

Kapitel II

Konforme Finite Elemente

Die mathematische Behandlung der Finite-Element-Verfahren fußt auf der Variationsformulierung elliptischer Differentialgleichungen. Die Lösungen der wichtigsten Differentialgleichungen lassen sich durch Minimaleigenschaften charakterisieren. Die Variationsaufgaben besitzen Lösungen in den Funktionenräumen, die man als Sobolev-Räume bezeichnet. Für die numerische Behandlung führt man die Minimierung in endlich-dimensionalen Unterräumen durch. Als passend — sowohl aus praktischer als auch aus theoretischer Sicht — haben sich die sogenannten Finite-Element-Räume erwiesen.

Für lineare Differentialgleichungen kommt man mit Hilbert-Raum-Methoden aus. Insbesondere erhält man auf diese Weise sehr schnell die Existenz sogenannter schwacher Lösungen. Regularitätsaussagen werden, soweit sie für die Finite-Element-Theorie von Belang sind, ohne Beweis angegeben.

Der Inhalt dieses Kapitels ist eine Theorie der einfachen Methoden, die für die Bewältigung skalarer elliptischer Differentialgleichungen 2. Ordnung ausreichen. Die allgemeineren Aussagen dienen zugleich der Vorbereitung anderer elliptischer Probleme, für deren Behandlung die in Kapitel III genannten zusätzlichen Überlegungen und Methoden erforderlich sind.

Man betrachtet im allgemeinen eine Arbeit von Courant [1943] als den ersten mathematischen Beitrag zu einem Finite-Element-Ansatz. Eine Arbeit von Schellbach [1851] entstand ein Jahrhundert vorher, auch bei Euler findet man bei nicht zu enger Auslegung schon Finite Elemente. Populär wurde die Methode erst Ende der Sechziger Jahre, als auch Anwender aus dem Ingenieurbereich unabhängig auf diese Methode stießen und ihr den heute üblichen Namen gaben. Als erstes Lehrbuch machte das Buch von Strang und Fix [1973] Geschichte. Fast gleichzeitig hatten Babuška und Aziz [1972] mit einem langen Übersichtsartikel für eine breite Basis bei den tiefer liegenden funktionalanalytischen Hilfsmitteln gesorgt.

Unabhängig davon hatte sich im Ingenieurbereich die Methode der Finiten Elemente bei Berechnungen im Rahmen der Strukturmechanik durchgesetzt. Die Entwicklung begann dort 1956 u. a. mit der Arbeit von Turner, Clough, Martin und Topp [1956] und Argyris [1957]. Aus der Anfangszeit ist auch das Buch von Zienkiewicz [1971] zu nennen. Einen guten Überblick über die Geschichte der Finiten Elemente gab Oden [1991].

§ 1. Sobolev-Räume

Im folgenden sei Ω eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^n mit stückweise glattem Rand.

Die *Sobolev-Räume*, die im Rahmen dieses Buches eine Rolle spielen, werden auf dem Funktionenraum $L_2(\Omega)$ aufgebaut. $L_2(\Omega)$ besteht aus allen Funktionen u , deren Quadrat über Ω Lebesgue-integrierbar ist. Dabei werden zwei Funktionen u und v miteinander identifiziert, wenn $u(x) = v(x)$ für $x \in \Omega$ abgesehen von einer Nullmenge gilt. Durch das Skalarprodukt

$$(u, v)_0 := (u, v)_{L_2} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx \quad (1.1)$$

wird $L_2(\Omega)$ zu einem Hilbert-Raum mit der Norm

$$\|u\|_0 = \sqrt{(u, u)_0}. \quad (1.2)$$

1.1 Definition. $u \in L_2(\Omega)$ besitzt in $L_2(\Omega)$ die (*schwache*) *Ableitung* $v = \partial^\alpha u$, falls $v \in L_2(\Omega)$ und

$$(\phi, v)_0 = (-1)^{|\alpha|} (\partial^\alpha \phi, u)_0 \quad \text{für alle } \phi \in C_0^\infty(\Omega) \quad (1.3)$$

gilt.

Hier bezeichnet $C^\infty(\Omega)$ den Raum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen und $C_0^\infty(\Omega)$ den Unterraum der Funktionen, die nur in einer kompakten Teilmenge von Ω von 0 verschiedene Werte annehmen.

