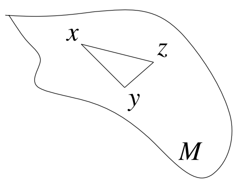
(i) $d(x,y) \in \mathbb{R}_{\geq 0} := \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\}$.
(ii) $d(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$.
(iii) $\forall x,y,z \in M : \quad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

In den oben angedeuteten Beispielen ist es naheliegend anzunehmen, dass der Abstand *symmetrisch* ist, das heißt $d(x,y) = d(y,x)$ für alle $x, y \in M$. Stellt man sich den einen Punkt jedoch auf einem Berggipfel vor und den anderen im Tal, so ist diese Annahme keineswegs naheliegend, sofern man den Abstand in benötigter Zeit misst. Wenn man diese Eigenschaft also trotzdem fordert, so schließt man willkürlich realistische Szenarien aus der Modellbildung aus. Dafür kann man unterschiedliche gute Gründe haben. Zum Beispiel kann es sein, dass alle Situationen, die man beschreiben möchte, diese Bedingung erfüllen. Manchmal ist man aber auch einfach bereit, die Verkleinerung der Klasse von behandelbaren Beispielen in Kauf zu nehmen, weil man ohne die Zusatzforderung die gewünschten Eigenschaften nicht nachweisen kann. Erst an der Möglichkeit, signifikante Aussagen über interessante Beispiele zu machen, entscheidet sich, ob eine Definition gut ist. Im Falle der Abstandsfunktion fordert man die Symmetrie, weil es einerseits sehr viele Situationen gibt, in der sie erfüllt ist, und sie andererseits in vielen Argumenten unverzichtbar ist.

Definition 1.1 (Metrischer Raum)
Sei M eine (nichtleere) Menge und $d\colon M \times M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Funktion. Dann heißt d eine *Metrik* auf M und (M, d) ein *metrischer Raum*, wenn für alle $x, y, z \in M$ gilt:

(M1) $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$.
(M2) $d(x, y) = d(y, x)$.
(M3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Die Eigenschaft (M3) heißt *Dreiecksungleichung*, weil sie im Falle einer euklidischen Ebene M besagt, dass in einem Dreieck die Länge einer Seite niemals größer ist als die Summe der beiden anderen Seiten.



Wenn die Metrik d entweder aus dem Kontext klar ist oder ihre speziellen Eigenschaften nicht gebraucht werden, sagt man einfach: M ist ein metrischer Raum.

1.1.1 Beispiele für Metriken

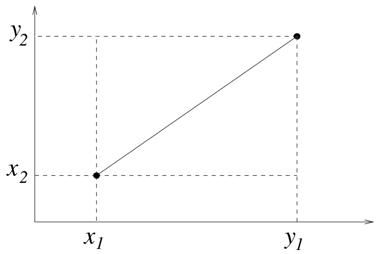
Ein einfaches geometrisches Beispiel für eine Metrik liefert der Absolutbetrag auf den reellen Zahlen:

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}: \quad d(x, y) := |x - y|. \tag{1.1}$$

Der Nachweis der Eigenschaften (M1)–(M3) für dieses d ist eine leichte Übung (siehe Übung 2.1 in (AB)) im Rechnen mit Beträgen. Zusammen mit dem Satz von Pythagoras motiviert die Formel (1.1) die folgende Metrik auf $\mathbb{R}^2$, die man die *euklidische Metrik* nennt und die den üblichen Abstand in einer Ebene beschreibt (siehe auch Seite 96)

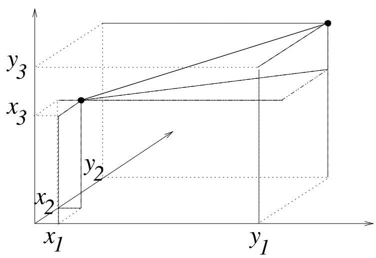
$$d\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) := \sqrt{|x_1-y_1|^2+|x_2-y_2|^2} = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2} \tag{1.2}$$

für $(x_1,x_2),(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$.



