

# Lösungen der Aufgaben zu Kapitel 8

## Abschnitt 8.1

### Aufgabe 1

- (a) 
$$\int (2x - 3)^2 dx = \int (4x^2 - 12x + 9) dx = 4 \int x^2 dx - 12 \int x dx + 9 \int dx$$
$$= \frac{4}{3} x^3 - 6x^2 + 9x + C,$$
- (b) 
$$\int (2x^2 - 3x + 1) dx = 2 \int x^2 dx - 3 \int x dx + \int dx = \frac{2}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2 + x + C,$$
- (c) 
$$\int x(1 - x^2) dx = \int x dx - \int x^3 dx = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{4} x^4 + C,$$
- (d) 
$$\int x\sqrt{x} dx = \int x^{3/2} dx = \frac{2}{5} x^{5/2} + C = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + C,$$
- (e) 
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x}} dx = \int x^{-3/2} dx = -2x^{-1/2} + C = -\frac{2}{\sqrt{x}} + C,$$
- (f) 
$$\int \frac{x^2 + 1}{x\sqrt{x}} dx = \int (x^{1/2} + x^{-3/2}) dx = \int x^{1/2} dx + \int x^{-3/2} dx$$
$$= \frac{2}{3} x^{3/2} - 2x^{-1/2} + C = \frac{2}{3} x\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + C.$$

### Aufgabe 2

$$F(x) = \sqrt{ax + b} \implies F'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax + b}},$$

$$F(x) = (ax + b)^r \implies F'(x) = ra(ax + b)^{r-1},$$

$$F(x) = \arctan \frac{x - a}{b} \implies F'(x) = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x-a}{b}\right)^2} = \frac{b}{b^2 + (x - a)^2},$$

$$F(x) = \arcsin \frac{x - a}{b} \implies F'(x) = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x-a}{b}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - (x - a)^2}},$$

$$F(x) = \cos(ax + b) \implies F'(x) = -a \sin(ax + b).$$

(a) 
$$\int \frac{-1}{(x - 3)^2} dx = \frac{1}{x - 3} + C,$$

(b) 
$$\int -4(1 - x)^3 dx = (1 - x)^4 + C,$$

- (c)  $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} = \sqrt{2x+1} + C,$
- (d)  $\int 3\sqrt{2x+1} dx = (2x+1)^{3/2} + C,$
- (e)  $\int \frac{dx}{1+(x+3)^2} = \arctan(x+3) + C,$
- (f)  $\int \frac{dx}{9+(x-1)^2} = \frac{1}{9} \int \frac{dx}{1+\left(\frac{x-1}{3}\right)^2} = \frac{1}{3} \arctan \frac{x-1}{3} + C,$
- (g)  $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} = \arcsin \frac{x}{2} + C,$
- (h)  $\int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+1)^2}} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{3}\right)^2}} = \arcsin \frac{x+1}{3} + C,$
- (i)  $\int \sin(1-x) dx = \cos(1-x) + C,$
- (j)  $\int \cos(1-2x) dx = -\frac{1}{2} \sin(1-2x) + C.$

## Abschnitt 8.2

### Aufgabe 1

- (a) 
$$\begin{aligned} \int x(\sin x - \cos x) dx &= -x(\cos x + \sin x) + \int (\cos x + \sin x) dx \\ &= -x(\cos x + \sin x) + \sin x - \cos x + C \\ &= (1-x) \sin x - (1+x) \cos x + C, \end{aligned}$$
- (b) 
$$\begin{aligned} \int x^m(1-x^n) dx &= \frac{1}{m+1} x^{m+1}(1-x^n) + \frac{n}{m+1} \int x^{m+1} x^{n-1} dx \\ &= \frac{1}{m+1} x^{m+1}(1-x^n) + \frac{n}{m+1} \int x^{m+n} dx \\ &= \frac{1}{m+1} x^{m+1}(1-x^n) + \frac{n}{(m+1)(m+n+1)} x^{m+n+1} + C \\ &= \frac{1}{m+1} x^{m+1} - \frac{1}{m+n+1} x^{m+n+1} + C, \end{aligned}$$
- (c) 
$$\int x\sqrt{x+1} dx = \frac{2}{3} x(x+1)^{3/2} - \frac{2}{3} \int (x+1)^{3/2} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{3} x(x+1)^{3/2} - \frac{4}{15} (x+1)^{5/2} + C \\
&= \frac{2}{15} (x+1)^{3/2} (3x-2) + C,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(d)} \quad \int x \arctan x \, dx &= \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx \\
&= \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int \left( 1 - \frac{1}{1+x^2} \right) \, dx \\
&= \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arctan x + C \\
&= \frac{1}{2} ((x^2+1) \arctan x - x) + C.
\end{aligned}$$

## Aufgabe 2

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad \int \sin x \cos 2x \, dx &= -\cos x \cos 2x - 2 \int \cos x \sin 2x \, dx \\
&= -\cos x \cos 2x - 2 \left( \sin x \sin 2x - 2 \int \sin x \cos 2x \, dx \right) \\
&= -\cos x \cos 2x - 2 \sin x \sin 2x + 4 \int \sin x \cos 2x \, dx
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\int \sin x \cos 2x \, dx = \frac{1}{3} (\cos x \cos 2x + 2 \sin x \sin 2x) + C.$$

$$\begin{aligned}
\text{(b)} \quad \int \sin x \sin 2x \, dx &= -\cos x \sin 2x + 2 \int \cos x \cos 2x \, dx \\
&= -\cos x \sin 2x + 2 \left( \sin x \cos 2x + 2 \int \sin x \sin 2x \, dx \right) \\
&= -\cos x \sin 2x + 2 \sin x \cos 2x + 4 \int \sin x \sin 2x \, dx
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\int \sin x \sin 2x \, dx = \frac{1}{3} (\cos x \sin 2x - 2 \sin x \cos 2x) + C.$$

### Aufgabe 3

(a) Mit der Substitution  $u = 3 + \cos x$ ,  $du = -\sin x \, dx$  ergibt sich:

$$\int \frac{\sin x}{(3 + \cos x)^2} \, dx = - \int \frac{du}{u^2} = - \int u^{-2} \, du = u^{-1} + C = \frac{1}{3 + \cos x} + C.$$

(b) Mit der Substitution  $u = x^3 + 2$ ,  $du = 3x^2 \, dx$  ergibt sich:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 2}} \, dx = \frac{1}{3} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{2}{3} \sqrt{u} + C = \frac{2}{3} \sqrt{x^3 + 2} + C.$$

(c) Mit der Substitution  $u = x^2 + 3$ ,  $du = 2x \, dx$  ergibt sich:

$$\int \frac{x}{(x^2 + 3)^5} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^5} = \frac{1}{2} \int u^{-5} \, du = -\frac{1}{8} u^{-4} + C = -\frac{1}{8(x^2 + 3)^4} + C.$$

(d) Mit der Substitution  $u = \sin x$ ,  $du = \cos x \, dx$  ergibt sich:

$$\int \cos x \sin^3 x \, dx = \int u^3 \, du = \frac{1}{4} u^4 + C = \frac{1}{4} \sin^4 x + C.$$

### Aufgabe 4

(a) Mit der Substitution  $x = \sin u$ ,  $dx = \cos u \, du$ ,  $u = \arcsin x$  folgt unter Benutzung von  $1 - x^2 = 1 - \sin^2 u = \cos^2 u$ :

$$\int \frac{dx}{(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}} = \int \frac{du}{\cos^2 u} = \tan u + C = \frac{\sin u}{\cos u} + C = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} + C.$$

(b) Mit der Substitution  $x = \tan u$ ,  $dx = (1 + \tan^2 u) \, du = \frac{1}{\cos^2 u} \, du$ ,  $u = \arctan x$  folgt:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^2}} &= \int \cos u \, du = \sin u + C = \tan u \cos u + C \\ &= \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} + C. \end{aligned}$$

### Aufgabe 5

(a) Mit partieller Integration folgt

$$\int \arcsin x \, dx = \int 1 \cdot \arcsin x \, dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx.$$

Nun erhalten wir mit der Substitution  $u = \sqrt{1 - x^2}$ ,  $du = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx$

$$\begin{aligned} x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx &= x \arcsin x + \int du = x \arcsin x + u + C \\ &= x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C. \end{aligned}$$