Wenn eine Funktion im klassischen Sinne differenzierbar ist, existiert auch die schwache Ableitung, und beide Ableitungen stimmen überein. Dann beinhaltet (1.3) gerade die Greensche Formel für die partielle Integration.

Der Begriff der schwachen Ableitung wird auf andere Differentialoperatoren entsprechend übertragen. Sei z.B. $u \in L_2(\Omega)^n$ ein Vektorfeld. Dann ist $v \in L_2(\Omega)$ die Divergenz im schwachen Sinne, kurz $v = \operatorname{div} u$, wenn $(\phi, v)_0 = -(\operatorname{grad} \phi, u)_0$ für alle $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt.

Einführung der Sobolev-Räume

1.2 Definition. Für ganzzahliges $m \geq 0$ bezeichne $H^m(\Omega)$ die Menge aller Funktionen u in $L_2(\Omega)$, die schwache Ableitungen $\partial^\alpha u$ für alle $|\alpha| \leq m$ besitzen. In $H^m(\Omega)$ wird durch

$$(u, v)_m := \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_0$$

ein Skalarprodukt mit der zugehörigen Norm

$$\|u\|_m := \sqrt{(u, u)_m} = \sqrt{\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}^2} \quad (1.4)$$

erklärt. Daneben betrachtet man die Seminorm

$$|u|_m := \sqrt{\sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}^2}. \quad (1.5)$$

Anstatt $H^m(\Omega)$ schreiben wir auch kurz H^m und umgekehrt $\|\cdot\|_{m,\Omega}$ anstatt $\|\cdot\|_m$, wenn die Angabe des Gebietes erforderlich ist.

Der Buchstabe H wurde zu Ehren von David Hilbert gewählt.

Mit der Norm $\|\cdot\|_m$ ist $H^m(\Omega)$ vollständig, also ein Hilbert-Raum. Nützlich ist eine Eigenschaft, die sogar häufig für eine Einführung der Sobolev-Räume ohne den Begriff der schwachen Ableitung herangezogen wird:

1.3 Satz. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen mit stückweise glattem Rand. Ferner sei $m \geq 0$. Dann ist $C^\infty(\Omega) \cap H^m(\Omega)$ dicht in $H^m(\Omega)$.*

Nach Satz 1.3 ist $H^m(\Omega)$ also die Vervollständigung von $C^\infty(\Omega) \cap H^m(\Omega)$, wenn Ω beschränkt ist. Dies legt nahe, eine entsprechende Verallgemeinerung für Funktionen mit Nullrandbedingungen vorzunehmen.

1.4 Definition. Die Vervollständigung von $C_0^\infty(\Omega)$ bzgl. der Sobolev-Norm $\|\cdot\|_m$ wird mit $H_0^m(\Omega)$ bezeichnet.

Offensichtlich ist der Hilbert-Raum $H_0^m(\Omega)$ ein abgeschlossener Unterraum von $H^m(\Omega)$. Außerdem ist $H_0^0(\Omega) = L_2(\Omega)$, so dass sich folgendes Schema ergibt:

$$\begin{array}{ccccccc} L_2(\Omega) & = & H^0(\Omega) & \supset & H^1(\Omega) & \supset & H^2(\Omega) & \supset & \dots \\ & & \parallel & & \cup & & \cup & & \\ & & H_0^0(\Omega) & \supset & H_0^1(\Omega) & \supset & H_0^2(\Omega) & \supset & \dots \end{array}$$

Diese Sobolev-Räume basieren auf $L_2(\Omega)$ und der L_2 -Norm. Mit L_p -Normen, wobei $p \neq 2$ sein mag, kann man ganz analog Sobolev-Räume bilden, die insbesondere für die Untersuchung *nichtlinearer* elliptischer Probleme verwandt werden. Die zu H^m und H_0^m analogen Räume bezeichnet man als $W^{m,p}$ bzw. $W_0^{m,p}$.

Die Friedrichssche Ungleichung

In den Räumen mit verallgemeinerten Nullrandbedingungen, d.h. in H_0^m , sind die Seminormen (1.5) zu den Normen (1.4) äquivalent.

