

Lösungen der Aufgaben zu Kapitel 10

Abschnitt 10.2

Aufgabe 1

- (a) Die beiden Funktionen $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ und $g(y) = y$ sind auf $\mathbb{R}$ definiert und stetig. Der Definitionsbereich der Differentialgleichung ist daher $\mathbb{R}^2$. Die einzige Nullstelle $y_0 = 0$ von $g(y) = y$ definiert die konstante Lösung

$$y_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } y_0(x) = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Ihr Graph ist die x -Achse und teilt die Ebene in die beiden Halbebenen

$$\mathbb{D}_1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0 \} \text{ und } \mathbb{D}_2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0 \}.$$

In $\mathbb{D}_1 \cup \mathbb{D}_2$ ist $g(y) \neq 0$, und wir erhalten durch Trennung der Variablen

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x^2} \iff \ln |y| = \arctan x + C \iff |y| = e^C e^{\arctan x}.$$

In $\mathbb{D}_1$ ist $|y| = y$ und daher

$$y(x) = e^C e^{\arctan x},$$

in $\mathbb{D}_2$ ist $|y| = -y$ und daher

$$y(x) = -e^C e^{\arctan x}.$$

Führen wir $K = \pm e^C$ als neue Konstante ein, so können wir die Lösungen in $\mathbb{D}_1$ und $\mathbb{D}_2$ einheitlich angeben und erhalten, wenn wir noch $K = 0$ zulassen, gleichzeitig auch die konstante Lösung y_0 . Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet also

$$y(x) = K e^{\arctan x} \text{ mit } K \in \mathbb{R}.$$

- (b) Die beiden Funktionen $f(x) = 1 - 2x$ und $g(y) = \frac{1}{1 + \cos^2 y}$ sind auf $\mathbb{R}$ definiert und stetig. Der Definitionsbereich der Differentialgleichung ist also $\mathbb{R}^2$. Weiter ist $g(y) \neq 0$. Wir bestimmen die allgemeine Lösung durch Trennung der Variablen. Dabei benutzen wir, dass nach Beispiel (3) auf Seite 216/217 gilt

$$\int \cos^2 y \, dy = \frac{1}{2} (y + \sin y \cos y) + C.$$

Trennung der Variablen liefert

$$\begin{aligned} \int (1 + \cos^2 y) \, dy &= \int (1 - 2x) \, dx \iff y + \frac{1}{2} (y + \sin y \cos y) = x - x^2 + C \\ &\iff \frac{3}{2} y + \frac{1}{2} \sin y \cos y = x - x^2 + C. \end{aligned}$$

Diese Gleichung definiert implizit die allgemeine Lösung y der Differentialgleichung.

- (c) Die Funktion $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ ist auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, die Funktion $g(y) = y^2 + 1$ auf $\mathbb{R}$ definiert und stetig. Der Definitionsbereich der Differentialgleichung ist also

$$\mathbb{D} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \}.$$

Weiter ist $g(y) \neq 0$.

Wir bestimmen die allgemeine Lösung y durch Trennung der Variablen

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = - \int \frac{dx}{x^2} \iff \arctan y = \frac{1}{x} + C \iff y(x) = \tan \left(\frac{1}{x} + C \right).$$

- (d) Die beiden Funktionen $f(x) = x^3$ und $g(y) = e^y$ sind auf $\mathbb{R}$ definiert und stetig. Der Definitionsbereich der Differentialgleichung ist also $\mathbb{R}^2$. Weiter ist $g(y) \neq 0$. Wir bestimmen die allgemeine Lösung y durch Trennung der Variablen:

$$\begin{aligned} \int e^{-y} dy &= \int x^3 dx \iff -e^{-y} = \frac{1}{4} x^4 + C \iff e^{-y} = -\frac{1}{4} x^4 - C \\ &\iff y(x) = -\ln \left(-\frac{1}{4} x^4 - C \right). \end{aligned}$$

Aufgabe 2

(a) $y' = \frac{x^2}{\sqrt{8+x^3}} \cdot \frac{1}{y}$

Trennung der Variablen ergibt

$$\begin{aligned} \int y dy &= \int \frac{x^2}{\sqrt{8+x^3}} dx \iff \frac{1}{2} y^2 = \frac{2}{3} \sqrt{8+x^3} + C \\ &\iff y(x) = \pm \sqrt{\frac{4}{3} \sqrt{8+x^3} + 2C}. \end{aligned}$$

(b) $y' = -\frac{2x}{1+x^2} ((1+y) \ln(1+y))$

Da $\ln(1+y)$ nur für $y > -1$ definiert ist, hat $g(y) = (1+y) \ln(1+y)$ den Definitionsbereich $\mathbb{D} = (-1, \infty)$. Die einzige Nullstelle von $g(y)$ in $\mathbb{D}$ ist $y = 0$. Sie liefert die konstante Lösung $y_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $y_0(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Für $y \neq 0$ ergibt sich die allgemeine Lösung durch Trennung der Variablen:

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{(1+y) \ln(1+y)} &= - \int \frac{2x}{1+x^2} dx \iff \ln(\ln(1+y)) = -\ln(1+x^2) + C \\ &\iff \ln(1+y) = \frac{e^C}{1+x^2} \iff 1+y = e^{\frac{e^C}{1+x^2}} \iff y(x) = e^{\frac{k}{1+x^2}} - 1, \end{aligned}$$

wobei wir $k = e^C > 0$ gesetzt haben. Lassen wir auch $k = 0$ zu, so ist auch die konstante Lösung y_0 in der Formel enthalten.

$$(c) \quad y' = \frac{x}{x+1} \sqrt{1+y}$$

Trennung der Variablen liefert

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1+y}} = \int \frac{x}{x+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx$$

$$\iff 2\sqrt{1+y} = x - \ln|x+1| + C \iff y(x) = \frac{1}{4}(x - \ln|x+1| + C)^2 - 1.$$

$$(d) \quad y' = \frac{2(xy^2 + x)}{x^2y + y} = \frac{2x}{x^2 + 1} \frac{y^2 + 1}{y}$$

Trennung der Variablen liefert

$$\int \frac{y}{y^2 + 1} dy = \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx \iff \frac{1}{2} \ln(y^2 + 1) = \ln(x^2 + 1) + C$$

$$\iff y^2 + 1 = e^{2C} e^{\ln(x^2+1)^2} = e^{2C} (x^2 + 1)^2$$

$$\iff y(x) = \pm \sqrt{k(x^2 + 1)^2 - 1},$$

wobei wir $k = e^{2C} > 0$ gesetzt haben.

$$(e) \quad y' = -\frac{x + xy^2}{y - x^2y} = -\frac{x}{1 - x^2} \frac{1 + y^2}{y}$$

Trennung der Variablen liefert die allgemeine Lösung $y(x)$:

$$\int \frac{y}{1 + y^2} dy = - \int \frac{x}{1 - x^2} dx \iff \frac{1}{2} \ln(1 + y^2) = \frac{1}{2} \ln|1 - x^2| + C$$

$$\iff \ln(1 + y^2) = \ln|1 - x^2| + 2C \iff 1 + y^2 = e^{2C} |1 - x^2|$$

$$\iff y(x) = \pm \sqrt{k|1 - x^2| - 1},$$

wobei wir $k = e^{2C} > 0$ gesetzt haben.

Aufgabe 3

$$(a) \quad y' = \frac{x - 2xy}{x^2} = \frac{1}{x} (1 - 2y) \text{ mit } (\sqrt{2}, 1)$$

Wegen $g(y) = 1 - 2y = 0$ für $y = \frac{1}{2}$ ist die konstante Funktion

$$y_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } y_0(x) = \frac{1}{2} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

eine Lösung. Ihr Graph, die zur x -Achse parallele Gerade durch den Punkt $\frac{1}{2}$ auf der y -Achse, zerlegt die Ebene in die beiden Bereiche

$$\mathbb{D}_1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \frac{1}{2} \} \text{ und } \mathbb{D}_2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < \frac{1}{2} \}.$$

Da der durch die Anfangsbedingung gegebene Punkt $(\sqrt{2}, 1)$ in dem Bereich $\mathbb{D}_1$ liegt, genügt es für die Lösung des Anfangswertproblems, wenn wir die Lösungen bestimmen, deren Kurven in diesem Bereich liegen. Das bedeutet wegen $y > \frac{1}{2}$, dass wir uns auf die Situation $1 - 2y < 0$ beschränken dürfen. Im Folgenden können wir daher schreiben: $\ln |1 - 2y| = \ln (2y - 1)$.