- (b) Mit der Substitution  $u = \sqrt{x-1}$ ,  $x = u^2 + 1$ ,  $dx = 2u du$  erhalten wir ein Integral, das wir durch partielle Integration berechnen:

$$\begin{aligned}\int \sin \sqrt{x-1} dx &= 2 \int u \sin u du = 2 \left( -u \cos u + \int \cos u du \right) \\ &= 2 (-u \cos u + \sin u) + C \\ &= 2 (-\sqrt{x-1} \cos \sqrt{x-1} + \sin \sqrt{x-1}) + C.\end{aligned}$$

## Abschnitt 8.3

### Aufgabe 1

- (a) Mit der Substitution  $u = 1 + x^3$ ,  $du = 3x^2 dx$  ist  $u(-1) = 0$ ,  $u(2) = 9$ , und es folgt:

$$\int_{-1}^2 x^2 \sqrt{1+x^3} dx = \frac{1}{3} \int_0^9 \sqrt{u} du = \frac{2}{9} u^{3/2} \Big|_0^9 = \frac{2}{9} u \sqrt{u} \Big|_0^9 = \frac{2}{9} (27 - 0) = 6.$$

- (b) Mit partieller Integration folgt

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 x \sqrt{x+1} dx &= \underbrace{\frac{2}{3} x(x+1)^{3/2}}_{=0} \Big|_{-1}^0 - \frac{2}{3} \int_{-1}^0 (x+1)^{3/2} dx \\ &= -\frac{4}{15} (x+1)^{5/2} \Big|_{-1}^0 = -\frac{4}{15} (1-0) = -\frac{4}{15}.\end{aligned}$$

- (c) Mit der Substitution  $u = \sin x$ ,  $du = \cos x dx$  ist  $u(0) = u(\pi) = 0$  und daher

$$\int_0^\pi \sin^2 x \cos x dx = \int_0^0 u^2 du = 0.$$

- (d) Mit der Substitution  $u = \frac{1}{x}$ ,  $du = -\frac{1}{x^2} dx$  ist  $u(1) = 1$ ,  $u(2) = \frac{1}{2}$  und daher

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx = - \int_1^{1/2} \sin u du = \cos u \Big|_1^{1/2} = \cos \frac{1}{2} - \cos 1.$$

- (e) Mit der Substitution  $u = 1 - \cos x$ ,  $du = \sin x dx$  ist  $u(0) = 0$ ,  $u(\pi) = 2$  und daher

$$\int_0^\pi \sin x \sqrt{1 - \cos x} dx = \int_0^2 \sqrt{u} du = \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_0^2 = \frac{2}{3} u \sqrt{u} \Big|_0^2 = \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 0) = \frac{4}{3} \sqrt{2}.$$

### Aufgabe 2

- (a) Mit der Substitution  $x = \sin u$ ,  $dx = \cos u du$ ,  $u = \arcsin x$  ist  $u(0) = 0$ ,  $u(1) = \frac{\pi}{2}$  und daher ergibt sich unter Berücksichtigung von  $1 - \sin^2 u = \cos^2 u$ :

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 u du = \frac{1}{2} (u + \sin u \cos u) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

- (b) Der Graph der Sinusfunktion ist symmetrisch zum Ursprung. Daher sind die beiden Flächen, die der Graph mit der  $x$ -Achse über den Intervallen  $[-\pi, 0]$  und  $[0, \pi]$  einschließt, gleich groß, und die eine Fläche liegt unterhalb, die andere oberhalb der  $x$ -Achse. Da das Integral über  $[-\pi, 0]$  bis auf das Vorzeichen den Flächeninhalt und das Integral über  $[0, \pi]$  den Flächeninhalt angibt, hat ihre Summe dann den Wert 0.

Dieses Ergebnis erhält man natürlich auch durch die folgende Rechnung:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_{-\pi}^{\pi} = -\cos \pi + \cos(-\pi) = 1 - 1 = 0.$$

### Aufgabe 3

Wir berechnen die  $x$ -Werte der Schnittpunkte der Graphen der beiden Funktionen:

$$f(x) = g(x) \iff x^2 + 3x + 1 = 2x + 3 \iff x^2 + x - 2 = 0 \iff x_1 = -2, x_2 = 1.$$

Die Fläche wird also von den Graphen von  $f$  und  $g$  über dem Intervall  $[-2, 1]$  begrenzt. Da  $g(0) = 3 > 1 = f(0)$  ist, gilt  $g(x) \geq f(x)$  für alle  $x \in [-2, 1]$ . Der Flächeninhalt der Fläche ist daher die Differenz des Flächeninhalts der Fläche zu  $g$  und des Flächeninhalts der Fläche zu  $f$  über dem Intervall  $[-2, 1]$ .

$$\begin{aligned} F &= \int_{-2}^1 [g(x) - f(x)] \, dx = \int_{-2}^1 (2x + 3 - x^2 - 3x - 1) \, dx = \int_{-2}^1 (-x^2 - x + 2) \, dx \\ &= -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x \Big|_{-2}^1 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{8}{3} + 2 + 4 = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

## Abschnitt 8.4

### Aufgabe 1

$$(a) \quad f(x) = \ln(1 + x^2) \implies f'(x) = \frac{2x}{1 + x^2},$$

$$(b) \quad f(x) = \ln \sqrt{1 + x^2} = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) \implies f'(x) = \frac{x}{1 + x^2},$$

$$(c) \quad f(x) = \ln \frac{1}{x} = -\ln x \implies f'(x) = -\frac{1}{x},$$

$$(d) \quad f(x) = \ln \sqrt{x^3} = \frac{3}{2} \ln x \implies f'(x) = \frac{3}{2x},$$

$$(e) \quad f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \implies f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}},$$

$$(f) \quad f(x) = \ln(x\sqrt{1 + x^2}) = \ln x + \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$$

$$\implies f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{1 + x^2} = \frac{2x^2 + 1}{x(1 + x^2)},$$

$$(g) \quad f(x) = \ln((\ln x)^2) = 2 \ln \ln x \implies f'(x) = \frac{2}{x \ln x},$$

$$(h) \quad f(x) = \ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{1}{2} (\ln(x+1) - \ln(x-1))$$

$$\implies f'(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \right) = -\frac{1}{x^2-1},$$

$$(i) \quad f(x) = \ln(\cos^2 x) = 2 \ln(\cos x) \implies f'(x) = -\frac{2 \sin x}{\cos x} = -2 \tan x.$$

## Aufgabe 2

Wir benutzen jeweils die Regeln für das Rechnen mit Grenzwerten (Satz 5.3.1) und die Regel von de l'Hospital (Satz 6.4.2).

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\cot x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = - \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin^2 x}{x} = - \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{2 \sin x \cos x}{1} = 0,$$

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x (\cosh x - 1)}{x \ln(1+x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} e^x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{2x \ln(1+x)} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x}{\frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2}} = \frac{1}{4},$$

$$(c) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x}{\sinh^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + 2x \cos 2x}{2 \sinh x \cosh x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cosh x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + 2x \cos 2x}{\sinh x}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cos 2x - 4x \sin 2x}{\cosh x} = \frac{4}{2} = 2.$$

## Aufgabe 3

(a) Mit partieller Integration folgt

$$\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C = x (\ln x - 1) + C.$$

(b) Mit der Substitution  $u = \ln x$ ,  $du = \frac{1}{x} dx$  folgt

$$\int \frac{\ln x}{x} \, dx = \int u \, du = \frac{1}{2} u^2 + C = \frac{1}{2} \ln^2 x + C.$$

(c) Mit partieller Integration folgt

$$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 \, dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + C$$

$$= \frac{1}{9} x^3 (3 \ln x - 1) + C.$$

#### Aufgabe 4

- (a)  $\int \frac{dx}{x+1} = \ln|x+1| + C,$
- (b)  $\int \frac{dx}{1-x} = -\ln|1-x| + C,$
- (c)  $\int \frac{dx}{2x+5} = \frac{1}{2} \ln|2x+5| + C,$
- (d)  $\int \frac{dx}{5-3x} = -\frac{1}{3} \ln|5-3x| + C,$
- (e)  $\int \frac{\cos x}{1+\sin x} dx = \ln|1+\sin x| + C,$
- (f)  $\int \frac{dx}{x \ln x} = \ln|\ln x| + C,$
- (g)  $\int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C,$
- (h)  $\int \frac{6x-5}{3x^2-5x} dx = \ln|3x^2-5x| + C.$

#### Aufgabe 5

- (a)  $\frac{1}{x^3 e^{-x}} (3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x}) = \frac{3}{x} - 1,$
- (b)  $-\frac{1}{x^2} e^{1/x},$
- (c)  $\frac{1}{2\sqrt{x-1}} e^{\sqrt{x-1}},$
- (d)  $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \tanh x,$
- (e)  $-2xe^{1-x^2}.$