Es ist allerdings nicht so einfach, aus dieser Formel abzuleiten, dass d wirklich (M1)–(M3) erfüllt. Schon um die definierende Gleichung hinschreiben zu können, braucht man die Wurzelfunktion, deren Konstruktion in der Analysis erheblichen Aufwand erfordert. Akzeptiert man die Wurzelfunktion $\sqrt{\ }: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ als gegeben, dann sind (M1) und (M2) sehr leicht einzusehen. Die Dreiecksungleichung erfordert dagegen einen echten Beweis (siehe Proposition 2.56).

Für zwei Punkte im dreidimensionalen Raum kann man den Satz von Pythagoras zweimal anwenden, um den Abstand zu bestimmen.



Das liefert dann die Formel

$$\begin{aligned} d\big((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\big) &:= \sqrt{\sqrt{|x_1-y_1|^2+|x_2-y_2|^2}^{\,2}+|x_3-y_3|^2} \\ &= \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2} \end{aligned}$$

für $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Für höhere Dimensionen hat man zwar keine geometrische Intuition mehr, die Beweise für die Eigenschaften (M1)–(M3) im Falle $\mathbb{R}^3$ zeigen aber, wie man nachweisen kann, dass

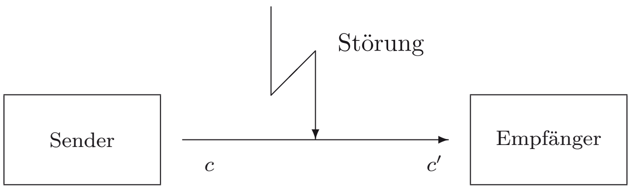
$$d\big((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\big) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} \tag{1.3}$$

für $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ eine Metrik auf $\mathbb{R}^n$ definiert.

Die obigen Beispiele sind mathematische Präzisierungen des Abstandsbegriffs in der euklidischen Geometrie der Ebene und ihren Verallgemeinerungen auf beliebige Dimensionen. Der Begriff einer Metrik ist aber keineswegs nur in solchen rein geometrischen Kontexten einsetzbar. Man findet eine Vielzahl von Beispielen in den unterschiedlichsten Zusammenhängen. Wie schon das Beispiel des euklidischen Abstands zeigt, ist es manchmal gar nicht so einfach nachzuweisen, dass eine gegebene Funktion eine Metrik ist. Das soll uns hier aber nicht davon abhalten, auch einige interessante Beispiele zu skizzieren, deren Kontext zunächst nur grob geschildert werden kann, weil die nötigen Begriffe noch nicht eingeführt wurden.

Das Beispiel 1.2 stammt aus der Codierungstheorie und beschreibt den Abstand zwischen Codewörtern, den man für die Korrektur von Übertragungsfehlern einsetzen kann.

Beispiel 1.2 (Hamming-Abstand)
Wir betrachten das folgende Modell für fehleranfällige Informationsübertragung:



Die Menge $A := \{0, 1\}$ wird als Alphabet interpretiert, das nur aus zwei Buchstaben besteht. Die Elemente von A^n werden als Wörter mit n Buchstaben aufgefasst. Die c und c' in obiger Skizze sind solche Wörter, das heißt, wir betrachten hier nur solche Fehler, durch die Buchstaben verändert, nicht aber geschluckt oder hinzugefügt werden. Ein *Code* ist eine Teilmenge von A^n, die als die Menge der zulässigen, das heißt in der gegebenen Sprache sinnvollen, Wörter betrachtet wird. Die Idee der fehlerkorrigierenden Codes ist es, die Wörter des Codes so verschieden zu bauen, dass auch nach Veränderung von einigen (nicht zu vielen) Buchstaben nur ein Wort des Codes in Frage kommt, das man aus dem empfangenen Wort durch entsprechend wenige Korrekturen zurückgewinnen kann. Um die Verschiedenheit von Wörtern quantitativ zu fassen, führt man den *Hamming-Abstand* ein:

$$d\colon A^n \times A^n \to \mathbb{R}_0^+, \quad d\Big((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\Big) := \sharp\{j \in \{1, ..., n\} \mid x_j \neq y_j\}.$$

Dabei steht $\sharp\{\ldots\}$ für die Anzahl der Elemente in $\{\ldots\}$. Das heißt, der Abstand zwischen zwei Wörtern ist die Anzahl der Positionen, an denen unterschiedliche Buchstaben stehen. Das so definierte d ist eine Metrik auf A^n (siehe Übung 2.2 in (AB)).