1.5 Poincaré–Friedrichssche Ungleichung. *Sei Ω in einem n -dimensionalen Würfel der Kantenlänge s enthalten. Dann ist*

$$\|v\|_0 \leq s \|v\|_1 \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega). \quad (1.6)$$

Beweis. Da $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $H_0^1(\Omega)$ ist, genügt es, die Ungleichung für $v \in C_0^\infty(\Omega)$ zu beweisen. Wir können $\Omega \subset W := \{(x_1, x_2, \dots, x_n); 0 < x_i < s\}$ annehmen und $v = 0$ für $x \in W \setminus \Omega$ setzen. Es folgt

$$v(x_1, x_2, \dots, x_n) = v(0, x_2, \dots, x_n) + \int_0^{x_1} \partial_1 v(t, x_2, \dots, x_n) dt.$$

Der Randterm verschwindet, und die Cauchy–Schwarzsche Ungleichung liefert

$$\begin{aligned} |v(x)|^2 &\leq \int_0^{x_1} 1^2 dt \int_0^{x_1} |\partial_1 v(t, x_2, \dots, x_n)|^2 dt \\ &\leq s \int_0^s |\partial_1 v(t, x_2, \dots, x_n)|^2 dt. \end{aligned}$$

Da die rechte Seite unabhängig von x_1 ist, folgt

$$\int_0^s |v(x)|^2 dx_1 \leq s^2 \int_0^s |\partial_1 v(x)|^2 dx_1.$$

Schließlich wird über die anderen Koordinaten integriert.

$$\int_W |v|^2 dx \leq s^2 \int_W |\partial_1 v|^2 dx \leq s^2 \|v\|_1^2.$$

Damit ist alles bewiesen. □

1.6 Bemerkung. Zum Nachweis der Poincaré–Friedrichsschen Ungleichung waren Nullrandbedingungen nur auf einem Teil des Randes nötig. Wenn $\Gamma = \partial\Omega$ stückweise glatt ist, genügt es, dass die Funktion auf einem Teil des Randes Γ_D verschwindet und Γ_D eine Menge mit positivem $n - 1$ -dimensionalen Maß ist. — Bei Nullrandbedingungen auf dem ganzen Rand reicht es aus, dass Ω zwischen zwei Hyperflächen mit Abstand s liegt. □

Durch die Anwendung der Friedrichsschen Ungleichung auf Ableitungen erkennt man, dass

$$|\partial^\alpha v|_0 \leq s |\partial_1 \partial^\alpha v|_0 \quad \text{für } |\alpha| \leq m - 1, \quad v \in H_0^m(\Omega)$$

gilt. Durch eine Induktion erhält man

1.7 Satz. Wenn Ω beschränkt ist, sind in $H_0^m(\Omega)$ die Normen $\|\cdot\|_m$ und $|\cdot|_m$ äquivalent. Ist Ω in einen Würfel der Kantenlänge s enthalten, ist

$$|v|_m \leq \|v\|_m \leq (1+s)^m |v|_m \quad \text{für } v \in H_0^m(\Omega). \quad (1.7)$$

Singularitäten von H^1 -Funktionen

Bekanntlich gibt es in $L_2(\Omega)$ auch unbeschränkte Funktionen. Wie weit auch höhere Sobolev-Räume noch solche Funktionen enthalten, hängt von der Dimension des Gebietes ab. Dies soll an Hand von $H^1(\Omega)$ als dem wichtigsten Raum erläutert werden.

1.8 Bemerkung. Sei $\Omega = [a, b]$ ein reelles Intervall. Dann ist $H^1[a, b] \subset C[a, b]$.

Beweis. Sei $v \in C^\infty[a, b]$ oder allgemeiner aus $C^1[a, b]$. Dann haben wir für $|x - y| \leq \delta$ bei Ausnutzung der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned} |v(x) - v(y)| &= \left| \int_x^y Dv(t) dt \right| \\ &\leq \left| \int_x^y 1^2 dt \right|^{1/2} \cdot \left| \int_x^y [Dv(t)]^2 dt \right|^{1/2} \\ &\leq \sqrt{\delta} \|v\|_1. \end{aligned}$$