#### Aufgabe 6

- (a)  $\int e^{-x} dx = -e^{-x} + C,$
- (b)  $\int e^{2-x} dx = -e^{2-x} + C,$

$$(c) \quad \int e^{2x+1} dx = \frac{1}{2} e^{2x+1} + C.$$

### Aufgabe 7

(a) Mit zweimaliger partieller Integration folgt:

$$\begin{aligned} \int e^{3x} \sin 2x dx &= \frac{1}{3} e^{3x} \sin 2x - \frac{2}{3} \int e^{3x} \cos 2x dx \\ &= \frac{1}{3} e^{3x} \sin 2x - \frac{2}{3} \left( \frac{1}{3} e^{3x} \cos 2x + \frac{2}{3} \int e^{3x} \sin 2x dx \right) \\ &= \frac{1}{3} e^{3x} \sin 2x - \frac{2}{9} e^{3x} \cos 2x - \frac{4}{9} \int e^{3x} \sin 2x dx. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\int e^{3x} \sin 2x dx = \frac{1}{13} e^{3x} (3 \sin 2x - 2 \cos 2x) + C.$$

(b) Eine entsprechende Rechnung wie in Aufgabe (a) ergibt:

$$\int e^{-x} \cos 2x dx = \frac{1}{5} e^{-x} (2 \sin 2x - \cos 2x) + C.$$

(c) Hier steht im Zähler des Integranden die Ableitung des Nenners. Also ergibt sich nach Satz 8.4.3:

$$\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \ln(e^x + 1) + C.$$

(d) Mit der Substitution  $u = -x^2$ ,  $du = -2x dx$  folgt:

$$\int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int e^u du = -\frac{1}{2} e^u + C = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C.$$

(e) Mit der Substitution  $u = \sqrt{x}$ ,  $x = u^2$ ,  $dx = 2u du$  und anschließender partieller Integration folgt:

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int u e^u du = 2 \left( u e^u - \int e^u du \right) = 2(u e^u - e^u) = 2e^{\sqrt{x}} (\sqrt{x} - 1).$$

### Aufgabe 8

$$(a) \quad \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \cosh \sqrt{x^2 - 1},$$

$$(b) \quad -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 - x^4}} = -\frac{1}{|x|\sqrt{1 - x^2}},$$

$$(c) \quad \frac{1}{\sqrt{1 + (x^2 - 1)}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x}{|x|\sqrt{x^2 - 1}},$$

$$(d) \quad \frac{3}{\cosh(3x+1)} \sinh(3x+1) = 3 \tanh(3x+1),$$

$$(e) \quad (1 + \tan^2(\operatorname{artanh} \sqrt{x})) \frac{1}{1-x} \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

### Aufgabe 9

(a) Es gilt für  $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dx} \cosh^2 x = 2 \cosh x \sinh x \quad \text{und} \quad \frac{d}{dx} \sinh^2 x = 2 \cosh x \sinh x.$$

Da beide Funktionen dieselbe Ableitung haben, unterscheiden sie sich nach Satz 8.1.1 nur um eine additive Konstante  $C$ , es gilt also:

$$\cosh^2 x = \sinh^2 x + C \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Für  $x = 0$  folgt wegen  $\cosh 0 = 1$  und  $\sinh 0 = 0$  dann  $C = 1$ . Hieraus folgt die Behauptung.

(b) Es gilt für  $x > 1$  (man beachte, dass dann  $|x| = x$ )

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arsinh} \sqrt{x^2 - 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + (x^2 - 1)}} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x}{|x|\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

und

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arcosh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Wie in Teil (a) folgt:  $\operatorname{arsinh} \sqrt{x^2 - 1} = \operatorname{arcosh} x + C$  für alle  $x > 1$ .

Wegen  $\lim_{x \rightarrow 1+} \operatorname{arsinh} \sqrt{x^2 - 1} = 0$  und  $\lim_{x \rightarrow 1+} \operatorname{arcosh} x = 0$  ist  $C = 0$ , woraus die Behauptung folgt.

## Abschnitt 8.5

### Aufgabe 1

(a) Mit der Regel von de l'Hospital (Satz 6.4.2) folgt

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} (-x) = 0.$$

Damit ergibt sich, weil  $x^x = e^{x \ln x}$  (Definition 8.5.4) gilt:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0+} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x} = e^0 = 1.$$

(b) Mit der Regel von de l'Hospital folgt für  $b > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (x^b \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{x^{-b}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-bx^{-b-1}} = - \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^b}{b} = 0.$$

Für  $b \leq 0$  gilt  $\lim_{x \rightarrow 0+} (x^b \ln x) = -\infty$ .

(c) Mit der Regel von de l'Hospital folgt für  $b > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (x^b \log_a x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\log_a x}{x^{-b}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x \ln a}}{-b x^{-b-1}} = - \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^b}{b \ln a} = 0.$$

Für  $b \leq 0$  gilt  $\lim_{x \rightarrow 0+} (x^b \log_a x) = -\infty$ .

## Aufgabe 2

(a) Nach Definition 8.5.1 gilt, weil  $\log_a x$  und  $a^x$  Umkehrfunktionen voneinander sind:

$$x = e^{\ln x} = e^{\frac{\ln x}{\ln a} \ln a} = a^{\frac{\ln x}{\ln a}} \implies \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Daraus folgt nach 8.4, Aufgabe 3 (a)

$$\int \log_a x \, dx = \frac{1}{\ln a} \int \ln x \, dx = \frac{x(\ln x - 1)}{\ln a} + C.$$

(b) Mit partieller Integration folgt für  $b \neq 0$

$$\begin{aligned} \int x^{b-1} \ln x \, dx &= \frac{1}{b} x^b \ln x - \frac{1}{b} \int x^{b-1} \, dx = \frac{1}{b} x^b \ln x - \frac{1}{b^2} x^b + C \\ &= \frac{x^b(b \ln x - 1)}{b^2} + C \end{aligned}$$

und daher (wie in Aufgabe (a))

$$\int x^{b-1} \log_a x \, dx = \frac{1}{\ln a} \int x^{b-1} \ln x \, dx = \frac{x^b(b \ln x - 1)}{b^2 \ln a} + C.$$

Wie in Aufgabe (a) und nach 8.4, Aufgabe 3 (b) gilt für  $b = 0$

$$\int \frac{1}{x} \log_a x \, dx = \frac{1}{\ln a} \int \frac{1}{x} \ln x \, dx = \frac{\ln^2 x}{2 \ln a} + C.$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad \int (2^x + 3^x) \, dx &= \int (e^{x \ln 2} + e^{x \ln 3}) \, dx = \frac{1}{\ln 2} e^{x \ln 2} + \frac{1}{\ln 3} e^{x \ln 3} + C \\ &= \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{3^x}{\ln 3} + C. \end{aligned}$$

$$\text{(d)} \quad \int 2^x \cdot 3^x \, dx = \int 6^x \, dx = \frac{6^x}{\ln 6} + C.$$

## Aufgabe 3

$$\text{(a)} \quad \int_1^2 \log_2 x \, dx = \left. \frac{x(\ln x - 1)}{\ln 2} \right|_1^2 = \frac{2(\ln 2 - 1)}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 2} = \frac{2 \ln 2 - 1}{\ln 2} \quad (\text{Vgl. Aufgabe 2 (a)}).$$

$$\text{(b)} \quad \int_0^1 2^x \, dx = \left. \frac{2^x}{\ln 2} \right|_0^1 = \frac{2 - 1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \quad (\text{Vgl. Aufgabe 2 (c)}).$$

## Abschnitt 8.6

### Aufgabe 1

- (a)  $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{dx}{1+x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \arctan x \Big|_0^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \arctan t = \frac{\pi}{2}.$
- (b)  $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t x^{-3/2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} (-2x^{-1/2}) \Big|_1^t = -2 \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{t}} - 1 \right) = 2.$
- (c)  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^3}} = \lim_{t \rightarrow 0+} \int_t^1 x^{-3/2} dx = \lim_{t \rightarrow 0+} (-2x^{-1/2}) \Big|_t^1 = -2 \lim_{t \rightarrow 0+} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) = \infty.$
- (d)  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t \rightarrow 1} \int_{-t}^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t \rightarrow 1} \arcsin x \Big|_{-t}^t$   
 $= \lim_{t \rightarrow 1} (\arcsin t - \arcsin(-t)) = \frac{\pi}{2} - \left( -\frac{\pi}{2} \right) = \pi.$

Die uneigentlichen Integrale in den Aufgaben (a), (b), (d) sind also konvergent, das uneigentliche Integral in Aufgabe (c) ist divergent (Definition 8.6.1).