Durch Trennung der Variablen bestimmen wir zuerst die Gleichung, welche die allgemeine Lösung der Differentialgleichung in impliziter Form definiert:

$$\int \frac{dy}{1 - 2y} = \int \frac{dx}{x} \iff -\frac{1}{2} \ln |1 - 2y| = \ln |x| + C$$

$$\iff -\frac{1}{2} \ln (2y - 1) = \ln |x| + C.$$

Wir setzen hier die Anfangsbedingung ein und bestimmen C so, dass die Gleichung dann implizit die Lösung des Anfangswertproblems definiert:

$$-\frac{1}{2} \ln 1 = \ln \sqrt{2} + C \iff 0 = \ln \sqrt{2} + C \iff C = -\ln \sqrt{2} = -\frac{1}{2} \ln 2.$$

Damit erhalten wir die Lösung des Anfangswertproblems:

$$-\frac{1}{2} \ln (2y - 1) = \ln |x| - \frac{1}{2} \ln 2 \iff \ln (2y - 1) = -2 \ln |x| + \ln 2 = \ln \frac{2}{x^2}$$

$$\iff 2y - 1 = \frac{2}{x^2} \iff y(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}.$$

(b) $y' = -\frac{x + xy^2}{y - x^2y} = -\frac{x}{1 - x^2} \frac{1 + y^2}{y} = \frac{x}{x^2 - 1} \frac{1 + y^2}{y}$ mit $(0, 1)$

Für $y = 0$ ist die Funktion $g(y) = \frac{1+y^2}{y}$ nicht definiert. Daher schneiden die Lösungskurven nicht die x -Achse, liegen also entweder in der oberen oder in der unteren Halbebene.

Wir bestimmen durch Trennung der Variablen zuerst die Gleichung, die implizit die allgemeine Lösung der Differentialgleichung definiert:

$$\int \frac{y}{1 + y^2} dy = \int \frac{x}{x^2 - 1} dx \iff \frac{1}{2} \ln (1 + y^2) = \frac{1}{2} \ln |x^2 - 1| + C.$$

In diese Gleichung setzen wir die Anfangsbedingung ein, um die Konstante zu bestimmen:

$$\frac{1}{2} \ln (1 + 1) = \frac{1}{2} \ln |0 - 1| + C \iff \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} \ln 1 + C \iff C = \frac{1}{2} \ln 2.$$

Diesen Wert von C setzen wir in die Gleichung ein und bestimmen dann die Lösung des Anfangswertproblems in expliziter Form:

$$\frac{1}{2} \ln (1 + y^2) = \frac{1}{2} \ln |x^2 - 1| + \frac{1}{2} \ln 2 \iff \ln (1 + y^2) = \ln |x^2 - 1| + \ln 2$$

$$\iff 1 + y^2 = 2|x^2 - 1| \iff y(x) = \pm \sqrt{2|x^2 - 1| - 1}.$$

Da die Lösungskurve durch den Punkt $(0, 1)$ geht, liegt sie in der oberen Halbebene. Das negative Vorzeichen vor der Wurzel kommt also nicht in Frage und die Lösung des Anfangswertproblems lautet

$$y(x) = \sqrt{2|x^2 - 1| - 1}.$$

Abschnitt 10.3

Aufgabe 1

(a) Die beiden Funktionen $f_1, f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f_1(x, y) = (1 + x)e^{x+y} - 1, \quad f_2(x, y) = xe^{x+y}$$

sind stetig differenzierbar und der Definitionsbereich $\mathbb{R}^2$ der Differentialgleichung ist einfach zusammenhängend. Weiter gilt

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = (1 + x)e^{x+y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y).$$

Daher ist die Differentialgleichung nach Folgerung 10.3.2 exakt.

Wir bestimmen durch unbestimmte Integration (Abschnitt 8.10) eine Stammfunktion F der exakten Differentialform $f_1(x, y) dx + f_2(x, y) dy$. Zuerst nutzen wir aus, dass $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = f_2(x, y)$ gelten muss. Aus dieser Bedingung folgt

$$F(x, y) = \int f_2(x, y) dy = \int xe^{x+y} dy = xe^{x+y} + C(x).$$

Jetzt benutzen wir die zweite Bedingung $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = f_1(x, y)$, um $C(x)$ zu bestimmen:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = f_1(x, y) \implies (1 + x)e^{x+y} + C'(x) = (1 + x)e^{x+y} - 1$$

$$\implies C'(x) = -1 \implies C(x) = \int (-1) dx = -x.$$

Bemerkung: Da wir nur eine Stammfunktion F suchen, durften wir die Integrationskonstante weglassen.

Wir setzen $C(x) = -x$ oben ein und erhalten eine Stammfunktion F der exakten Differentialform:

$$F(x, y) = xe^{x+y} - x.$$

Nach Satz 10.3.3 definiert die mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ gebildete Gleichung

$$F(x, y) = c \iff xe^{x+y} - x = c$$

implizit die allgemeine Lösung y der Differentialgleichung. Durch Auflösen dieser Gleichung nach y erhalten wir die allgemeine Lösung in expliziter Form:

$$\begin{aligned} xe^{x+y} - x = c &\iff e^{x+y} = 1 + \frac{c}{x} \iff x + y = \ln \left(1 + \frac{c}{x} \right) \\ &\iff y(x) = \ln \left(1 + \frac{c}{x} \right) - x. \end{aligned}$$

(b) Die beiden Funktionen $f_1, f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f_1(x, y) = 2 \cos 3y \cos 2x, \quad f_2(x, y) = -6 \sin x \sin 3y \cos x = -3 \sin 2x \sin 3y$$

sind stetig differenzierbar, und der Definitionsbereich $\mathbb{R}^2$ der Differentialgleichung ist einfach zusammenhängend. Weiter gilt

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = -6 \sin 3y \cos 2x = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y).$$

Die Differentialgleichung ist nach Folgerung 10.3.2 also exakt.

Wir bestimmen durch unbestimmte Integration (Abschnitt 8.10) eine Stammfunktion F der exakten Differentialform $f_1(x, y) dx + f_2(x, y) dy$. Zuerst nutzen wir aus, dass $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = f_1(x, y)$ gelten muss. Aus dieser Bedingung folgt

$$F(x, y) = \int f_1(x, y) dx = \int 2 \cos 3y \cos 2x dx = \cos 3y \sin 2x + C(y).$$

Jetzt benutzen wir die zweite Bedingung $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = f_2(x, y)$, um $C(y)$ zu bestimmen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = f_2(x, y) &\implies -3 \sin 3y \sin 2x + C'(y) = -3 \sin 2x \sin 3y \\ &\implies C'(y) = 0. \end{aligned}$$

Da wir nur eine Stammfunktion F suchen, dürfen wir $C(y) = 0$ setzen. Damit erhalten wir insgesamt die Stammfunktion

$$F(x, y) = \cos 3y \sin 2x.$$

Nach Satz 10.3.3 definiert die mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ gebildete Gleichung

$$F(x, y) = c \iff \cos 3y \sin 2x = c$$

implizit die allgemeine Lösung y der Differentialgleichung. Durch Auflösen dieser Gleichung nach y erhalten wir die allgemeine Lösung y in expliziter Form:

$$\begin{aligned} \cos 3y \sin 2x = c &\iff \cos 3y = \frac{c}{\sin 2x} \iff 3y = \arccos\left(\frac{c}{\sin 2x}\right) \\ &\iff y(x) = \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{c}{\sin 2x}\right). \end{aligned}$$

Aufgabe 2

(a) Die beiden Funktionen $f_1, f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f_1(x, y) = (1 - xy)e^{-y(x-1)}, \quad f_2(x, y) = -(x^2 - x)e^{-y(x-1)}$$

sind stetig differenzierbar und der Definitionsbereich $\mathbb{R}^2$ der Differentialgleichung ist einfach zusammenhängend. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) &= (-x - (1 - xy)(x - 1)) e^{-y(x-1)} = (-2x + 1 + x^2 y - xy) e^{-y(x-1)} \\ &= \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y). \end{aligned}$$

Daher ist die Differentialgleichung nach Folgerung 10.3.2 exakt.