Jede Cauchy-Folge in $H^1[a, b] \cap C^\infty[a, b]$ ist deshalb gleichgradig stetig und beschränkt. Nach dem Satz von Arzelà–Ascoli ist die Grenzfunktion stetig. \square

Schon für zweidimensionale Gebiete Ω ist die entsprechende Aussage nicht mehr richtig. Auf dem Einheitskreis $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$ ist

$$u(x, y) = \log \log \frac{2}{r}, \quad (1.8)$$

mit $r^2 = x^2 + y^2$ eine unbeschränkte H^1 -Funktion. Dass u in $H^1(D)$ enthalten ist, folgt aus

$$\int_0^{1/2} \frac{dr}{r \log^2 r} < \infty.$$

Für n -dimensionale Gebiete, $n \geq 3$, ist

$$u(x) = r^{-\alpha}, \quad \alpha < (n-2)/2 \quad (1.9)$$

eine H^1 -Funktion mit einer Singularität im Nullpunkt. Offenbar sind die Singularitäten in (1.9) um so ausgeprägter, je größer n ist.

Dass die H^2 -Funktionen mit einem Definitionsbereich im \mathbb{R}^2 stetig sind, wird sich in §3 im Zusammenhang mit einem Einbettungs- und einem Spursatz erweisen.

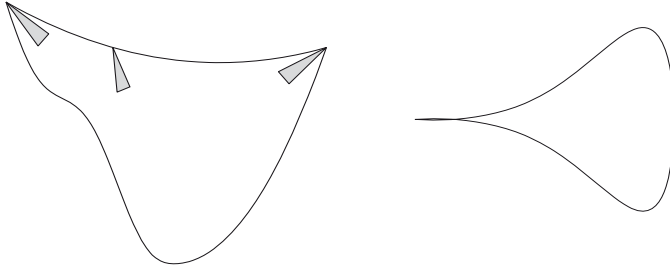


Abb. 6. Gebiete mit erfüllter bzw. verletzter Kegelbedingung

Kompakte Einbettungen

Eine stetige, lineare Abbildung $L : U \rightarrow V$ zwischen den normierten Räumen U und V heißt *kompakt*, wenn die Einheitskugel von U in eine relativ kompakte Menge von V abgebildet wird. Wenn insbesondere $U \subset V$ gilt und die Inklusion $j : U \hookrightarrow V$ kompakt ist, spricht man von einer kompakten Einbettung.

Nach dem Satz von Arzelà–Ascoli bilden die C^1 -Funktionen v , für die

$$\sup_{\Omega} |v(x)| + \sup_{\Omega} |\nabla v(x)| \quad (1.10)$$

eine gegebene Zahl nicht übersteigt, eine relativ kompakte Teilmenge von $C^0(\Omega)$. Die Größe (1.10) stellt in C^1 eine Norm dar. In diesem Sinne ist $C^1(\Omega)$ in $C^0(\Omega)$ kompakt eingebettet. Die analoge Aussage gilt auch für Sobolev-Räume, obwohl H^1 -Funktionen, wie wir gesehen haben, Singularitäten enthalten können.

1.9 Rellichscher Auswahlssatz. Sei $m \geq 0$ und Ω ein Lipschitz-Gebiet¹ und erfülle eine Kegelbedingung (s. Abb. 6), d.h., die Innenwinkel an den Ecken seien positiv, so dass man einen Kegel mit positivem Scheitelwinkel so in Ω verschieben kann, dass er die Ecken berührt. Dann ist die Einbettung $H^{m+1}(\Omega) \hookrightarrow H^m(\Omega)$ kompakt.

Aufgaben

1.10 Sei Ω ein beschränktes Gebiet. Man zeige mit Hilfe der Friedrichsschen Ungleichung, dass die konstante Funktion $u = 1$ nicht in $H_0^1(\Omega)$ enthalten, also $H_0^1(\Omega)$ ein echter Unterraum von $H^1(\Omega)$ ist.