### Aufgabe 2

- (a) Durch mehrfache Anwendung der Regel von de l'Hospital (Satz 6.4.2) folgt für  $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (t^k e^{-t}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^k}{e^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{kt^{k-1}}{e^t} = \dots = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{k(k-1) \dots 2 \cdot 1}{e^t} = 0.$$

Damit ergibt sich durch partielle Integration

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^2 e^{-x} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x^2 e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( -x^2 e^{-x} \Big|_0^t + 2 \int_0^t x e^{-x} dx \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left( -t^2 e^{-t} - 2x e^{-x} \Big|_0^t + 2 \int_0^t e^{-x} dx \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left( -t^2 e^{-t} - 2t e^{-t} - 2e^{-x} \Big|_0^t \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} (-t^2 e^{-t} - 2t e^{-t} - 2e^{-t} + 2) = 2. \end{aligned}$$

- (b) Mit der Regel von de l'Hospital folgt für  $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (x^k \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{x^{-k}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-kx^{-k-1}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^k}{-k} = 0.$$

Damit ergibt sich durch partielle Integration für  $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 x^n \ln x \, dx &= \lim_{t \rightarrow 0+} \int_t^1 x^n \ln x \, dx \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0+} \left( \frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln x \Big|_t^1 - \frac{1}{n+1} \int_t^1 x^n \, dx \right) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0+} \left( -\frac{1}{n+1} t^{n+1} \ln t - \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1} \Big|_t^1 \right) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0+} \left( -\frac{1}{n+1} t^{n+1} \ln t - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} t^{n+1} \right) \\
 &= -\frac{1}{(n+1)^2}.
 \end{aligned}$$

(c) Es gilt  $\lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-t} \cos at) = 0$ , denn

$$|e^{-t} \cos at - 0| = |e^{-t} \cos at| = e^{-t} |\cos at| \leq e^{-t} = \frac{1}{e^t} < \varepsilon \text{ für alle } t > \ln \frac{1}{\varepsilon}.$$

Entsprechend folgt  $\lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-t} \sin at) = 0$ .

Hiermit ergibt sich nach 8.4, Aufgabe 7 (b)

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty e^{-x} \cos 2x \, dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-x} \cos 2x \, dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{5} e^{-x} (2 \sin 2x - \cos 2x) \right) \Big|_0^t \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{5} e^{-t} (2 \sin 2t - \cos 2t) + \frac{1}{5} \right) \\
 &= \frac{2}{5} \lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-t} \sin 2t) - \frac{1}{5} \lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-t} \cos 2t) + \frac{1}{5} = \frac{1}{5}.
 \end{aligned}$$

## Abschnitt 8.7

### Aufgabe 1

$$(a) \quad \int \frac{x+3}{(x+3)^2+1} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{2(x+3)}{(x+3)^2+1} \, dx = \frac{1}{2} \ln((x+3)^2+1) + C,$$

$$(b) \quad \int \frac{2}{(x+3)^2+1} \, dx = 2 \arctan(x+3) + C,$$

$$(c) \quad \int \frac{3x}{x^2+9} \, dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^2+9} \, dx = \frac{3}{2} \ln(x^2+9) + C,$$

$$(d) \quad \int \frac{x}{(x+3)^2+1} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{2(x+3)}{(x+3)^2+1} \, dx - \int \frac{3}{(x+3)^2+1} \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln((x+3)^2 + 1) - 3 \arctan(x+3) + C,$$

$$\begin{aligned} \text{(e)} \quad \int \frac{3x+1}{x^2+9} dx &= \frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^2+9} dx + \frac{1}{9} \int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} dx \\ &= \frac{3}{2} \ln(x^2+9) + \frac{1}{3} \arctan \frac{x}{3} + C, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(f)} \quad \int \frac{x+3}{x^2-4x+8} dx &= \int \frac{x+3}{(x-2)^2+4} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2(x-2)}{(x-2)^2+4} dx + \int \frac{5}{4+(x-2)^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2(x-2)}{(x-2)^2+4} dx + \frac{5}{4} \int \frac{1}{1+\left(\frac{x-2}{2}\right)^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln((x-2)^2+4) + \frac{5}{2} \arctan \frac{x-2}{2} + C. \end{aligned}$$

## Aufgabe 2

(a) Ansatz:

$$\frac{5x-2}{(x-1)(x+2)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+2}$$

Wir multiplizieren mit dem Hauptnenner  $(x-1)(x+2)$  und sortieren nach Potenzen von  $x$ :

$$5x-2 = A_1(x+2) + A_2(x-1) = (A_1+A_2)x + (2A_1-A_2).$$

Koeffizientenvergleich ergibt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 5, \\ 2A_1 - A_2 &= -2. \end{aligned}$$

Als Lösung ergibt sich  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = 4$ .

Damit lautet die Partialbruchzerlegung der gegebenen Funktion:

$$\frac{5x-2}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x+2}.$$

Bestimmung des Integrals:

$$\begin{aligned} \int \frac{5x-2}{(x-1)(x+2)} dx &= \int \frac{dx}{x-1} + 4 \int \frac{dx}{x+2} \\ &= \ln|x-1| + 4 \ln|x+2| + C = \ln(|x-1||x+2|^4) + C. \end{aligned}$$

(b) Ansatz:

$$\frac{3}{(x-1)(x+2)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+2}$$

Wir multiplizieren mit dem Hauptnenner  $(x-1)(x+2)$  und sortieren nach Potenzen von  $x$ :

$$3 = A_1(x+2) + A_2(x-1) = (A_1 + A_2)x + (2A_1 - A_2).$$

Koeffizientenvergleich ergibt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 0, \\ 2A_1 - A_2 &= 3. \end{aligned}$$

Als Lösung ergibt sich  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = -1$ .

Damit lautet die Partialbruchzerlegung der gegebenen Funktion:

$$\frac{3}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}.$$

Bestimmung des Integrals:

$$\begin{aligned} \int \frac{3}{(x-1)(x+2)} dx &= \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+2} \\ &= \ln|x-1| - \ln|x+2| + C = \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C. \end{aligned}$$

(c) Ansatz:

$$\frac{5x^2 - 3x + 12}{(x-2)(x^2 + 2x + 5)} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2x + A_3}{x^2 + 2x + 5}$$

Wir multiplizieren mit dem Hauptnenner  $(x-2)(x^2 + 2x + 5)$  und sortieren nach Potenzen von  $x$ :

$$\begin{aligned} 5x^2 - 3x + 12 &= A_1(x^2 + 2x + 5) + (A_2x + A_3)(x-2) \\ &= (A_1 + A_2)x^2 + (2A_1 - 2A_2 + A_3)x + (5A_1 - 2A_3). \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 5 \\ 2A_1 - 2A_2 + A_3 &= -3 \\ 5A_1 - 2A_3 &= 12 \end{aligned}$$

Mit dem Gaußschen Algorithmus ergibt sich die Lösung  $A_1 = 2$ ,  $A_2 = 3$ ,  $A_3 = -1$ .

Damit lautet die Partialbruchzerlegung der gegebenen Funktion:

$$\frac{5x^2 - 3x + 12}{(x-2)(x^2 + 2x + 5)} = \frac{2}{x-2} + \frac{3x-1}{x^2 + 2x + 5}.$$

Bestimmung des Integrals:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{5x^2 - 3x + 12}{(x-2)(x^2 + 2x + 5)} dx &= 2 \int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{3x-1}{(x+1)^2 + 4} dx \\
 &= 2 \ln |x-2| + \frac{3}{2} \int \frac{2(x+1)}{(x+1)^2 + 4} dx - 4 \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 4} \\
 &= 2 \ln |x-2| + \frac{3}{2} \ln ((x+1)^2 + 4) - \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x+1}{2}\right)^2} \\
 &= 2 \ln |x-2| + \frac{3}{2} \ln ((x+1)^2 + 4) - 2 \arctan \frac{x+1}{2} + C.
 \end{aligned}$$

(d) Ansatz:

$$\frac{2x^2 - 5x}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x+2}$$

Wir multiplizieren mit dem Hauptnenner  $(x-1)^2(x+2)$  und sortieren nach Potenzen von  $x$ :

$$\begin{aligned}
 2x^2 - 5x &= A_1(x-1)(x+2) + A_2(x+2) + A_3(x-1)^2 \\
 &= (A_1 + A_3)x^2 + (A_1 + A_2 - 2A_3)x + (-2A_1 + 2A_2 + A_3).
 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
 A_1 & & & + & A_3 & = & 2 \\
 A_1 & + & & A_2 & - & 2A_3 & = & -5 \\
 -2A_1 & + & 2A_2 & + & A_3 & = & 0
 \end{array}$$

Mit dem Gaußschen Algorithmus ergibt sich die Lösung  $A_1 = 0$ ,  $A_2 = -1$ ,  $A_3 = 2$ .