Wir bestimmen durch unbestimmte Integration (Abschnitt 8.10) eine Stammfunktion F der exakten Differentialform $f_1(x, y) dx + f_2(x, y) dy$. Zuerst nutzen wir aus, dass $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = f_2(x, y)$ gelten muss. Aus dieser Bedingung folgt

$$F(x, y) = \int f_2(x, y) dy = - \int (x^2 - x)e^{-y(x-1)} dy = xe^{-y(x-1)} + C(x).$$

Jetzt benutzen wir die zweite Bedingung $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = f_1(x, y)$, um $C(x)$ zu bestimmen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = f_1(x, y) &\implies (1 - xy)e^{-y(x-1)} + C'(x) = (1 - xy)e^{-y(x-1)} \\ &\implies C'(x) = 0. \end{aligned}$$

Da wir nur eine Stammfunktion F suchen, dürfen wir $C(x) = 0$ setzen. Damit erhalten wir insgesamt die Stammfunktion

$$F(x, y) = xe^{-y(x-1)}.$$

Nach Satz 10.3.3 definiert die mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ gebildete Gleichung

$$F(x, y) = c \iff xe^{-y(x-1)} = c$$

implizit die allgemeine Lösung y der Differentialgleichung. Setzen wir hier die Anfangsbedingung $(2, 0)$ ein, so erhalten wir $2e^0 = c$, also $c = 2$. Die Gleichung

$$xe^{-y(x-1)} = 2$$

definiert implizit die Lösung des Anfangswertproblems. Um die Lösung y in expliziter Form zu gewinnen, lösen wir die Gleichung nach y auf:

$$\begin{aligned} xe^{-y(x-1)} = 2 &\iff e^{-y(x-1)} = \frac{2}{x} \iff -y(x-1) = \ln\left(\frac{2}{x}\right) \\ &\iff y(x) = -\frac{1}{x-1}(\ln 2 - \ln x). \end{aligned}$$

(b) Die beiden Funktionen $f_1, f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f_1(x, y) = 2xy - x, \quad f_2(x, y) = x^2$$

sind stetig differenzierbar und der Definitionsbereich $\mathbb{R}^2$ der Differentialgleichung ist einfach zusammenhängend. Weiter gilt

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = 2x = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y).$$

Daher ist die Differentialgleichung nach Folgerung 10.3.2 exakt.

Wir bestimmen durch unbestimmte Integration (Abschnitt 8.10) eine Stammfunktion F der exakten Differentialform $f_1(x, y) dx + f_2(x, y) dy$. Zuerst nutzen wir aus, dass $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = f_2(x, y)$ gelten muss. Aus dieser Bedingung folgt

$$F(x, y) = \int f_2(x, y) dy = \int x^2 dy = x^2 y + C(x).$$

Jetzt benutzen wir die zweite Bedingung $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = f_1(x, y)$, um $C(x)$ zu bestimmen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = f_1(x, y) &\implies 2xy + C'(x) = 2xy - x \implies C'(x) = -x \\ &\implies C(x) = -\frac{1}{2}x^2.\end{aligned}$$

Da wir nur eine Stammfunktion F suchen, durften wir die Integrationskonstante weglassen.

Wir setzen $C(x) = -\frac{1}{2}x^2$ oben ein und erhalten eine Stammfunktion F der exakten Differentialform:

$$F(x, y) = x^2y - \frac{1}{2}x^2.$$

Nach Satz 10.3.3 definiert die mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ gebildete Gleichung

$$F(x, y) = c \iff x^2y - \frac{1}{2}x^2 = c$$

implizit die allgemeine Lösung y der Differentialgleichung. Setzen wir hier die Anfangsbedingung $(\sqrt{2}, 1)$ ein, so erhalten wir $2 - 1 = c$, also $c = 1$. Die Gleichung

$$x^2y - \frac{1}{2}x^2 = 1$$

definiert implizit die Lösung y des Anfangswertproblems. Um sie in expliziter Form zu gewinnen, lösen wir die Gleichung nach y auf:

$$x^2y - \frac{1}{2}x^2 = 1 \iff x^2\left(y - \frac{1}{2}\right) = 1 \iff y(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 3

In (1) und (2) auf Seite 325 wurde hergeleitet, welche Bedingung erfüllt sein muss, damit es einen Ansatz $M = M(x)$ bzw. $M = M(y)$ für den integrierenden Faktor gibt. Von den dort angegebenen Bedingungen machen wir bei der Lösung der Aufgaben Gebrauch.

(a) Die beiden Funktionen $f_1, f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f_1(x, y) = 2 + 2y(1 - \cosh x^2y), \quad f_2(x, y) = x(1 - \cosh x^2y)$$

sind stetig differenzierbar und der Definitionsbereich $\mathbb{R}^2$ der Differentialgleichung ist einfach zusammenhängend. Weiter gilt

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = 2(1 - \cosh x^2y) - 2x^2y \sinh x^2y,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = (1 - \cosh x^2y) - 2x^2y \sinh x^2y.$$

Die beiden Ableitungen stimmen nicht überein. Daher ist die Differentialgleichung nicht exakt.

Wählen wir den Ansatz $M = M(x)$, so erhalten wir (Seite 325)

$$\frac{M'}{M} = \frac{1}{f_2(x, y)} \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) \right) = \frac{1 - \cosh x^2 y}{x(1 - \cosh x^2 y)} = \frac{1}{x}.$$

Da der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung nur von x (und nicht von y) abhängt, gibt es tatsächlich einen integrierenden Faktor $M = M(x)$, und dieser ist eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{M'}{M} = \frac{1}{x}.$$

$M(x) = x$ ist offenbar eine solche Lösung. Multiplizieren wir also die gegebene Differentialgleichung mit x , so erhalten wir die exakte Differentialgleichung

$$2x + 2xy(1 - \cosh x^2 y) + x^2(1 - \cosh x^2 y)y' = 0.$$

Bei dieser sind die Funktionen f_1 und f_2 jetzt gegeben durch

$$f_1(x, y) = 2x + 2xy(1 - \cosh x^2 y), \quad f_2(x, y) = x^2(1 - \cosh x^2 y).$$

Wir bestimmen eine Stammfunktion der exakten Differentialform durch unbestimmte Integration (wie in Aufgabe 2):

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int f_2(x, y) dy = \int x^2 (1 - \cosh x^2 y) dy = \int (x^2 - x^2 \cosh x^2 y) dy \\ &= x^2 y - \sinh x^2 y + C(x). \end{aligned}$$

Um $C(x)$ zu bestimmen, vergleichen wir die partielle Ableitung von F nach x mit $f_1(x, y) = 2x + 2xy(1 - \cosh x^2 y)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = f_1(x, y) &\iff 2xy(1 - \cosh x^2 y) + C'(x) = 2x + 2xy(1 - \cosh x^2 y) \\ &\iff C'(x) = 2x. \end{aligned}$$

Da wir nur eine Stammfunktion suchen, dürfen wir bei der Integration von C' die Integrationskonstante weglassen, also $C(x) = x^2$ setzen. Eine Stammfunktion ist somit gegeben durch

$$F(x, y) = x^2 y - \sinh x^2 y + x^2 = x^2(y + 1) - \sinh x^2 y.$$

Mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ definiert dann die Gleichung

$$x^2(y + 1) - \sinh x^2 y = c$$

implizit die allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung.

(b) Die beiden Funktionen $f_1, f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f_1(x, y) = (1 + x)e^y + 2y^2 e^x, \quad f_2(x, y) = xe^y + 2ye^x$$

sind stetig differenzierbar und der Definitionsbereich $\mathbb{R}^2$ der Differentialgleichung ist einfach zusammenhängend. Weiter gilt

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = (1+x)e^y + 4ye^x = e^y + xe^y + 4ye^x,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = e^y + 2ye^x.$$

Die beiden Ableitungen stimmen nicht überein. Daher ist die Differentialgleichung nicht exakt.

Wählen wir den Ansatz $M = M(x)$, so erhalten wir (Seite 325)

$$\frac{M'}{M} = \frac{1}{f_2(x, y)} \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) \right) = \frac{1}{xe^y + 2ye^x} (xe^y + 2ye^x) = 1.$$

Da der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung nicht von y abhängt, gibt es tatsächlich einen integrierenden Faktor $M = M(x)$, und dieser ist eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{M'}{M} = 1.$$

$M(x) = e^x$ ist offenbar eine solche Lösung. Multiplizieren wir also die gegebene Differentialgleichung mit e^x , so erhalten wir die exakte Differentialgleichung

$$(1+x)e^{x+y} + 2y^2e^{2x} + (xe^{x+y} + 2ye^{2x})y' = 0,$$

bei der die Funktionen f_1 und f_2 jetzt gegeben sind durch

$$f_1(x, y) = (1+x)e^{x+y} + 2y^2e^{2x}, \quad f_2(x, y) = xe^{x+y} + 2ye^{2x}.$$

Wir bestimmen wie in Teil (a) eine Stammfunktion der exakten Differentialform:

$$F(x, y) = \int (xe^{x+y} + 2ye^{2x}) dy = xe^{x+y} + y^2e^{2x} + C(x).$$

Um $C(x)$ zu bestimmen, vergleichen wir die partielle Ableitung von F nach x mit $f_1(x, y) = (1+x)e^{x+y} + 2y^2e^{2x}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = f_1(x, y) &\iff (1+x)e^{x+y} + 2y^2e^{2x} + C'(x) = (1+x)e^{x+y} + 2y^2e^{2x} \\ &\iff C'(x) = 0. \end{aligned}$$

Wir wählen $C(x) = 0$, da wir nur eine Stammfunktion benötigen. Eine Stammfunktion ist somit gegeben durch

$$F(x, y) = xe^{x+y} + y^2e^{2x}.$$

Mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ definiert dann die Gleichung

$$F(x, y) = c \iff xe^{x+y} + y^2e^{2x} = c$$

implizit die allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung.