Die Schlüsselidee für die Konstruktion fehlerkorrigierender Codes ist es, die Code-Wörter so auszuwählen, dass sie einen gewissen Mindest-Hamming-Abstand voneinander haben. Angenommen, es gibt eine Zahl $m \in \mathbb{N}$, für die zwei Code-Wörter mindestens den Hamming-Abstand $2m+1$ haben. Dann kann man aus dem empfangenen Wort durch m Veränderungen höchstens ein Code-Wort gewinnen. Wenn man also weiß, dass bei der Übertragung nicht mehr als m Stellen verändert wurden, dann muss dieses Code-Wort das ursprünglich gesendete Wort sein. Man ersetzt daher die empfangenen Wörter durch die bezüglich des Hamming-Abstands nächstgelegenen Code-Wörter. Auf diese Weise repariert man alle Übertragungsfehler in Worten, in denen nicht mehr als m-Stellen verfälscht wurden.

Die effektive Konstruktion fehlerkorrigierender Codes nutzt nicht nur die Abstandsfunktion, sondern auch die algebraische Struktur des Alphabets und der Wortmenge. Darauf wird in Beispiel 2.49 näher eingegangen.

Die Idee des Hamming-Abstands lässt sich auf die Messung von Abständen zwischen Funktionen übertragen. Betrachtet man ein n-Tupel $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$ als eine Funktion $f\colon \{1, \ldots, n\} \to \{0,1\}$ mit $f(m) = x_m$, so ist der Hamming-Abstand zwischen zwei Funktionen f_1 und f_2 durch die Formel

$$d(f_1, f_2) = \sum_{m=1}^{n} |f_1(m) - f_2(m)| \tag{1.4}$$

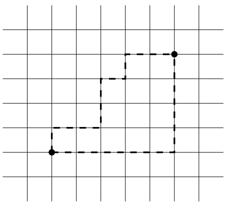
gegeben. Für allgemeine Funktionen $f\colon M \to \mathbb{R}$ auf einer endlichen Menge M kann man dieselbe Formel benutzen, um den Abstand zweier Funktionen zu definieren. Es ist wieder eine einfache Übungsaufgabe (siehe Übung 2.3 in (AB)) nachzuweisen, dass das so definierte d eine Metrik auf der Menge $\mathcal{F}(M, \mathbb{R})$ aller reellwertigen Funktionen auf M ist.

Für $M = \{1, \ldots, n\}$ führt dies auf folgendes Beispiel einer Metrik auf $\mathbb{R}^n$:

Beispiel 1.3 (Taxifahrer-Abstand)
Auf der Menge $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \mid x_j \in \mathbb{R}\}$ wird durch

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \quad d(x,y) := \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|$$

eine Metrik definiert. Der Name *Taxifahrer-Abstand* rührt daher, dass diese Metrik die Distanz modelliert, die man in einer schachbrettartig angelegten Stadt wie Manhattan zwischen zwei Punkten zurücklegen muss.



Für unendliche Mengen M kann man die Formel (1.4) nicht als Definition übernehmen. Wenn man sich aber klar macht, dass das Integral auf Intervallen eine Art verallgemeinerte Summe ist (das von Leibniz eingeführte Symbol $\int$ ist ein S wie in „Summe"), dann liegt es nahe, eine Abstandsfunktion für Funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ durch

$$d(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \,\mathrm{d}x \tag{1.5}$$

zu definieren. Das geht nicht bei beliebigen Funktionen, weil das Integral nicht für beliebige Funktionen definiert ist. Die Standardresultate der Integrationstheorie, die man in einer typischen Vorlesung „Analysis 1" lernt, zeigen aber, dass durch die Formel (1.5) eine Metrik auf dem Raum $C([a,b],\mathbb{R})$ aller stetigen reellwertigen Funktionen auf $[a,b]$ definiert wird.