Damit lautet die Partialbruchzerlegung der gegebenen Funktion:

$$\frac{2x^2 - 5x}{(x-1)^2(x+2)} = -\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x+2}$$

Bestimmung des Integrals:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{2x^2 - 5x}{(x-1)^2(x+2)} dx &= - \int \frac{dx}{(x-1)^2} + 2 \int \frac{dx}{x+2} \\
 &= \frac{1}{x-1} + 2 \ln |x+2| + C.
 \end{aligned}$$

## Abschnitt 8.8

### Aufgabe 1

- (a) Mit der Darstellung  $\mathbb{B} = \{ (x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, |x| \leq y \leq 1 \}$  ist  $\mathbb{B}$  ein Normalbereich bezüglich  $y$ , und es folgt daher

$$\iint_{\mathbb{B}} x^2 y \, d(x, y) = \int_{-1}^1 \int_{|x|}^1 x^2 y \, dy \, dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} x^2 y^2 \Big|_{|x|}^1 \, dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2(1-x^2) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x^2 - x^4) dx \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{5} x^5 \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{2}{15}.
\end{aligned}$$

Mit der Darstellung  $\mathbb{B} = \{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, -y \leq x \leq y \}$  ist  $\mathbb{B}$  ein Normalbereich bezüglich  $x$ , und es folgt

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{B}} x^2 y d(x, y) &= \int_0^1 \int_{-y}^y x^2 y dx dy = \int_0^1 \frac{1}{3} x^3 y \Big|_{-y}^y dy \\
&= \frac{1}{3} \int_0^1 (y^3 + y^3) y dy = \frac{2}{3} \int_0^1 y^4 dy = \frac{2}{15} y^5 \Big|_0^1 = \frac{2}{15}.
\end{aligned}$$

- (b) Wir benutzen die Darstellung von  $\mathbb{B}$  als Normalbereich bezüglich  $x$ , so dass wir das Bereichsintegral umwandeln können in ein Doppelintegral, bei dem zuerst nach  $x$  integriert wird. Würden wir die Charakterisierung von  $\mathbb{B}$  als Normalbereich bezüglich  $y$  verwenden, erhielten wir ein Doppelintegral, bei dem zuerst nach  $y$  zu integrieren wäre. Diese Integration ließe sich praktisch gar nicht durchführen.

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{B}} e^{-y^2} d(x, y) &= \int_0^1 \int_{-y}^y e^{-y^2} dx dy = \int_0^1 e^{-y^2} x \Big|_{-y}^y dy \\
&= \int_0^1 2ye^{-y^2} dy = -e^{-y^2} \Big|_0^1 = -(e^{-1} - e^0) = 1 - \frac{1}{e}.
\end{aligned}$$

## Aufgabe 2

Der räumliche Bereich  $\mathbb{K}$  lässt sich wie folgt als Normalbereich darstellen:

$$\mathbb{K} = \{ (x, y, z) \mid 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3-x, 0 \leq z \leq 3-x-y \}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\iiint_{\mathbb{K}} x d(x, y, z) &= \int_1^2 \int_0^{3-x} \int_0^{3-x-y} x dz dy dx = \int_1^2 \int_0^{3-x} xz \Big|_0^{3-x-y} dy dx \\
&= \int_1^2 \int_0^{3-x} x(3-x-y) dy dx = \int_1^2 \int_0^{3-x} (3x - x^2 - xy) dy dx \\
&= \int_1^2 \left( (3x - x^2)y - \frac{1}{2} xy^2 \right) \Big|_0^{3-x} dx \\
&= \int_1^2 \left( x(3-x)^2 - \frac{1}{2} x(3-x)^2 \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_1^2 x(3-x)^2 dx = \frac{1}{2} \int_1^2 (9x - 6x^2 + x^3) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left( \frac{9}{2} x^2 - 2x^3 + \frac{1}{4} x^4 \right) \Big|_1^2 \\
&= \frac{1}{2} \left( 18 - 16 + 4 - \frac{9}{2} + 2 - \frac{1}{4} \right) = \frac{13}{8}.
\end{aligned}$$

### Aufgabe 3

Der gegebene Körper  $\mathbb{K}$  lässt sich wie folgt als Normalbereich darstellen:

$$\mathbb{K} = \left\{ (x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, \frac{1}{x} \leq y \leq x, 0 \leq z \leq \frac{x^2}{y^2} \right\}.$$

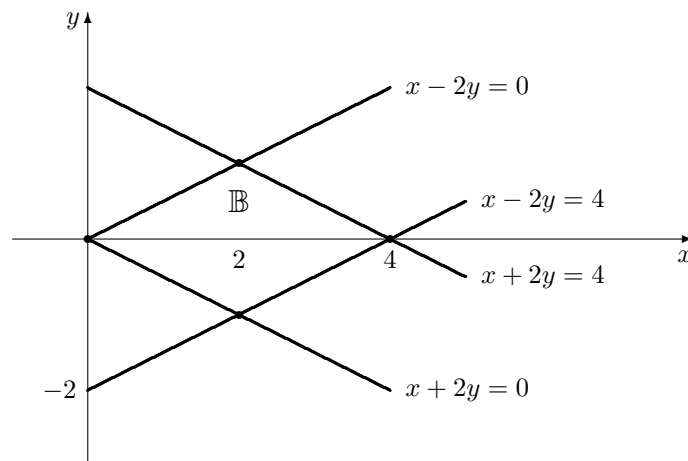
Daher ist das Volumen gegeben durch

$$\begin{aligned}
\iiint_{\mathbb{K}} d(x, y, z) &= \int_1^2 \int_{1/x}^x \int_0^{x^2/y^2} dz \, dy \, dx = \int_1^2 \int_{1/x}^x z \Big|_0^{x^2/y^2} dy \, dx \\
&= \int_1^2 \int_{1/x}^x \frac{x^2}{y^2} dy \, dx = \int_1^2 \left( -\frac{x^2}{y} \right) \Big|_{1/x}^x dx = \int_1^2 (x^3 - x) dx \\
&= \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{2} x^2 \Big|_1^2 = 4 - 2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{9}{4}.
\end{aligned}$$

## Abschnitt 8.9

### Aufgabe 1

(a) Skizze des Bereichs  $\mathbb{B}$ :



(b) Zur Berechnung des Bereichsintegrals führen wir neue Koordinaten  $u, v$  ein durch

$$\begin{aligned}
u &= x - 2y, \\
v &= x + 2y.
\end{aligned}$$

Diese beiden linearen Gleichungen nach  $x$  und  $y$  aufgelöst ergibt

$$x = \frac{1}{2}(v + u),$$

$$y = \frac{1}{4}(v - u).$$

Dem Bereich  $\mathbb{B}$  entspricht dann der Bereich

$$\mathbb{B}^* = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq 4, 0 \leq v \leq 4\}.$$

Berechnung der Funktionaldeterminante:

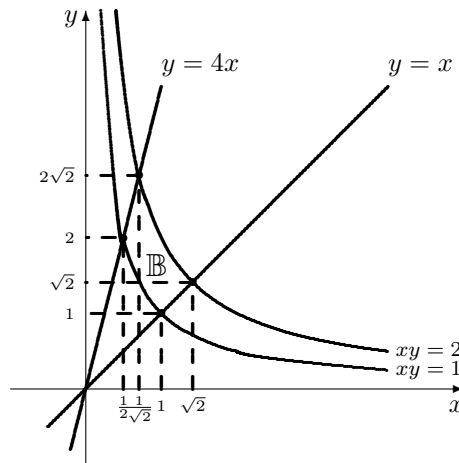
$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = \frac{1}{4}$$

Nun folgt mit Satz 8.9.3:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{B}} 3y^2 d(x, y) &= \iint_{\mathbb{B}^*} \frac{3}{16} (v - u)^2 \cdot \frac{1}{4} d(u, v) = \frac{3}{64} \int_0^4 \int_0^4 (v - u)^2 dv du \\ &= \frac{1}{64} \int_0^4 (v - u)^3 \Big|_0^4 du = \frac{1}{64} \int_0^4 ((4 - u)^3 + u^3) du \\ &= \frac{1}{256} (u^4 - (4 - u)^4) \Big|_0^4 = \frac{1}{256} (4^4 + 4^4) = 2. \end{aligned}$$