(c) Die beiden Funktionen $f_1, f_2: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f_1(x, y) = ye^{xy} - y^2, \quad f_2(x, y) = xe^{xy} - \frac{1}{y}e^{xy} - xy$$

sind stetig differenzierbar auf jedem der beiden Bereiche

$$\mathbb{D} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0 \} \text{ bzw. } \mathbb{D} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0 \}$$

und jeder der Bereiche $\mathbb{D}$ ist einfach zusammenhängend. Weiter gilt

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = (1 + xy)e^{xy} - 2y,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = (1 + xy)e^{xy} - e^{xy} - y.$$

Die beiden Ableitungen stimmen nicht überein. Daher ist die Differentialgleichung nicht exakt.

Wählen wir den Ansatz $M = M(y)$, so erhalten wir (Seite 325)

$$\frac{M'}{M} = \frac{1}{f_1(x, y)} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \right) = \frac{y - e^{xy}}{ye^{xy} - y^2} = -\frac{1}{y}.$$

Da der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung nicht von x abhängt, gibt es einen integrierenden Faktor $M = M(y)$ und dieser ist eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{M'}{M} = -\frac{1}{y}.$$

$M(y) = \frac{1}{y}$ ist offenbar eine solche Lösung. Multiplizieren wir also die gegebene Differentialgleichung mit $\frac{1}{y}$, so erhalten wir die exakte Differentialgleichung

$$e^{xy} - y + \left(\frac{x}{y} e^{xy} - \frac{1}{y^2} e^{xy} - x \right) y' = 0,$$

bei der die Funktionen f_1 und f_2 jetzt gegeben sind durch

$$f_1(x, y) = e^{xy} - y, \quad f_2(x, y) = \frac{x}{y} e^{xy} - \frac{1}{y^2} e^{xy} - x.$$

Wir bestimmen eine Stammfunktion der exakten Differentialform. Zuerst nutzen wir aus, dass $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = f_1(x, y)$ gelten muss:

$$F(x, y) = \int (e^{xy} - y) dx = \frac{1}{y} e^{xy} - xy + C(y).$$

Um $C(y)$ zu bestimmen, vergleichen wir die partielle Ableitung von F nach y mit $f_2(x, y)$:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = f_2(x, y) \iff -\frac{1}{y^2} e^{xy} + \frac{x}{y} e^{xy} - x + C'(y) = \frac{x}{y} e^{xy} - \frac{1}{y^2} e^{xy} - x$$

$$\Longleftrightarrow C'(y) = 0.$$

Wir wählen $C(y) = 0$, da wir nur eine Stammfunktion benötigen. Eine Stammfunktion lautet somit

$$F(x, y) = \frac{1}{y} e^{xy} - xy.$$

Mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ definiert dann die Gleichung

$$F(x, y) = c \Longleftrightarrow \frac{1}{y} e^{xy} - xy = c$$

implizit die allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung.

(d) Die beiden Funktionen $f_1, f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f_1(x, y) = (2 + xy)e^{xy}, \quad f_2(x, y) = x^2 e^{xy}$$

sind stetig differenzierbar und der Definitionsbereich $\mathbb{R}^2$ der Differentialgleichung ist einfach zusammenhängend. Weiter gilt

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = xe^{xy} + 2xe^{xy} + x^2 ye^{xy},$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = 2xe^{xy} + x^2 ye^{xy}.$$

Die beiden Ableitungen stimmen nicht überein. Daher ist die Differentialgleichung nicht exakt.

Wählen wir den Ansatz $M = M(x)$, so erhalten wir (Seite 325)

$$\frac{M'}{M} = \frac{1}{f_2(x, y)} \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) \right) = \frac{xe^{xy}}{x^2 e^{xy}} = \frac{1}{x}.$$

Da der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung nicht von y abhängt, gibt es einen integrierenden Faktor $M = M(x)$, und dieser ist eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{M'}{M} = \frac{1}{x}.$$

$M(x) = x$ ist offenbar eine solche Lösung. Multiplizieren wir also die gegebene Differentialgleichung mit x , so erhalten wir die exakte Differentialgleichung

$$2xe^{xy} + x^2 ye^{xy} + x^3 e^{xy} y' = 0,$$

bei der die Funktionen f_1 und f_2 jetzt gegeben sind durch

$$f_1(x, y) = 2xe^{xy} + x^2 ye^{xy}, \quad f_2(x, y) = x^3 e^{xy}.$$

Wir bestimmen (wie in Aufgabe 2) eine Stammfunktion der exakten Differentialform:

$$F(x, y) = \int x^3 e^{xy} dy = x^2 e^{xy} + C(x).$$

Um $C(x)$ zu bestimmen, vergleichen wir die partielle Ableitung von F nach x mit $f_1(x, y) = 2xe^{xy} + x^2ye^{xy}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = f_1(x, y) &\iff 2xe^{xy} + x^2ye^{xy} + C'(x) = 2xe^{xy} + x^2ye^{xy} \\ &\iff C'(x) = 0.\end{aligned}$$

Wir wählen $C(x) = 0$, da wir nur eine Stammfunktion benötigen. Eine Stammfunktion ist somit gegeben durch

$$F(x, y) = x^2e^{xy}.$$

Mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ definiert dann die Gleichung

$$F(x, y) = c \iff x^2e^{xy} = c$$

implizit die allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung. Hier können wir die Gleichung nach y auflösen und erhalten die Lösung y in expliziter Form:

$$x^2e^{xy} = c \iff e^{xy} = \frac{c}{x^2} \iff xy = \ln \frac{c}{x^2} \iff y(x) = y = \frac{1}{x} (\ln c - 2 \ln x).$$

Abschnitt 10.4

Aufgabe

Da es sich in dieser Aufgabe nur um Differentialgleichungen erster Ordnung handelt, können folgende verschiedene Typen von Differentialgleichungen, die wir bisher kennen gelernt haben, auftreten:

- Typ (GV): Differentialgleichung mit getrennten Variablen $y' = f(x)g(y)$ (Satz 10.2.1),
- Typ (E): exakte Differentialgleichung $f_1(x, y) + f_2(x, y)y' = 0$ mit $\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y)$ (Satz 10.3.1 und Folgerung 10.3.2),
- Typ (HL): homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung $y' + a(x)y = 0$ (Definition 10.4.1),
- Typ (IL): inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung $y' + a(x)y = f(x)$ (Definition 10.4.1).

Für jede der angegebenen Differentialgleichungen schreiben wir die möglichen Umformungen auf und geben den entsprechenden Typ an. Dabei kann es vorkommen, dass eine Differentialgleichung zu mehreren Typen gehört.

$$(a) \quad y' - (\sin x)y = \sin x \quad (\text{IL})$$

$$y' = \sin x(y + 1) \quad (\text{GV})$$

$$\sin x - \frac{1}{y+1} y' = 0 \text{ mit } \frac{\partial}{\partial y} \sin x = 0 = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{y+1} \right) \quad (\text{E})$$

$$(b) \quad y' = e^x \frac{y^2 + 1}{y} \quad (\text{GV})$$

$$-e^x + \frac{y}{y^2 + 1} y' = 0 \text{ mit } \frac{\partial}{\partial y} (-e^x) = 0 = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{y^2 + 1} \right) \quad (\text{E})$$

$$(c) \quad y' + \frac{1}{1+x} y = \frac{1}{1+x} \quad (\text{IL})$$

$$(y-1) + (1+x)y' = 0 \text{ mit } \frac{\partial}{\partial y} (y-1) = 1 = \frac{\partial}{\partial x} (1+x) \quad (\text{E})$$

$$y' = \frac{1}{1+x} (1-y) \quad (\text{GV})$$

$$(d) \quad (\sin x + ye^x) + (e^x + y)y' = 0 \text{ mit } \frac{\partial}{\partial y} (\sin x + ye^x) = e^x = \frac{\partial}{\partial x} (e^x + y) \quad (\text{E})$$