¹ Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt Lipschitz-stetig, wenn $\|f(x) - f(y)\| \leq c\|x - y\|$ für $x, y \in D$ mit einer Zahl c gilt. Eine Hyperfläche im \mathbb{R}^n ist ein Graph, wenn sie in der Form $x_k = f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$, mit $1 \leq k \leq n$ und passendem Definitionsbereich im \mathbb{R}^{n-1} darstellbar ist. Ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt Lipschitz-Gebiet, wenn zu jedem $x \in \partial\Omega$ eine Umgebung in $\partial\Omega$ existiert, die sich als Graph mit einer Lipschitz-stetigen Funktion darstellen lässt.

1.11 Man nenne eine Funktion in $C[0, 1]$, die nicht in $H^1[0, 1]$ enthalten ist. — Zur Illustration von $H_0^0(\Omega) = H^0(\Omega)$ nenne man eine Folge in $C_0^\infty(0, 1)$, die im Sinne von $L_2[0, 1]$ gegen die konstante Funktion $v = 1$ konvergiert.

1.12 Das Gebiet Ω erfülle die Voraussetzungen von Satz 1.9. Man zeige, dass mit einer Konstanten $c = c(\Omega)$

$$\|v\|_0 \leq c(|\bar{v}| + |v|_1) \quad \text{für } v \in H^1(\Omega) \quad (1.11)$$

wobei $\bar{v} = \int_\Omega v(x) dx / \mu(\Omega)$ der Mittelwert von v ist.

Hinweis: Diese Variante der Friedrichsschen Ungleichung lässt sich nur unter stärkeren Voraussetzungen an das Gebiet mit derselben Technik wie bei Satz 1.5 zeigen. Man nutze hier die Kompaktheit von $H^1(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega)$ aus und benutze dieselbe Technik wie später bei Hilfssatz 6.2.

1.13 Seien $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. Für die bijektive, stetig differenzierbare Abbildung $F : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ seien $\|DF(x)\|$ und $\|(DF(x))^{-1}\|$ für $x \in \Omega$ beschränkt. Man verifiziere, dass aus $v \in H^1(\Omega_2)$ auch $v \circ F \in H^1(\Omega_1)$ folgt.

1.14 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine Kugel mit Zentrum im Nullpunkt. Man zeige, dass $u(x) = \|x\|^s$ eine schwache Ableitung in $L_2(\Omega)$ besitzt, wenn $2s > 2 - n$ oder (der triviale Fall) $s = 0$ zutrifft.

1.15 Mit ℓ_p bezeichnet man den Raum der unendlichen Zahlenfolgen (x_1, x_2, \dots) mit $\sum_k |x_k|^p < \infty$. Mit der Norm

$$\|x\|_p := \|x\|_{\ell_p} := \left(\sum_k |x_k|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

wird ℓ_p zum Banach-Raum. Wegen $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1$ ist die Einbettung $\ell_1 \hookrightarrow \ell_2$ stetig. Ist sie auch kompakt?

1.16 Man betrachte

- a) die Fourier-Reihen $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$ über $[0, 2\pi]$,
- b) die Fourier-Reihen $\sum_{k,\ell=-\infty}^{+\infty} c_{k\ell} e^{ikx+ily}$ über $[0, 2\pi]^2$.

Die Aussage $u \in H^m$ drücke man als Forderung an die Koeffizienten aus, insbesondere zeige man die Äquivalenz der Aussagen $u \in L_2$ und $c \in \ell_2$.

Man zeige, dass im Fall b) aus $u_{xx} + u_{yy} \in L^2$ auch $u_{xy} \in L^2$ folgt.

§ 2. Variationsformulierung elliptischer Randwertaufgaben 2. Ordnung

Eine Funktion, welche eine gegebene Differentialgleichung 2. Ordnung erfüllt und die vorgegebenen Randwerte annimmt, wird als *klassische Lösung* bezeichnet, wenn sie bei Dirichlet-Randwerten in $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ bzw. bei Neumann-Randwerten in $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ enthalten ist. Klassische Lösungen erhält man bei hinreichend glattem Rand, wobei zusätzliche Bedingungen zu erfüllen sind, falls auf einem Teil des Randes Neumann-Bedingungen vorgegeben sind. Auch bei klassischen Lösungen brauchen die höheren Ableitungen nicht beschränkt zu sein (s. Beispiel 2.1). Damit ist der einfachen Konvergenztheorie für Differenzenverfahren in Kapitel I die Basis entzogen.