Es lässt sich auch ein Bezug der euklidischen Metrik (1.3) zu einem Abstand zwischen Funktionen herstellen. Betrachtet man nämlich einen Punkt $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ als die Funktion $f\colon \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$ mit $f(m) = x_m$, so ergibt sich für die euklidische Metrik die Formel

$$d(f,g) = \sqrt{\sum_{m=1}^{n} |f(m) - g(m)|^2}. \tag{1.6}$$

Unter Benutzung der Notation $r^{\frac{1}{2}}$ für $\sqrt{r}$, schreibt man dies zu

$$d(f,g) = \Big(\sum_{m=1}^{n} |f(m) - g(m)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \tag{1.7}$$

um. Auch diese Metrik hat eine Entsprechung für stetige Funktionen auf Intervallen, das heißt,

$$d(f,g) = \Big(\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 \,\mathrm{d}x \Big)^{\frac{1}{2}} \tag{1.8}$$

definiert eine Metrik auf dem Raum $C([a,b],\mathbb{R})$ aller stetigen reellwertigen Funktionen auf $[a,b]$.

Von hier aus gelangt man zu einer Reihe weiterer Verallgemeinerungen. Man kann zeigen, dass für jede reelle Zahl $p \geq 1$ die Formel

$$d(f,g) = \Big(\sum_{m \in M} |f(m) - g(m)|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \tag{1.9}$$

eine Metrik auf $\mathcal{F}(M, \mathbb{R})$ definiert, sofern M endlich ist (vergleiche Beispiel 2.45). Auch Formel (1.9) überträgt sich auf stetige Funktionen auf Intervallen. Man muss aber nicht bei den Intervallen der Form $[a, b]$ stehen bleiben. Wann immer man auf einer Menge Integrale definieren kann (siehe Kapitel 3), führt die eine Variante von Formel (1.9) auf metrische Räume von Funktionen. Eine weitere Möglichkeit der Verallgemeinerung ist es, statt der reellwertigen Funktionen, Funktionen mit Werten in einem metrischen Raum (N, d_N) zu betrachten und den Ausdruck $|f(m)-g(m)|$ in den obigen Formeln durch $d_N\big(f(m), g(m)\big)$ zu ersetzen.

Man muss sich natürlich die Frage stellen, wieso man überhaupt Metriken auf Räumen von Funktionen einführen möchte. Für den erfahrenen Mathematiker ist diese Frage leicht zu beantworten, weil er weiß, dass die hier aufgeführten Metriken keine Spielerei sind, sondern wichtige Anwendungen zum Beispiel in der Theorie der (partiellen) Differentialgleichungen haben. Für den Leser, von dem ja keine Erfahrung erwartet wird, sei hier kurz skizziert, was Differentialgleichungen und von welcher Art diese Anwendungen sind. Die entsprechenden Techniken lernt man im zweiten oder dritten Semester im Zuge der Analysis-Vorlesungen. Man kann sich vorstellen, dass Funktionen Zustände von physikalischen oder anderen Systemen beschreiben, wie zum Beispiel Temperaturverteilungen. Wie für Konfigurationen von endlich vielen Massepunkten in der Mechanik, mit denen man zum Beispiel Planetenkonstellationen modelliert, möchte man auch für solche Systeme gerne die zeitlichen Entwicklungen studieren.