## Aufgabe 2

Skizze des Bereichs  $\mathbb{B}$ :



Wir berechnen die Koordinaten der Schnittpunkte der Kurven im ersten Quadranten (es interessieren dann nur die positiven Werte der Koordinaten):

$$xy = 1 \text{ und } y = 4x \implies 4x^2 = 1 \text{ und } y = 4x \implies x = \frac{1}{2}, y = 2;$$

$$xy = 2 \text{ und } y = 4x \implies 4x^2 = 2 \text{ und } y = 4x \implies x = \frac{1}{\sqrt{2}}, y = 2\sqrt{2};$$

$$xy = 1 \text{ und } y = x \implies x^2 = 1 \text{ und } y = x \implies x = 1, y = 1;$$

$$xy = 2 \text{ und } y = x \implies x^2 = 2 \text{ und } y = x \implies x = \sqrt{2}, y = \sqrt{2}.$$

(a) Berechnung des Bereichsintegrals durch Umwandlung in ein zweifaches Integral:

1. Möglichkeit: Der Bereich  $\mathbb{B}$  kann in die folgenden drei Normalbereiche bzgl.  $y$  zerlegt werden:

$$\mathbb{B}_1 = \left\{ (x, y) \left| \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{x} \leq y \leq 4x \right. \right\},$$

$$\mathbb{B}_2 = \left\{ (x, y) \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1, \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{2}{x} \right. \right\},$$

$$\mathbb{B}_3 = \left\{ (x, y) \left| 1 \leq x \leq \sqrt{2}, x \leq y \leq \frac{2}{x} \right. \right\}.$$

Berechnung der einzelnen Bereichsintegrale:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{B}_1} x^2 y^2 d(x, y) &= \int_{1/2}^{1/\sqrt{2}} \int_{1/x}^{4x} x^2 y^2 dy dx = \frac{1}{3} \int_{1/2}^{1/\sqrt{2}} x^2 y^3 \Big|_{1/x}^{4x} dx \\ &= \frac{1}{3} \int_{1/2}^{1/\sqrt{2}} \left( 64x^5 - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{1}{3} \left( \frac{32}{3} x^6 - \ln x \right) \Big|_{1/2}^{1/\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{3} \left( \frac{4}{3} - \frac{1}{6} - \ln \frac{1}{\sqrt{2}} + \ln \frac{1}{2} \right) = \frac{7}{18} - \frac{1}{6} \ln 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{B}_2} x^2 y^2 d(x, y) &= \int_{1/\sqrt{2}}^1 \int_{1/x}^{2/x} x^2 y^2 dy dx = \frac{1}{3} \int_{1/\sqrt{2}}^1 x^2 y^3 \Big|_{1/x}^{2/x} dx \\ &= \frac{1}{3} \int_{1/\sqrt{2}}^1 \left( \frac{8}{x} - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{7}{3} \ln x \Big|_{1/\sqrt{2}}^1 = \frac{7}{6} \ln 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{B}_3} x^2 y^2 d(x, y) &= \int_1^{\sqrt{2}} \int_x^{2/x} x^2 y^2 dy dx = \frac{1}{3} \int_1^{\sqrt{2}} x^2 y^3 \Big|_x^{2/x} dx \\ &= \frac{1}{3} \int_1^{\sqrt{2}} \left( \frac{8}{x} - x^5 \right) dx = \frac{1}{3} \left( 8 \ln x - \frac{1}{6} x^6 \right) \Big|_1^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{3} \left( 4 \ln 2 - \frac{4}{3} + \frac{1}{6} \right) = \frac{4}{3} \ln 2 - \frac{7}{18}. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt also

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{B}} x^2 y^2 d(x, y) &= \iint_{\mathbb{B}_1} x^2 y^2 d(x, y) + \iint_{\mathbb{B}_2} x^2 y^2 d(x, y) + \iint_{\mathbb{B}_3} x^2 y^2 d(x, y) \\ &= \frac{7}{3} \ln 2. \end{aligned}$$

2. Möglichkeit: Der Bereich  $\mathbb{B}$  kann in die folgenden drei Normalbereiche bzgl.  $x$  zerlegt werden:

$$\mathbb{B}_1 = \left\{ (x, y) \mid 1 \leq y \leq \sqrt{2}, \frac{1}{y} \leq x \leq y \right\},$$

$$\mathbb{B}_2 = \left\{ (x, y) \mid \sqrt{2} \leq y \leq 2, \frac{1}{y} \leq x \leq \frac{2}{y} \right\},$$

$$\mathbb{B}_3 = \left\{ (x, y) \mid 2 \leq y \leq 2\sqrt{2}, \frac{y}{4} \leq x \leq \frac{2}{y} \right\}.$$

Berechnung der einzelnen Bereichsintegrale:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{B}_1} x^2 y^2 d(x, y) &= \int_1^{\sqrt{2}} \int_{1/y}^y x^2 y^2 dx dy = \frac{1}{3} \int_1^{\sqrt{2}} x^3 y^2 \Big|_{1/y}^y dy \\ &= \frac{1}{3} \int_1^{\sqrt{2}} \left( y^5 - \frac{1}{y} \right) dy = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{6} y^6 - \ln y \right) \Big|_1^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{3} \left( \frac{4}{3} - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{6} + \ln 1 \right) = \frac{7}{18} - \frac{1}{6} \ln 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{B}_2} x^2 y^2 d(x, y) &= \int_{\sqrt{2}}^2 \int_{1/y}^{2/y} x^2 y^2 dx dy = \frac{1}{3} \int_{\sqrt{2}}^2 x^3 y^2 \Big|_{1/y}^{2/y} dy \\ &= \frac{1}{3} \int_{\sqrt{2}}^2 \left( \frac{8}{y} - \frac{1}{y} \right) dy = \frac{7}{3} \ln y \Big|_{\sqrt{2}}^2 = \frac{7}{6} \ln 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{B}_3} x^2 y^2 d(x, y) &= \int_2^{2\sqrt{2}} \int_{y/4}^{2/y} x^2 y^2 dx dy = \frac{1}{3} \int_2^{2\sqrt{2}} x^3 y^2 \Big|_{y/4}^{2/y} dy \\ &= \frac{1}{3} \int_2^{2\sqrt{2}} \left( \frac{8}{y} - \frac{1}{64} y^5 \right) dy = \frac{1}{3} \left( 8 \ln y - \frac{1}{3 \cdot 2^7} y^6 \right) \Big|_2^{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{3} \left( 12 \ln 2 - \frac{2^9}{3 \cdot 2^7} - 8 \ln 2 + \frac{2^6}{3 \cdot 2^7} \right) = \frac{4}{3} \ln 2 - \frac{7}{18} \end{aligned}$$

Insgesamt folgt also wie vorher

$$\iint_{\mathbb{B}} x^2 y^2 d(x, y) = \frac{7}{3} \ln 2.$$

- (b) Berechnung des Bereichsintegrals durch Transformation auf neue Koordinaten  $u, v$  mit  $u = xy, v = \frac{y}{x}$ :

Dem Bereich  $\mathbb{B}$  entspricht dann der Bereich

$$\mathbb{B}^* = \{ (u, v) \mid 1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 4 \}.$$

Berechnung der Funktionaldeterminante:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = 2 \frac{y}{x} = 2v$$

Also gilt nach Bemerkung 8.9.4

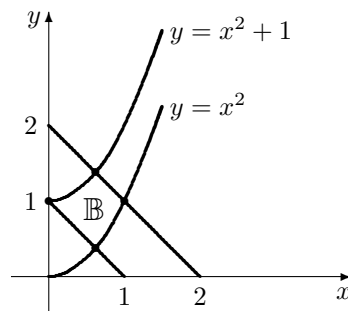
$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{2v}.$$

Nun folgt mit Satz 8.9.3:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{B}} x^2 y^2 d(x, y) &= \iint_{\mathbb{B}^*} u^2 \cdot \frac{1}{2v} d(u, v) = \int_1^4 \int_1^2 \frac{u^2}{2v} du dv = \frac{1}{2} \int_1^4 \frac{dv}{v} \cdot \int_1^2 u^2 du \\ &= \frac{1}{6} \ln v \Big|_1^4 \cdot u^3 \Big|_1^2 = \frac{7}{6} \ln 4 = \frac{7}{3} \ln 2. \end{aligned}$$