Einen Zugang für die numerische Behandlung der Randwertaufgaben eröffnet der Weg über die Variationsformulierung, der insbesondere zu den Finiten Elementen führt. Zugleich wird dabei auf einfache Weise die Existenz sogenannter *schwacher Lösungen* gewonnen.

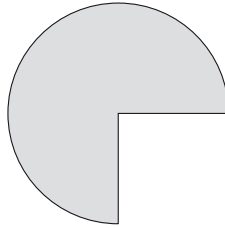


Abb. 7. Gebiet mit einspringender Ecke in Beispiel 2.1

2.1 Beispiel. Man betrachte ein zweidimensionales Gebiet mit einspringender Ecke

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1, x < 0 \text{ oder } y > 0\} \quad (2.1)$$

und identifiziere \mathbb{R}^2 mit \mathbb{C} . Dann ist $w(z) := z^{2/3}$ analytisch in Ω , und der Imaginärteil $u(z) := \text{Im } w(z)$ als harmonische Funktion Lösung der Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{in } \Omega, \\ u(e^{i\varphi}) &= \sin\left(\frac{2}{3}\varphi\right) && \text{für } 0 \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}, \\ u &= 0 && \text{sonst auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Wegen $w'(z) = 2/3 z^{-1/3}$ sind nicht einmal die ersten Ableitungen von u für $z \rightarrow 0$ beschränkt.

Variationsformulierung

Ehe wir elliptische lineare Probleme als Variationsaufgaben darstellen, bringen wir einen abstrakten

2.2 Charakterisierungssatz. Sei V ein linearer Raum und

$$a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

eine symmetrische, positive Bilinearform, d.h. es sei $a(u, u) > 0$ für alle $u \in V, u \neq 0$.
Ferner sei

$$\ell : V \rightarrow \mathbb{R}$$

ein lineares Funktional. Die Größe

$$J(v) := \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \ell, v \rangle$$

nimmt in V ihr Minimum genau dann bei u an, wenn

$$a(u, v) = \langle \ell, v \rangle \quad \text{für alle } v \in V \quad (2.2)$$

gilt. Außerdem gibt es höchstens eine Minimallösung.

Bemerkung: Die Menge der linearen Funktionale ℓ ist ein linearer Raum. Anstatt $\ell(v)$ schreibt man häufig lieber $\langle \ell, v \rangle$, um die Symmetrie in ℓ und v zum Ausdruck zu bringen.

Beweis. Für $u, v \in V$ und $t \in \mathbb{R}$ berechnen wir

$$\begin{aligned} J(u + tv) &= \frac{1}{2}a(u + tv, u + tv) - \langle \ell, u + tv \rangle \\ &= J(u) + t[a(u, v) - \langle \ell, v \rangle] + \frac{1}{2}t^2a(v, v). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Wenn $u \in V$ die Bedingung (2.2) erfüllt, dann folgt aus (2.3) mit $t = 1$:

$$\begin{aligned} J(u + v) &= J(u) + \frac{1}{2}a(v, v) \quad \text{für } v \in V \\ &> J(u), \quad \text{falls } v \neq 0 \text{ ist.} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Dann ist u also eindeutiger Minimalpunkt. Wenn umgekehrt J bei u ein Minimum hat, muss für jedes $v \in V$ die Ableitung der Funktion $t \mapsto J(u + tv)$ bei $t = 0$ verschwinden. Nach (2.3) beträgt die Ableitung $a(u, v) - \langle \ell, v \rangle$, und es folgt (2.2). \square

Die Beziehung (2.4), die das Anwachsen von J bei Entfernung vom Minimalpunkt u beschreibt, wird im weiteren noch oft herangezogen.

Reduktion auf homogene Randbedingungen

Im folgenden sei L ein elliptischer Differentialoperator 2. Ordnung mit Divergenzstruktur:

$$Lu := - \sum_{i,k=1}^n \partial_i (a_{ik} \partial_k u) + a_0 u \quad (2.5)$$

mit

$$a_0(x) \geq 0 \quad \text{für } x \in \Omega.$$

Das gegebene Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} Lu &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \quad (2.6)$$

transformieren wir zunächst auf ein solches mit homogenen Randbedingungen. Dazu wird vorausgesetzt, dass eine zulässige Funktion u_0 bekannt ist, welche auf dem Rand mit g übereinstimmt. Für $w := u - u_0$ ist dann

$$\begin{aligned} Lw &= f_1 \quad \text{in } \Omega, \\ w &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \quad (2.7)$$

mit $f_1 := f - Lu_0$. Der Einfachheit halber werden wir meistens annehmen, dass schon in (2.6) homogene Randbedingungen vorliegen.