$$(e) \quad y' + \frac{e^{2/x}}{x^2} y = 0 \quad (\text{HL})$$

$$y' = -\frac{e^{2/x}}{x^2} y \quad (\text{GV})$$

$$\frac{e^{2/x}}{x^2} + \frac{1}{y} y' = 0 \text{ mit } \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e^{2/x}}{x^2} \right) = 0 = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{y} \right) \quad (\text{E})$$

$$(f) \quad \left(\frac{2xy}{(1+x^2)^2} - 1 \right) - \frac{1}{1+x^2} y' = 0 \text{ mit}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2xy}{(1+x^2)^2} - 1 \right) = \frac{2x}{(1+x^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{1+x^2} \right) \quad (\text{E})$$

$$y' - \frac{2x}{1+x^2} y = -(1+x^2) \quad (\text{IL})$$

$$(g) \quad \frac{2xy}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{1+x^2} y' = 0 \text{ mit}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2xy}{(1+x^2)^2} \right) = \frac{2x}{(1+x^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{1+x^2} \right) \quad (\text{E})$$

$$y' - \frac{2x}{1+x^2} y = 0 \quad (\text{HL})$$

$$y' = \frac{2x}{1+x^2} y \quad (\text{GV})$$

Abschnitt 10.5

Aufgabe 1

- (a) Es handelt sich um eine homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung. Zur Lösung benutzen wir die Formel aus Satz 10.5.1 und beachten, dass bei der Angabe von $A(x)$ die Integrationskonstante wegzulassen ist (Bemerkung 10.5.2, (2)).

Es gilt

$$A(x) = \int a(x) dx = - \int \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = -x - \ln |x|$$

und daher

$$y(x) = ce^{-A(x)} = ce^{x+\ln|x|} = c|x|e^x.$$

- (b) Es handelt sich um eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung. Zur Bestimmung der allgemeinen Lösung benutzen wir nicht die Formel aus Satz 10.5.3, sondern die Methode (Variation der Konstanten), mit der diese Formel hergeleitet wurde (wie im Beispiel auf Seite 334).

Es gilt (unter Beachtung von Bemerkung 10.5.2, (2))

$$A(x) = \int a(x) dx = \int dx = x.$$

Die homogene lineare Differentialgleichung hat dann die allgemeine Lösung

$$y_h(x) = ce^{-A(x)} = ce^{-x}.$$

Ansatz für eine partikuläre Lösung y_0 der inhomogenen linearen Differentialgleichung:

$$y_0(x) = C(x)e^{-x}.$$

Wir setzen $y_0(x)$ und die Ableitung $y_0'(x) = C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x}$ in die Differentialgleichung ein und erhalten

$$C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x} + C(x)e^{-x} = x^2 \iff C'(x)e^{-x} = x^2 \iff C'(x) = x^2 e^x.$$

Da wir nur eine Funktion C benötigen, lassen wir bei der Integration die Integrationskonstante weg. Dann folgt

$$\begin{aligned} C(x) &= \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2 \left(x e^x - \int e^x dx \right) \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x. \end{aligned}$$

Die partikuläre Lösung lautet daher

$$y_0(x) = (x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x) e^{-x} = x^2 - 2x + 2.$$

Damit lautet die allgemeine Lösung

$$y(x) = y_0(x) + y_h(x) = x^2 - 2x + 2 + ce^{-x}.$$

- (c) Es handelt sich um eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung. Wir gehen wie in Teil (b) vor. Es ist

$$A(x) = \int a(x) dx = \int \frac{dx}{x} = \ln |x|.$$

Da $\ln x$ (auf der rechten Seite der Differentialgleichung) nur für $x > 0$ definiert ist, ist auch eine Lösung nur für $x > 0$ definiert. Also ist $A(x) = \ln x$, und die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung lautet

$$y_h(x) = ce^{-A(x)} = ce^{-\ln x} = \frac{c}{e^{\ln x}} = \frac{c}{x}.$$

Ansatz für eine partikuläre Lösung y_0 der inhomogenen linearen Differentialgleichung:

$$y_0(x) = C(x) \frac{1}{x}.$$

Wir setzen $y_0(x)$ und die Ableitung $y_0'(x) = C'(x) \frac{1}{x} - C(x) \frac{1}{x^2}$ in die Differentialgleichung ein und erhalten

$$C'(x) \frac{1}{x} - C(x) \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \cdot C(x) \frac{1}{x} = \ln x \iff C'(x) \frac{1}{x} = \ln x \iff C'(x) = x \ln x.$$

Hieraus folgt

$$C(x) = \int x \ln x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 = \frac{1}{4} x^2 (2 \ln x - 1).$$

Die partikuläre Lösung lautet daher

$$y_0(x) = \frac{1}{4} x^2 (2 \ln x - 1) \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{4} x (2 \ln x - 1).$$

Damit lautet die allgemeine Lösung

$$y(x) = y_0(x) + y_h(x) = \frac{1}{4} x (2 \ln x - 1) + \frac{c}{x}.$$

- (d) Es handelt sich um eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung. Das wird deutlicher, wenn wir sie wie folgt umformen:

$$y' = 2xy + 1 \iff y' - 2xy = 1.$$

Wir gehen wie in Teil (b) vor. Wegen

$$A(x) = \int a(x) dx = -2 \int x dx = -x^2$$

hat die homogene lineare Differentialgleichung die allgemeine Lösung

$$y_h(x) = ce^{-A(x)} = ce^{x^2}.$$

Ansatz für eine partikuläre Lösung y_0 der inhomogenen linearen Differentialgleichung:

$$y_0(x) = C(x) e^{x^2}.$$

Wir setzen $y_0(x)$ und die Ableitung $y_0'(x) = C'(x)e^{x^2} + 2xC(x)e^{x^2}$ in die Differentialgleichung ein und erhalten

$$C'(x)e^{x^2} + 2xC(x)e^{x^2} - 2xC(x)e^{x^2} = 1 \iff C'(x)e^{x^2} = 1 \iff C'(x) = e^{-x^2}.$$

Hieraus folgt

$$C(x) = \int e^{-x^2} dx = F(x).$$

Da die Funktion e^{-x^2} stetig ist, besitzt sie eine Stammfunktion F (Satz 8.3.5). Allerdings kann man diese Stammfunktion F nicht mit Hilfe der üblichen Rechenoperationen und unter Verwendung der uns bekannten Funktionen darstellen. Wir können also hier die partikuläre Lösung nur angeben durch $y_0(x) = F(x)e^{x^2}$. Entsprechend lautet die allgemeine Lösung dann

$$y(x) = y_0(x) + y_h(x) = (c + F(x))e^{x^2}.$$

- (e) Es handelt sich um eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung. Wir gehen wie in Teil (b) vor. Wegen

$$A(x) = \int a(x) dx = -3 \int dx = -3x$$

hat die homogene lineare Differentialgleichung die allgemeine Lösung

$$y_h(x) = ce^{-A(x)} = ce^{3x}.$$

Ansatz für eine partikuläre Lösung y_0 der inhomogenen linearen Differentialgleichung:

$$y_0(x) = C(x)e^{3x}.$$

Wir setzen $y_0(x)$ und die Ableitung $y_0'(x) = C'(x)e^{3x} + 3C(x)e^{3x}$ in die Differentialgleichung ein und erhalten

$$C'(x)e^{3x} + 3C(x)e^{3x} - 3C(x)e^{3x} = xe^x \iff C'(x)e^{3x} = xe^x \iff C'(x) = xe^{-2x}.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} C(x) &= \int xe^{-2x} dx = -\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} \\ &= -\frac{1}{4}(2x+1)e^{-2x}. \end{aligned}$$

Die partikuläre Lösung lautet daher

$$y_0(x) = -\frac{1}{4}(2x+1)e^{-2x}e^{3x} = -\frac{1}{4}(2x+1)e^x.$$

Damit lautet die allgemeine Lösung

$$y(x) = y_0(x) + y_h(x) = -\frac{1}{4}(2x+1)e^x + ce^{3x}.$$

Aufgabe 2

Wir bestimmen zuerst die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung. In diese setzen wir dann die Anfangsbedingung ein, um die Lösung des Anfangswertproblems zu finden. Die Funktion $\tan x$ ist an den Stellen $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ nicht definiert. Daher müssen wir ein geeignetes Intervall $\mathbb{I}$ wählen, in dem $\tan x$ stetig ist und in dem der Anfangswert $x_0 = 0$ liegt. Dies ist das Intervall $\mathbb{I} = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Mit der Substitution $u = \cos x$, $du = -\sin x dx$ gilt in $\mathbb{I}$

$$A(x) = \int a(x) dx = \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{du}{u} = -\ln u = -\ln \cos x.$$