### Aufgabe 3

Skizze des Bereichs  $\mathbb{B}$ :



Berechnung des Bereichsintegrals durch Transformation auf neue Koordinaten  $u, v$  mit  $u = x + y, v = y - x^2$ :

Dem Bereich  $\mathbb{B}$  entspricht dann der Bereich

$$\mathbb{B}^* = \{ (u, v) \mid 1 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 1 \}.$$

Berechnung der Funktionaldeterminante:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2x & 1 \end{vmatrix} = 2x + 1$$

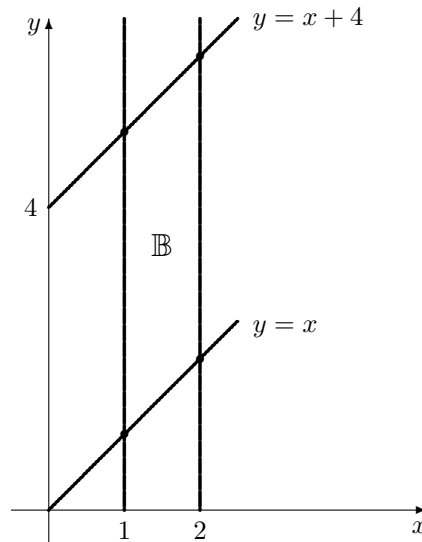
Wir bemerken, dass dieser Term gerade der Zähler des Integranden ist. Daher folgt mit Satz 8.9.3:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{B}} \frac{2x + 1}{(y + x) + (y - x^2)} d(x, y) &= \iint_{\mathbb{B}^*} \frac{1}{u + v} d(u, v) = \int_1^2 \int_0^1 \frac{1}{u + v} dv du \\ &= \int_1^2 \ln(u + v) \Big|_0^1 du = \int_1^2 (\ln(u + 1) - \ln u) dv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (u+1) \ln(u+1) - (u+1) - u \ln u + u \Big|_1^2 \\
&= 3 \ln 3 - 3 - 2 \ln 2 + 2 - 2 \ln 2 + 2 - 1 \\
&= 3 \ln 3 - 4 \ln 2 = \ln 27 - \ln 16 = \ln \frac{27}{16}.
\end{aligned}$$

## Aufgabe 4

Skizze des Bereichs  $\mathbb{B}$ :



Berechnung des Bereichsintegrals durch Transformation auf neue Koordinaten  $u, v$  mit  $u = y, v = y - x$ :

Dem Bereich  $\mathbb{B}$  entspricht dann der Bereich

$$\mathbb{B}^* = \{ (u, v) \mid 1 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 4 \}.$$

Berechnung der Funktionaldeterminante:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Damit folgt aus Satz 8.9.3:

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{B}} y e^{y(y-x)} d(x, y) &= \iint_{\mathbb{B}^*} u e^{uv} d(u, v) = \int_1^2 \int_0^4 u e^{uv} dv du = \int_1^2 e^{uv} \Big|_0^4 du \\
&= \int_1^2 (e^{4u} - 1) du = \left( \frac{1}{4} e^{4u} - u \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{4} (e^8 - e^4) - 1.
\end{aligned}$$

## Abschnitt 8.10

### Aufgabe 1

(a) Es gilt

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = \begin{pmatrix} \cos t \sin t \\ 2t \sin t \\ 2t \cos t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 2 \end{pmatrix}$$

und daher folgt

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-\cos t \sin^2 t + 2t \sin t \cos t + 4t \cos t) dt \\
&= -\int_0^{2\pi} \cos t \sin^2 t dt + \int_0^{2\pi} t \sin 2t dt + 4 \int_0^{2\pi} t \cos t dt.
\end{aligned}$$

Berechnung der einzelnen Integrale:

$$\int_0^{2\pi} \cos t \sin^2 t dt = \frac{1}{3} \sin^3 t \Big|_0^{2\pi} = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} t \sin 2t dt = -\frac{1}{2} t \cos 2t \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2t dt = -\pi + \frac{1}{4} \sin 2t \Big|_0^{2\pi} = -\pi,$$

$$\int_0^{2\pi} t \cos t dt = t \sin t \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin t dt = \cos t \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Damit folgt insgesamt:

$$\int_{\gamma} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = 0 - \pi + 0 = -\pi.$$

(b) Eine Parameterdarstellung von  $\gamma$  ist gegeben durch

$$\mathbf{x}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 - t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t) = t^3 + 2t^3 - 2t^2 = 3t^3 - 2t^2.$$

Also ergibt sich:

$$\int_{\gamma} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_0^1 (3t^3 - 2t^2) dt = \frac{3}{4} t^4 - \frac{2}{3} t^3 \Big|_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}.$$

(c) Eine Parameterdarstellung von  $-\gamma$  ist gegeben durch:

$$\mathbf{x}: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ 2 \sin t \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = \begin{pmatrix} 2 \cos t e^{2 \cos t} \\ 2 \sin t e^{2 \sin t} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} -2 \sin t \\ 2 \cos t \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t) = -4 \sin t \cos t e^{2 \cos t} + 4 \sin t \cos t e^{2 \sin t}.$$

Bei der Berechnung der Integrale dieser beiden Summanden benutzen wir die Substitutionen

$$u = 2 \cos t, \quad du = -2 \sin t \, dt \quad \text{bzw.} \quad u = 2 \sin t, \quad du = 2 \cos t \, dt.$$

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} &= - \int_{-\gamma} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \\ &= - \left( -4 \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t e^{2 \cos t} \, dt + 4 \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t e^{2 \sin t} \, dt \right) \\ &= - \int_2^0 u e^u \, du - \int_0^2 u e^u \, du = \int_0^2 u e^u \, du - \int_0^2 u e^u \, du = 0. \end{aligned}$$

## Aufgabe 2

Wir berechnen zuerst das Kurvenintegral über  $\gamma_1$ .

Parameterdarstellung von  $\gamma_1$ :

$$\mathbf{x}_1: [-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{x}_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_1(t)) = \begin{pmatrix} 2(t + t^2) \cos^2 t^2 \\ t \sin^2 t^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}'_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}_1(t)) \cdot \mathbf{x}'_1(t) &= 2(t + t^2) \cos^2 t^2 + 2t^2 \sin^2 t^2 \\ &= 2t \cos^2 t^2 + 2t^2 (\cos^2 t^2 + \sin^2 t^2) = 2t \cos^2 t^2 + 2t^2. \end{aligned}$$

Bei der Berechnung des Integrals verwenden wir für den ersten Summanden die Substitution  $u = t^2$ ,  $du = 2t \, dt$ . Da  $u(-\sqrt{\pi}) = u(\sqrt{\pi})$  ist, sind obere und untere Integrationsgrenze dann gleich, und das Integral hat den Wert 0. Also ergibt sich

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} 2t^2 \, dt = \frac{2}{3} t^3 \Big|_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} = \frac{2}{3} (\pi\sqrt{\pi} + \pi\sqrt{\pi}) = \frac{4}{3} \pi\sqrt{\pi}.$$

Nun berechnen wir das Kurvenintegral über  $\gamma_2$ .

Parameterdarstellung von  $\gamma_2$ :

$$\mathbf{x}_2: [-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{x}_2(t) = \begin{pmatrix} -t \\ \pi \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_2(t)) = \begin{pmatrix} 2(-t + \pi) \cos^2 \pi \\ -t \sin^2 \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t + 2\pi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}'_2(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

und

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_2(t)) \cdot \mathbf{x}'_2(t) = 2t - 2\pi.$$

Integration ergibt

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} &= \int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} (2t - 2\pi) dt = t^2 - 2\pi t \Big|_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} \\ &= \pi - 2\pi\sqrt{\pi} - \pi - 2\pi\sqrt{\pi} = -4\pi\sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Damit folgt schließlich:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{\gamma_1} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} + \int_{\gamma_2} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \frac{4}{3} \pi \sqrt{\pi} - 4\pi\sqrt{\pi} = -\frac{8}{3} \pi \sqrt{\pi}.$$

### Aufgabe 3

Parameterdarstellung der Strecke  $\gamma_1$  von  $O$  nach  $P$ :

$$\mathbf{x}_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{x}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_1(t)) = \begin{pmatrix} e^t \\ 3t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}'_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}_1(t)) \cdot \mathbf{x}'_1(t) = 3t.$$

Es folgt:

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_0^1 3t dt = \frac{3}{2} t^2 \Big|_0^1 = \frac{3}{2}.$$