Als unmittelbare Folgerung des Charakterisierungssatzes ergibt sich der Zusammenhang zwischen der Randwertaufgabe (2.7) und der Variationsaufgabe. Ähnliche Überlegungen hat bereits L. Euler angestellt. Deshalb wird die Differentialgleichung $Lu = f$ auch als Eulersche Differentialgleichung für das Variationsproblem bezeichnet.

2.3 Minimaleigenschaft. Jede klassische Lösung der Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} - \sum_{i,k} \partial_i (a_{ik} \partial_k u) + a_0 u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

ist Lösung des Variationsproblems

$$J(v) := \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik} \partial_i v \partial_k v + \frac{1}{2} a_0 v^2 - f v \right] dx \longrightarrow \min ! \quad (2.8)$$

unter allen Funktionen in $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ mit Nullrandwerten.

Beweis. Der Beweis erfolgt mit Hilfe der Greenschen Formel

$$\int_{\Omega} v \partial_i w \, dx = - \int_{\Omega} \partial_i v \cdot w \, dx + \int_{\partial\Omega} v w \, \nu_i \, ds. \quad (2.9)$$

Dabei werden v und w als C^1 -Funktionen vorausgesetzt. Außerdem ist v_i die i -te Komponente der äußeren Normale ν . Indem man $w := a_{ik} \partial_k u$ in (2.9) einsetzt, folgt

$$\int_{\Omega} v \partial_i (a_{ik} \partial_k u) dx = - \int_{\Omega} a_{ik} \partial_i v \partial_k u dx, \quad (2.10)$$

sofern $v = 0$ auf $\partial\Omega$ gilt. Wir setzen²

$$\begin{aligned} a(u, v) &:= \int_{\Omega} \left[\sum_{i,k} a_{ik} \partial_i u \partial_k v + a_0 u v \right] dx, \\ \langle \ell, v \rangle &:= \int_{\Omega} f v dx. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Durch Summation von (2.10) über i und k ergibt sich für jedes $v \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ mit $v = 0$ auf $\partial\Omega$:

$$\begin{aligned} a(u, v) - \langle \ell, v \rangle &= \int_{\Omega} v \left[- \sum_{i,k} \partial_i (a_{ik} \partial_k u) + a_0 u - f \right] dx \\ &= \int_{\Omega} v [Lu - f] dx = 0, \end{aligned}$$

wenn $Lu = f$, also u eine klassische Lösung ist. Aus dem Charakterisierungssatz folgt nun die Minimaleigenschaft. \square

Mit derselben Schlussweise erkennt man, dass jede Lösung des Variationsproblems, sofern sie in dem Raum $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ liegt, eine klassische Lösung der Randwertaufgabe liefert.

Dieser Zusammenhang wurde 1847 von Thomson und später von Dirichlet für die Laplace-Gleichung erkannt. Dirichlet erklärte, dass aus der Beschränktheit von $J(u)$ nach unten folge, dass J sein Minimum für eine Funktion u annimmt. Dies Argument bezeichnet man heute als *Dirichlet-Prinzip*. Es wurde 1870 von Weierstraß widerlegt. Das Integral

$$J(u) = \int_0^1 u^2(t) dt \quad (2.12)$$

hat nämlich in der Menge $\{v \in C^0[0, 1]; v(0) = v(1) = 1\}$ das Infimum 0. Der Wert 0 wird jedoch in $C[0, 1]$ bei diesen Randbedingungen nicht angenommen.

² Die Verwendung des Buchstabens a für die Bilinearform und der Ausdrücke a_{ik} bzw. a_0 für Koeffizientenfunktionen sollte nicht zu Verwechslungen Anlass geben.

Finite Elemente

Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der
Elastizitätstheorie

Braess, D.

2013, XVI, 369 S., Softcover

ISBN: 978-3-642-34796-2