Für Massepunkte verwendet man die Newtonsche Gleichung, die einen Zusammenhang zwischen wirkenden Kräften und Beschleunigungen herstellt. Wenn die Kraft vom Ort der Massepunkte abhängt, zum Beispiel von einer Höhe, dann koppelt die Newtonsche Gleichung den Ort mit der zeitlichen Veränderung (das heißt der Geschwindigkeit) des Ortes. Genauer gesagt, mit der zeitlichen Veränderung der zeitlichen Veränderung des Ortes, denn Beschleunigung ist die Änderungsrate der Geschwindigkeit. Eine solche Kopplung lässt sich durch eine Differentialgleichung erster Ordnung beschreiben, das heißt durch eine Gleichung von der Form $F(x(t), x'(t), t) = 0$. Dabei ist t ein Zeitparameter, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ und $x'(t)$ die erste Ableitung von x nach t. Wenn in einer solchen Gleichung auch höhere Ableitungen vorkommen, spricht man von Differentialgleichungen höherer Ordnung. Unter bestimmten Voraussetzungen an die Funktion $F\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lässt sich zu vorgegebenen Anfangsbedingungen, zum Beispiel zur Zeit $t = 0$, die Funktion $x(t)$ bestimmen. Die Möglichkeit, Abstände zwischen Punktkonfigurationen zu beschreiben, ist dabei ein ganz wesentlicher Baustein (vergleiche Abschnitt 4.2).

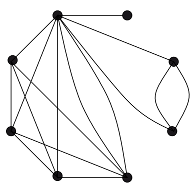
Einen Teil der für die zeitliche Evolution von Punktkonfigurationen beschriebenen Ideen kann man so modifizieren, dass sich damit zeitliche Entwicklungen von komplizierten Zuständen mit unendlich vielen Freiheitsgraden wie Temperaturverteilungen beschreiben lassen. Dabei sind Abstandsfunktionen auf Funktionenräumen unerlässlich. In der Praxis stellt sich heraus, dass man für viele Fragestellungen nicht mit einer einzelnen Abstandsfunktion auskommt, sondern ganze Familien von Metriken braucht.

Alle bisher aufgeführten Beispiele von Metriken teilen eine Besonderheit: Man bestimmt den Abstand dadurch, dass man zuerst eine Differenz bildet und dann dieser Differenz eine positive Zahl zuordnet, die man als Länge interpretieren kann. Das ist möglich, weil alle betrachteten metrischen Räume Mengen mit einer Zusatzstruktur waren, die es erlaubt, Elemente zu addieren und zu subtrahieren. Wir werden diesen Aspekt in Abschnitt 2.3 systematisch aufgreifen, wenn wir die grundlegenden Rechenregeln zur Verfügung haben, die man für ein solches Vorgehen braucht. Hier konzentrieren wir uns auf einen anderen Aspekt, den insbesondere das Beispiel 1.3 nahelegt und der uns zu Beispielen führt, die nicht mehr über Differenzen zu gewinnen sind: die Messung von Längen. Die Interpretation von Beispiel 1.3 als Taxifahrer-Abstand beruht darauf, dass wir den unterschiedlichen Fahrtrouten jeweils Längen zugeordnet haben. Es kommt immer die gleiche Länge heraus, und deshalb ist es sinnvoll, diese Länge zum Abstand zwischen Anfangs- und Endpunkt zu erklären. Möchte man allgemein Längen von Verbindungswegen studieren, so ist zunächst überhaupt nicht klar, wie man das machen kann. Für Graphen lassen sich Weglängen jedoch ganz einfach modellieren.

Beispiel 1.4 (Kanten-Abstand auf Graphen)
Ein *Graph* ist ein Tripel $G = (K, E, \eta)$ mit zwei Mengen K und E sowie einer Abbildung

$$\eta\colon K \to \{\{a, b\} \subseteq E\}.$$

Die Elemente von E werden *Ecken* genannt. Die Elemente von K heißen *Kanten*. Dem liegt die Interpretation zugrunde, dass die Ecken a und b durch eine Kante k verbunden sind, wenn $\eta(k) = \{a, b\}$. Zwei Ecken a und b sind durch mehr als eine Kante verbunden, wenn das Urbild von $\{a, b\}$ unter η mehr als ein Urbild hat. Der Graph heißt *endlich*, wenn sowohl E als auch K endliche Mengen sind.

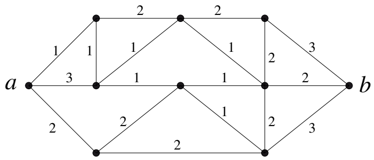


Ein Graph G heißt *zusammenhängend*, wenn zwei beliebige Ecken durch eine Folge von Kanten miteinander verbunden sind. Das bedeutet, zu je zwei Ecken $a, b \in K$ gibt es eine endliche Folge von Kanten $k_1, \ldots, k_m$ mit $\eta(k_j) = \{a_j, a_{j+1}\}$ für $j = 1, \ldots, m$, wobei $a_1 = a$ und $a_{m+1} = b$ ist. Eine solche Folge von Kanten nennt man einen *Weg* von a nach b.