Die homogene lineare Differentialgleichung hat daher in $\mathbb{I}$ die allgemeine Lösung

$$y_h(x) = ce^{-A(x)} = ce^{\ln \cos x} = c \cos x.$$

Ansatz für eine partikuläre Lösung y_0 der inhomogenen linearen Differentialgleichung:

$$y_0(x) = C(x) \cos x$$

Wir setzen $y_0(x)$ und die Ableitung $y'_0(x) = C'(x) \cos x - C(x) \sin x$ in die Differentialgleichung ein und erhalten

$$\begin{aligned} C'(x) \cos x - C(x) \sin x + C(x) \cos x \tan x &= -\cos x \iff C'(x) \cos x = -\cos x \\ &\iff C'(x) = -1. \end{aligned}$$

Wir können also $C(x) = -x$ wählen, und die partikuläre Lösung lautet dann

$$y_0(x) = -x \cos x.$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung in $\mathbb{I}$ lautet damit

$$y(x) = y_0(x) + y_h(x) = -x \cos x + c \cos x = (c - x) \cos x.$$

Wir setzen hier die gegebene Anfangsbedingung ein und erhalten $c = 1$. Damit lautet die Lösung des Anfangswertproblems

$$y(x) = (1 - x) \cos x.$$

Abschnitt 10.6

Aufgabe 1

Wir bilden die zur Differentialgleichung gehörige charakteristische Gleichung (Ergebnis und Definition 10.6.1), lösen sie und geben mit Hilfe der Lösungen die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung an (entsprechend den Folgerungen 10.6.2, 10.6.3 und 10.6.4).

$$(a) \quad r^2 + 4r + 4 = 0 \implies r_1 = r_2 = -2 \implies y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x},$$

$$\begin{aligned} (b) \quad r^2 + 4r + 7 &= 0 \implies r_1 = -2 + \sqrt{3}i, \quad r_2 = -2 - \sqrt{3}i \\ &\implies y(x) = c_1 e^{-2x} \cos \sqrt{3}x + c_2 e^{-2x} \sin \sqrt{3}x, \end{aligned}$$

- (c) $r^2 + 4r + 1 = 0 \implies r_1 = -2 + \sqrt{3}, r_2 = -2 - \sqrt{3}$
 $\implies y(x) = c_1 e^{(-2+\sqrt{3})x} + c_2 e^{(-2-\sqrt{3})x},$
- (d) $r^2 + 6r + 5 = 0 \implies r_1 = -1, r_2 = -5 \implies y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-5x},$
- (e) $r^2 + 4r = 0 \implies r_1 = 0, r_2 = -4 \implies y(x) = c_1 + c_2 e^{-4x},$
- (f) $r^2 + 4 = 0 \implies r_1 = 2i, r_2 = -2i \implies y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x,$
- (g) $r^2 - 4 = 0 \implies r_1 = 2, r_2 = -2 \implies y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x},$
- (h) $r^2 = 0 \implies r_1 = r_2 = 0 \implies y(x) = c_1 + c_2 x.$

Aufgabe 2

(a) Lösungen der charakteristischen Gleichung:

$$r^2 - 8r + 16 = 0 \implies r_1 = r_2 = 4$$

Allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung:

$$y_h(x) = c_1 e^{4x} + c_2 x e^{4x} = (c_1 + c_2 x) e^{4x}.$$

Die homogene lineare Differentialgleichung hat also die beiden linear unabhängigen Lösungen

$$y_1(x) = e^{4x} \quad \text{und} \quad y_2(x) = x e^{4x}.$$

Mit ihnen berechnen wir die Wronski-Determinante:

$$\det(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} e^{4x} & x e^{4x} \\ 4e^{4x} & (1+4x)e^{4x} \end{vmatrix} = (1+4x - 4x)e^{8x} = e^{8x}.$$

Damit folgt nach den Formeln in Satz 10.6.5

$$c_1(x) = - \int \frac{\frac{1}{x} e^{4x} x e^{4x}}{e^{8x}} dx = - \int dx = -x,$$

$$c_2(x) = \int \frac{\frac{1}{x} e^{4x} e^{4x}}{e^{8x}} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln |x|.$$

Eine partikuläre Lösung ist also gegeben durch

$$y_0(x) = -x e^{4x} + x e^{4x} \ln |x| = -x(1 - \ln |x|) e^{4x}.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung lautet damit

$$y(x) = y_0(x) + y_h(x) = (-x + x \ln |x| + c_1 + c_2 x) e^{4x}.$$

(b) Lösungen der charakteristischen Gleichung:

$$r^2 + 1 = 0 \implies r_1 = i, r_2 = -i.$$

Allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung:

$$y_h(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x .$$

Die homogene lineare Differentialgleichung hat also die beiden linear unabhängigen Lösungen

$$y_1(x) = \cos x \quad \text{und} \quad y_2(x) = \sin x .$$

Mit ihnen berechnen wir die Wronski-Determinante:

$$\det(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 .$$

Damit folgt nach den Formeln in Satz 10.6.5

$$c_1(x) = - \int 3 \sin^2 x \cos x \, dx = -\sin^3 x ,$$

$$c_2(x) = \int 3 \sin x \cos^2 x \, dx = -\cos^3 x .$$

Eine partikuläre Lösung ist also gegeben durch

$$\begin{aligned} y_0(x) &= -\sin^3 x \cos x - \sin x \cos^3 x = -\sin x \cos x (\sin^2 x + \cos^2 x) \\ &= -\sin x \cos x . \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung lautet damit

$$y(x) = y_0(x) + y_h(x) = -\sin x \cos x + c_1 \cos x + c_2 \sin x .$$

Aufgabe 3

(a) Lösungen der charakteristischen Gleichung:

$$r^2 - 5r + 4 = 0 \implies r_1 = 4, \quad r_2 = 1 .$$

Wir bezeichnen den Ansatz mit y_0 :

$$f(x) = (x^2 + 1)e^{-x} : \quad y_0(x) = (A_2 x^2 + A_1 x + A_0)e^{-x} ,$$

$$f(x) = x e^{-x} : \quad y_0(x) = (A_1 x + A_0)e^{-x} ,$$

$$f(x) = (3x - 1)e^{-x} : \quad y_0(x) = (A_1 x + A_0)e^{-x} ,$$

$$f(x) = -5e^{-x} : \quad y_0(x) = A e^{-x} ,$$

$$f(x) = x^2 e^x : \quad y_0(x) = x(A_2 x^2 + A_1 x + A_0)e^x ,$$

$$f(x) = 3e^x : \quad y_0(x) = A x e^x ,$$

$$f(x) = (2x^2 + 5x)e^x : \quad y_0(x) = x(A_2 x^2 + A_1 x + A_0)e^x ,$$

$$f(x) = 3e^x \cos 2x : \quad y_0(x) = A e^{(1+2i)x} ,$$

$$f(x) = 3x e^x \sin 2x : \quad y_0(x) = (A_1 x + A_0)e^{(1+2i)x} .$$

(b) Lösungen der charakteristischen Gleichung:

$$2r^2 + 7r = 0 \implies r_1 = 0, \quad r_2 = -\frac{7}{2}.$$

Wir bezeichnen den Ansatz mit y_0 :

$$f(x) = 3x : \quad y_0(x) = x(A_1x + A_0) = A_1x^2 + A_0x,$$

$$f(x) = 2 \cos x : \quad y_0(x) = Ae^{ix},$$

$$f(x) = 3e^{-\frac{7}{2}x} \cos x : \quad y_0(x) = Ae^{(-\frac{7}{2}+i)x}.$$

Aufgabe 4

Beachten Sie, dass die beiden Methoden im Allgemeinen natürlich unterschiedliche partikuläre Lösungen der Differentialgleichung liefern.