Parameterdarstellung des Kreisbogens von  $P$  nach  $Q$ :

$$\mathbf{x}_2: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2} - t) \\ \sin(\frac{\pi}{2} - t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_2(t)) = \begin{pmatrix} e \\ 3 \cos^2 t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}'_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_2(t)) \cdot \mathbf{x}'_2(t) = e \cos t - 3 \cos^2 t \sin t.$$

Es folgt:

$$\int_{\gamma_2} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_0^{\pi/2} (e \cos t - 3 \cos^2 t \sin t) dt$$

$$\begin{aligned}
&= e \int_0^{\pi/2} \cos t \, dt - 3 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin t \, dt \\
&= e \sin t \Big|_0^{\pi/2} + \cos^3 t \Big|_0^{\pi/2} = e - 1.
\end{aligned}$$

Parameterdarstellung der Strecke  $\gamma_3$  von  $Q$  nach 0:

$$\mathbf{x}_3: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{x}_3(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_3(t)) = \begin{pmatrix} e^{1-t} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3'(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}_3(t)) \cdot \mathbf{x}_3'(t) = -e^{1-t}.$$

Es folgt:

$$\int_{\gamma_3} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = - \int_0^1 e^{1-t} \, dt = e^{1-t} \Big|_0^1 = 1 - e.$$

Insgesamt ergibt sich dann:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{\gamma_1} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} + \int_{\gamma_2} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} + \int_{\gamma_3} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \frac{3}{2} + e - 1 + 1 - e = \frac{3}{2}.$$

#### Aufgabe 4

(a) Es gilt

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = [x(2 + xy) \cos(yz) - z(1 + xy) \sin(yz)] e^{xy} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = -y(1 + xy) e^{xy} \sin(yz) = \frac{\partial f_3}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial z} = -x[(1 + xy) \sin(yz) + yz \cos(yz)] e^{xy} = \frac{\partial f_3}{\partial y}$$

Da  $\mathbb{R}^3$  einfach zusammenhängend ist, besitzt  $\mathbf{f}$  ein Potential nach Satz 6.6.18 und Definition 6.6.15.

Berechnung eines Potentials mit unbestimmter Integration:

Für ein Potential  $F$  muss gelten

$$F_x(x, y, z) = f_1(x, y, z) = (1 + xy)e^{xy} \cos(yz).$$

Integration nach  $x$  ergibt

$$F(x, y, z) = \int (1 + xy)e^{xy} \cos(yz) \, dx = xe^{xy} \cos(yz) + c(y, z).$$

Jetzt differenzieren wir nach  $y$  und beachten, dass

$$F_y(x, y, z) = f_2(x, y, z) = [x^2 \cos(yz) - xz \sin(yz)] e^{xy}.$$

Dies ergibt

$$F_y(x, y, z) = [x^2 \cos(yz) - xz \sin(yz)] e^{xy} + c_y(y, z) = [x^2 \cos(yz) - xz \sin(yz)] e^{xy}.$$

Hieraus folgt  $c_y(y, z) = 0$  und Integration nach  $y$  ergibt  $c(y, z) = c(z)$ , also

$$F(x, y, z) = x e^{xy} \cos(yz) + c(z).$$

Schließlich differenzieren wir nach  $z$  und beachten

$$F_z(x, y, z) = f_3(x, y, z) = -xy e^{xy} \sin(yz).$$

Dies ergibt

$$F_z(x, y, z) = -xy e^{xy} \sin(yz) + c'(z) = -xy e^{xy} \sin(yz),$$

also  $c'(z) = 0$ . Jetzt wird noch nach  $z$  integriert, und es folgt  $c(z) = c$ , also ist

$$\boxed{F(x, y, z) = x e^{xy} \cos(yz) + c}.$$

(b) Es gilt

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = 2xz \cosh(yz) - \sinh(xy) - xy \cosh(xy) = \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = 2xy \cosh(yz) = \frac{\partial f_3}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial z} = x^2 \cosh(yz) + x^2 yz \sinh(xy) = \frac{\partial f_3}{\partial y}$$

Da  $\mathbb{R}^3$  einfach zusammenhängend ist, besitzt  $\mathbf{f}$  ein Potential nach Satz 6.6.18 und Definition 6.6.15.

Berechnung eines Potentials mit unbestimmter Integration:

Für ein Potential  $F$  muss gelten

$$F_x(x, y, z) = f_1(x, y, z) = 2x \sinh(yz) - y \sinh(xy).$$

Integration nach  $x$  ergibt

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= \int [2x \sinh(yz) - y \sinh(xy)] dx \\ &= x^2 \sinh(yz) - \cosh(xy) + c(y, z). \end{aligned}$$

Jetzt differenzieren wir nach  $y$  und beachten, dass

$$F_y(x, y, z) = f_2(x, y, z) = x^2 z \cosh(yz) - x \sinh(xy).$$

Dies ergibt

$$F_y(x, y, z) = x^2 z \cosh(yz) - x \sinh(xy) + c_y(y, z) = x^2 z \cosh(yz) - x \sinh(xy).$$

Hieraus folgt  $c_y(y, z) = 0$  und Integration nach  $y$  ergibt  $c(y, z) = c(z)$ , also

$$F(x, y, z) = x^2 \sinh(yz) - \cosh(xy) + c(z).$$

Schließlich differenzieren wir nach  $z$  und beachten

$$F_z(x, y, z) = f_3(x, y, z) = x^2 y \cosh(yz).$$

Dies ergibt

$$F_z(x, y, z) = x^2 y \cosh(yz) + c'(z) = x^2 y \cosh(yz),$$

also  $c'(z) = 0$ . Jetzt wird noch nach  $z$  integriert, und es folgt  $c(z) = c$ , also ist

$$\boxed{F(x, y, z) = x^2 \sinh(yz) - \cosh(xy) + c}.$$

(c) Es gilt

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = -\cosh(x - y) = \frac{\partial f_2}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = \cosh(xz) + xz \sinh(xz) = \frac{\partial f_3}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial z} = -(1 + y)e^{y-z} = \frac{\partial f_3}{\partial y}.$$

Da  $\mathbb{R}^3$  einfach zusammenhängend ist, besitzt  $\mathbf{f}$  ein Potential nach Satz 6.6.18 und Definition 6.6.15.

Berechnung eines Potentials mit unbestimmter Integration:

Für ein Potential  $F$  muss gelten

$$F_x(x, y, z) = f_1(x, y, z) = \sinh(x - y) + z \cosh(xz).$$

Integration nach  $x$  ergibt

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= \int [\sinh(x - y) + z \cosh(xz)] dx \\ &= \cosh(x - y) + \sinh(xz) + c(y, z). \end{aligned}$$

Jetzt differenzieren wir nach  $y$  und beachten, dass

$$F_y(x, y, z) = f_2(x, y, z) = -\sinh(x - y) + (1 + y)e^{y-z}.$$

Dies ergibt

$$F_y(x, y, z) = -\sinh(x - y) + c_y(y, z) = -\sinh(x - y) + (1 + y)e^{y-z}.$$

Hieraus folgt  $c_y(y, z) = (1 + y)e^{y-z}$ . Integration nach  $y$  ergibt

$$c(y, z) = \int c_y(y, z) dy = \int (1 + y)e^{y-z} dy = ye^{y-z} + c(z),$$

also

$$F(x, y, z) = \cosh(x - y) + \sinh(xz) + ye^{y-z} + c(z).$$

Schließlich differenzieren wir nach  $z$  und beachten

$$F_z(x, y, z) = f_3(x, y, z) = -ye^{y-z} + x \cosh(xz).$$

Dies ergibt

$$F_z(x, y, z) = x \cosh(xz) - ye^{y-z} + c'(z) = x \cosh(xz) - ye^{y-z},$$

also  $c'(z) = 0$ . Jetzt wird noch nach  $z$  integriert, und es folgt  $c(z) = c$ , also

$$\boxed{F(x, y, z) = \cosh(x - y) + \sinh(xz) + ye^{y-z} + c}.$$

(d) Nach Satz 6.6.18 ist das Vektorfeld  $\mathbf{f}$  nicht konservativ, denn zum Beispiel gilt

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{2xz}{1 + y^2 z^2}, \quad \text{aber} \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{2xz}{1 + y^2 z^2} = -\frac{\partial f_1}{\partial y} \neq \frac{\partial f_1}{\partial y}.$$

Mathematik für Chemiker

Brunner, G.; Brück, R.

2013, IX, 374 S., Softcover

ISBN: 978-3-642-37504-0