In einem zusammenhängenden Graphen definiert man den *Kanten-Abstand* $d(a, b)$ zweier Ecken a und b als die minimale Anzahl von Kanten, die man braucht, um die beiden Ecken zu verbinden. Nennt man die Anzahl der Kanten in einem Weg w die *Länge* $\ell(w)$ des Weges, dann lässt sich der Kanten-Abstand folgendermaßen definieren:

$$d(a,b) := \min\{\ell(w) \mid w \text{ ist ein Weg von } a \text{ nach } b\}. \tag{1.10}$$

Der Kanten-Abstand spielt eine wichtige Rolle in Optimierungsproblemen. Um die Palette der Optimierungsprobleme, die man als Abstandsberechnungen auf Graphen formulieren kann, zu erweitern, modifiziert man den Kanten-Abstand auch durch Gewichtsfunktionen. Das heißt, man ordnet jeder Kante eine positive Zahl als Bewertung zu, die man als „Länge" der Kante interpretiert.



Dementsprechend ändert man die Definition der Weglänge ab. Sie ist dann die Summe der Bewertungen aller Kanten des Wegs. Wenn $B\colon K \to \mathbb{R}_{>0}$ die Bewertungsfunktion ist und w durch die Folge $k_1, \ldots, k_m$ von Kanten gegeben ist, dann erhält man $\ell_B(w) = \sum_{j=1}^{m} B(k_j)$ als Weglänge. Auf einem derart bewerteten Graphen ist der Abstand zweier Ecken a und b wieder durch die Gleichung (1.10) gegeben, nur dass man $\ell(w)$ durch $\ell_B(w)$ ersetzen muss.

Auch der Kanten-Abstand auf Graphen hat Entsprechungen in unendlichen Mengen, genauer gesagt, in kontinuierlichen Geometrien. Insbesondere ist der Abstand zwischen zwei Punkten in der euklidischen Geometrie als die Länge der kürzesten Verbindung, nämlich der geraden Verbindungsstrecke, gegeben. In diesem Fall ist sie, im Gegensatz zu den Beispielgraphen in Beispiel 1.4, eindeutig bestimmt. Klarer wird die Analogie, wenn man über passende Abstandsfunktionen auf gekrümmten Flächen wie der Kugeloberfläche nachdenkt. Es gibt keinen eindeutig bestimmten kürzesten Weg vom Nordpol zum Südpol. Alle Wege entlang fester Längengrade haben dieselbe Länge. In diesem Kontext tauchen allerdings diverse technische Schwierigkeiten auf. Die Frage, wie man einem Weg eine Länge zuordnen kann, ist schwierig zu beantworten. Für Wege ohne rapide Richtungsänderungen (stetig differenzierbar) kann man sich dazu der Differential- und Integralrechnung bedienen. Wenn man nämlich das Konzept der Ableitung zur Verfügung hat, kann man von einer Geschwindigkeit sprechen. Den zurückgelegten Weg kann man als das Produkt der Geschwindigkeit mit der für den Weg benötigten Zeit berechnen, falls die Geschwindigkeit konstant ist. Für kurze Zeiten ist das annähernd der Fall, und für längere Zeit erhält man das richtige Ergebnis durch Integration.

Für Situationen, in denen es unendlich viele Verbindungswege gibt, muss keine kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten existieren. Wenn man zum Beispiel einen Punkt aus der Ebene herausschneidet, dann wird es keine bezüglich der euklidischen Metrik kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten, auf deren Verbindungsstrecke dieser Punkt liegt, geben.

http://www.springer.com/978-3-642-34754-2

Lesebuch Mathematik für das erste Studienjahr
Hilgert, J.
2013, XI, 328 S. 20 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-642-34754-2