(a) Lösungen der charakteristischen Gleichung:

$$r^2 - 2r + 5 = 0 \implies r_1 = 1 + 2i, \quad r_2 = 1 - 2i.$$

Lösung durch Variation der Konstanten:

Die homogene lineare Differentialgleichung hat die beiden linear unabhängigen Lösungen

$$y_1(x) = e^x \cos 2x \quad \text{und} \quad y_2(x) = e^x \sin 2x.$$

Mit ihnen berechnen wir die Wronski-Determinante:

$$\begin{aligned} \det(y_1(x), y_2(x)) &= \begin{vmatrix} e^x \cos 2x & e^x \sin 2x \\ e^x(\cos 2x - 2 \sin 2x) & e^x(\sin 2x + 2 \cos 2x) \end{vmatrix} \\ &= e^{2x} (\cos 2x \sin 2x + 2 \cos^2 2x - \sin 2x \cos 2x + 2 \sin^2 2x) \\ &= 2e^{2x}. \end{aligned}$$

Wir berechnen $c_1(x)$ und $c_2(x)$ nach den Formeln in Satz 10.6.5. Die Berechnung der beiden Integrale erfolgt dabei wie in 8.2, Beispiel (3) auf Seite 216/217 und in 8.2, Beispiel (1) auf Seite 218.

$$c_1(x) = - \int \frac{e^{2x} \sin^2 2x}{2e^{2x}} dx = -\frac{1}{2} \int \sin^2 2x dx = \frac{1}{8} \sin 2x \cos 2x - \frac{1}{4} x,$$

$$c_2(x) = \int \frac{e^{2x} \sin 2x \cos 2x}{2e^{2x}} dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x \cos 2x dx = \frac{1}{8} \sin^2 2x.$$

Eine partikuläre Lösung ist also gegeben durch

$$\begin{aligned} y_0(x) &= \frac{1}{8} e^x (\sin 2x \cos 2x - 2x) \cos 2x + \frac{1}{8} e^x \sin^2 2x \sin 2x \\ &= \frac{1}{8} e^x \sin 2x (\cos^2 2x + \sin^2 2x) - \frac{1}{4} x e^x \cos 2x = \frac{1}{8} e^x \sin 2x - \frac{1}{4} x e^x \cos 2x. \end{aligned}$$

Lösung nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten:

Wir betrachten dazu die Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + 5y = e^{(1+2i)x}.$$

Da $1+2i$ eine einfache Lösung der charakteristischen Gleichung ist, lautet der Ansatz für eine partikuläre Lösung

$$Y_0(x) = A x e^{(1+2i)x}.$$

Die Ableitungen lauten

$$Y_0'(x) = A (1 + (1+2i)x) e^{(1+2i)x},$$

$$\begin{aligned} Y_0''(x) &= A ((1+2i) + (1+2i) + (1+2i)^2 x) e^{(1+2i)x} \\ &= A (2(1+2i) + (1+2i)^2 x) e^{(1+2i)x}. \end{aligned}$$

Wir setzen den Ansatz und die Ableitungen in die Differentialgleichung ein und dividieren von vornherein durch $e^{(1+2i)x}$:

$$A (2(1+2i) + (1+2i)^2 x) - 2A (1 + (1+2i)x) + 5Ax = 1$$

$$\iff A(2 + 4i + x + 4ix - 4x - 2 - 2x - 4ix + 5x) = 1 \iff 4iA = 1$$

$$\iff A = \frac{1}{4i} = -\frac{1}{4}i.$$

Setzen wir diesen Wert für A in den Ansatz oben ein, so erhalten wir eine partikuläre Lösung Y_0 der Differentialgleichung $y'' - 2y' + 5y = e^{(1+2i)x}$:

$$\begin{aligned} Y_0(x) &= -\frac{1}{4} i x e^{(1+2i)x} = -\frac{1}{4} i x e^x (\cos 2x + i \sin 2x) \\ &= -\frac{1}{4} x e^x (-\sin 2x + i \cos 2x) = \frac{1}{4} x e^x \sin 2x - \left(\frac{1}{4} x e^x \cos 2x \right) i. \end{aligned}$$

Die rechte Seite der gegebenen Differentialgleichung ist der Imaginärteil von $e^{(1+2i)x}$. Daher ist der Imaginärteil von Y_0 eine partikuläre Lösung y_0 der gegebenen Differentialgleichung. Sie lautet

$$y_0(x) = -\frac{1}{4} x e^x \cos 2x.$$

(b) Lösungen der charakteristischen Gleichung:

$$r^2 + 3r = 0 \implies r_1 = 0, \quad r_2 = -3.$$

Lösung durch Variation der Konstanten:

Die homogene lineare Differentialgleichung hat die beiden linear unabhängigen Lösungen

$$y_1(x) = 1 \quad \text{und} \quad y_2(x) = e^{-3x}.$$

Mit ihnen berechnen wir die Wronski-Determinante:

$$\det(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} 1 & e^{-3x} \\ 0 & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -3e^{-3x}.$$

Damit folgt nach den Formeln in Satz 10.6.5

$$c_1(x) = - \int \frac{(6x+8)e^{-3x}}{-3e^{-3x}} dx = \int \left(2x + \frac{8}{3}\right) dx = x^2 + \frac{8}{3}x = \frac{1}{3}x(3x+8),$$

$$\begin{aligned} c_2(x) &= \int \frac{6x+8}{-3e^{-3x}} dx = - \int \left(2xe^{3x} + \frac{8}{3}e^{3x}\right) dx = \\ &= -2 \int xe^{3x} dx - \frac{8}{3} \int e^{3x} dx = -2 \left(\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx \right) - \frac{8}{9}e^{3x} \\ &= -\frac{2}{3}xe^{3x} + \frac{2}{9}e^{3x} - \frac{8}{9}e^{3x} = -\frac{2}{3}(x+1)e^{3x}. \end{aligned}$$

Eine partikuläre Lösung ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} y_0(x) &= \frac{1}{3}x(3x+8) - \frac{2}{3}(x+1)e^{3x}e^{-3x} = \frac{1}{3}x(3x+8) - \frac{2}{3}(x+1) \\ &= \frac{1}{3}(3x^2+8x-2x-2) = \frac{1}{3}(3x^2+6x-2) = x^2+2x-\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Lösung nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten:

Da 0 eine einfache Lösung der charakteristischen Gleichung ist, lautet der Ansatz:

$$y_0(x) = x(A_1x + A_0) = A_1x^2 + A_0x.$$

Die Ableitungen lauten

$$y_0'(x) = 2A_1x + A_0 \quad \text{und} \quad y_0''(x) = 2A_1.$$

Wir setzen die Ableitungen in die Differentialgleichung ein und erhalten

$$2A_1 + 6A_1x + 3A_0 = 6x + 8 \iff 6A_1x + (2A_1 + 3A_0) = 6x + 8.$$

Koeffizientenvergleich liefert das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 6A_1 &= 6 \\ 2A_1 + 3A_0 &= 8 \end{aligned}$$

Die Lösungen lauten $A_1 = 1$ und $A_0 = 2$. Mit diesen Werten für A_1 und A_0 erhalten wir die partikuläre Lösung

$$y_0(x) = x^2 + 2x.$$

Aufgabe 5

(a) Lösungen der charakteristischen Gleichung:

$$r^2 + 3r = 0 \implies r_1 = 0, \quad r_2 = -3.$$

Allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung:

$$y_h(x) = c_1 + c_2 e^{-3x}.$$

Da -3 eine einfache Lösung der charakteristischen Gleichung ist, lautet der Ansatz für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y_0(x) = x(A_1 x + A_0) e^{-3x} = (A_1 x^2 + A_0 x) e^{-3x}.$$

Die Ableitungen lauten

$$\begin{aligned} y_0'(x) &= (2A_1 x + A_0 + (-3)(A_1 x^2 + A_0 x)) e^{-3x} \\ &= (-3A_1 x^2 + (2A_1 - 3A_0)x + A_0) e^{-3x}, \\ y_0''(x) &= (-6A_1 x + 2A_1 - 3A_0 + (-3)(-3A_1 x^2 + (2A_1 - 3A_0)x + A_0)) e^{-3x} \\ &= (9A_1 x^2 - (12A_1 - 9A_0)x + (2A_1 - 6A_0)) e^{-3x}. \end{aligned}$$

Wir setzen die Ableitungen in die Differentialgleichung ein und kürzen von vornherein durch e^{-3x} :

$$\begin{aligned} 9A_1 x^2 - (12A_1 - 9A_0)x + (2A_1 - 6A_0) - 9A_1 x^2 + (6A_1 - 9A_0)x + 3A_0 &= 18x \\ \iff -6A_1 x + 2A_1 - 3A_0 &= 18x. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -6A_1 &= 18 \\ 2A_1 - 3A_0 &= 0 \end{aligned}$$

Die Lösungen lauten $A_1 = -3$, $A_0 = -2$, und damit erhalten wir als partikuläre Lösung

$$y_0(x) = -(3x^2 + 2x)e^{-3x}.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung lautet dann

$$y(x) = y_0(x) + y_h(x) = -(3x^2 + 2x)e^{-3x} + c_1 + c_2 e^{-3x}.$$

(b) Lösungen der charakteristischen Gleichung:

$$r^2 + 9r = 0 \implies r_1 = 0, \quad r_2 = -9.$$

Allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung:

$$y_h(x) = c_1 + c_2 e^{-9x}.$$

Wir ersetzen auf der rechten Seite der Differentialgleichung $\sin 3x$ durch die komplexe Exponentialfunktion e^{3ix} und bestimmen eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 9y' = (36x + 6)e^{3ix}.$$

Da $3i$ keine Lösung der charakteristischen Gleichung ist, lautet der Ansatz für die partikuläre Lösung

$$Y_0(x) = (A_1x + A_0)e^{3ix}.$$

Die Ableitungen lauten

$$Y_0'(x) = (A_1 + 3iA_1x + 3iA_0)e^{3ix} = (3iA_1x + A_1 + 3iA_0)e^{3ix}$$

$$Y_0''(x) = (3iA_1 - 9A_1x + 3iA_1 - 9A_0)e^{3ix} = (-9A_1x + 6iA_1 - 9A_0)e^{3ix}.$$

Wir setzen die Ableitungen in die Differentialgleichung ein und kürzen von vornherein durch e^{3ix} :

$$(-9A_1x + 6iA_1 - 9A_0) + 9(3iA_1x + A_1 + 3iA_0) = 36x + 6 \iff$$

$$-9A_1x + 6iA_1 - 9A_0 + 27iA_1x + 9A_1 + 27iA_0 = 36x + 6 \iff$$

$$(-3 + 9i)A_1x + (3 + 2i)A_1 + (-3 + 9i)A_0 = 12x + 2$$

Koeffizientenvergleich liefert das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (-3 + 9i)A_1 &= 12 \\ (3 + 2i)A_1 + (-3 + 9i)A_0 &= 2 \end{aligned}$$

Die Lösungen lauten $A_1 = -\frac{2}{5} - \frac{6}{5}i$, $A_0 = \frac{31}{75} - \frac{17}{75}i$. Mit diesen Werten für A_0 und A_1 erhalten wir dann die partikuläre Lösung

$$\begin{aligned} Y_0(x) &= \left(\left(-\frac{2}{5} - \frac{6}{5}i \right) x + \frac{31}{75} - \frac{17}{75}i \right) e^{3ix} \\ &= \left(-\frac{2}{5}x + \frac{31}{75} - \left(\frac{6}{5}x + \frac{17}{75} \right) i \right) (\cos 3x + i \sin 3x) \\ &= \left(-\frac{2}{5}x + \frac{31}{75} \right) \cos 3x + \left(\frac{6}{5}x + \frac{17}{75} \right) \sin 3x \\ &\quad + i \left(\left(-\frac{2}{5}x + \frac{31}{75} \right) \sin 3x - \left(\frac{6}{5}x + \frac{17}{75} \right) \cos 3x \right). \end{aligned}$$

Da $\sin 3x$ auf der rechten Seite der gegebenen Differentialgleichung der Imaginärteil von e^{3ix} ist, ist der Imaginärteil von Y_0 eine partikuläre Lösung y_0 der gegebenen Differentialgleichung:

$$y_0(x) = \left(-\frac{2}{5}x + \frac{31}{75} \right) \sin 3x - \left(\frac{6}{5}x + \frac{17}{75} \right) \cos 3x.$$

Die allgemeine Lösung lautet dann

$$y(x) = y_0(x) + y_h(x) = \left(-\frac{2}{5}x + \frac{31}{75} \right) \sin 3x - \left(\frac{6}{5}x + \frac{17}{75} \right) \cos 3x + c_1 + c_2 e^{-9x}.$$

(c) Lösungen der charakteristischen Gleichung:

$$r^2 - 6r + 9 = 0 \implies r_1 = r_2 = 3.$$

Allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung:

$$y_h(x) = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}.$$

Wir ersetzen auf der rechten Seite der Differentialgleichung $\cos 3x$ durch die komplexe Exponentialfunktion e^{3ix} und bestimmen eine partikuläre Lösung der neuen Differentialgleichung

$$y'' - 6y' + 9y = 18e^{3xi}.$$

Da $3i$ keine Lösung der charakteristischen Gleichung ist, lautet der Ansatz für die partikuläre Lösung

$$Y_0(x) = A e^{3ix}.$$

Die Ableitungen lauten

$$Y_0'(x) = 3iA e^{3ix},$$

$$Y_0''(x) = -9A e^{3ix}.$$

Wir setzen den Ansatz und die Ableitungen in die Differentialgleichung ein und kürzen von vornherein durch e^{3ix} :

$$-9A - 18iA + 9A = 18 \iff -18iA = 18 \iff A = i.$$

Eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $y'' - 6y' + 9y = 18e^{3ix}$ lautet damit

$$Y_0(x) = i e^{3ix} = i(\cos 3x + i \sin 3x) = -\sin 3x + i \cos 3x.$$

Da $\cos 3x$ auf der rechten Seite der gegebenen Differentialgleichung der Realteil von e^{3ix} ist, ist der Realteil von Y_0 eine partikuläre Lösung y_0 der gegebenen Differentialgleichung:

$$y_0(x) = -\sin 3x.$$

Die allgemeine Lösung der gegebenen inhomogenen linearen Differentialgleichung lautet dann

$$y(x) = y_0(x) + y_h(x) = -\sin 3x + c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}.$$

(d) Lösungen der charakteristischen Gleichung:

$$r^2 - 6r + 13 = 0 \implies r_1 = 3 + 2i, \quad r_2 = 3 - 2i.$$

Allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung:

$$y_h(x) = c_1 e^{3x} \cos 2x + c_2 e^{3x} \sin 2x.$$

Wir ersetzen auf der rechten Seite der Differentialgleichung $e^{3x} \sin x$ durch die komplexe Exponentialfunktion $e^{(3+i)x}$ und bestimmen eine partikuläre Lösung der neuen Differentialgleichung

$$y'' - 6y' + 13y = xe^{(3+i)x}.$$

Da $3 + i$ keine Lösung der charakteristischen Gleichung ist, lautet der Ansatz für die partikuläre Lösung

$$Y_0(x) = (A_1x + A_0)e^{(3+i)x}.$$

Die Ableitungen lauten

$$\begin{aligned} Y_0'(x) &= (A_1 + (3+i)A_1x + (3+i)A_0)e^{(3+i)x} \\ &= (A_1 + 3A_1x + iA_1x + 3A_0 + iA_0)e^{(3+i)x}, \\ Y_0''(x) &= (3A_1 + iA_1 + (3+i)(A_1 + 3A_1x + iA_1x + 3A_0 + iA_0))e^{(3+i)x} \\ &= (6A_1 + 2iA_1 + 8A_1x + 6iA_1x + 8A_0 + 6iA_0)e^{(3+i)x}. \end{aligned}$$

Wir setzen den Ansatz und die Ableitungen in die Differentialgleichung ein und kürzen von vornherein durch $e^{(3+i)x}$:

$$\begin{aligned} 6A_1 + 2iA_1 + 8A_1x + 6iA_1x + 8A_0 + 6iA_0 \\ - 6A_1 - 18A_1x - 6iA_1x - 18A_0 - 6iA_0 + 13A_1x + 13A_0 = x. \end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zu $2iA_1 + 3A_1x + 3A_0 = x$ und Koeffizientenvergleich ergibt $3A_1 = 1$ und $2iA_1 + 3A_0 = 0$. Also erhalten wir

$$A_1 = \frac{1}{3}, \quad A_0 = -\frac{2}{9}i.$$

Eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $y'' - 6y' + 13y = 18e^{(3+i)x}$ lautet damit:

$$\begin{aligned} Y_0(x) &= \left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{9}i\right)e^{(3+i)x} = \left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{9}i\right)e^{3x}(\cos x + i \sin x) \\ &= \frac{1}{3}xe^{3x} \cos x + \frac{2}{9}e^{3x} \sin x + \left(\frac{1}{3}xe^{3x} \sin x - \frac{2}{9}e^{3x} \cos x\right)i. \end{aligned}$$

Da $e^{3x} \sin x$ auf der rechten Seite der gegebenen Differentialgleichung der Imaginärteil von $e^{(3+i)x}$ ist, ist der Imaginärteil von Y_0 eine partikuläre Lösung y_0 der gegebenen Differentialgleichung:

$$y_0(x) = \frac{1}{3}xe^{3x} \sin x - \frac{2}{9}e^{3x} \cos x = \frac{1}{9}e^{3x}(3x \sin x - 2 \cos x).$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung lautet dann

$$y(x) = y_0(x) + y_h(x) = e^{3x} \left(\frac{1}{3}x \sin x - \frac{2}{9} \cos x + c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x \right).$$

Mathematik für Chemiker

Brunner, G.; Brück, R.

2013, IX, 374 S., Softcover

ISBN: 978-3-642-37504-0