

Lösungen der Aufgaben zu Kapitel 11

Vorbemerkung: Zur Bestimmung der Eigenwerte (bzw. des charakteristischen Polynoms) einer $(3, 3)$ -Matrix verwenden wir stets die Regel von Sarrus (Satz 3.2.12) und zur Bestimmung der zugehörigen Eigenvektoren den Gaußschen Algorithmus, wobei wir nicht alle Rechenschritte vollständig ausführen.

Abschnitt 11.2

Aufgabe 1

Bestimmung der Eigenwerte von A :

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 6 - \lambda & 2 & 2 \\ 2 & 7 - \lambda & 1 \\ 2 & 1 & 7 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (6 - \lambda)(7 - \lambda)^2 + 4 + 4 - 4(7 - \lambda) - (6 - \lambda) - 4(7 - \lambda) \\ &= (6 - \lambda)(\lambda^2 - 14\lambda + 40) = -(\lambda - 6)(\lambda - 4)(\lambda - 10). \end{aligned}$$

A hat also die drei verschiedenen reellen Eigenwerte $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 10$.

Bestimmung des Eigenraumes zu $\lambda_1 = 4$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Hieraus ergibt sich für den Eigenraum von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 4$

$$E(A, 4) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bestimmung des Eigenraumes zu $\lambda_2 = 6$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Hieraus ergibt sich für den Eigenraum von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 6$

$$E(A, 6) = \left\{ c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bestimmung des Eigenraumes zu $\lambda_3 = 10$:

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Hieraus ergibt sich für den Eigenraum von A zum Eigenwert $\lambda_3 = 10$

$$E(A, 10) = \left\{ c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Jetzt normieren wir die Basisvektoren der drei Eigenräume. Diese normierten Vektoren sind dann natürlich ebenfalls Basisvektoren der Eigenräume. Die normierten Basisvektoren der Eigenräume lauten

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sind paarweise orthogonal, denn für Skalarprodukte je zweier der Vektoren gilt offenbar $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 = 0$. Also bilden $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ (wie in Satz 11.2.8, (4) ausgesagt).

Aufgabe 2

(a) Bestimmung der Eigenwerte von A :

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 5 - \lambda & -6 & -6 \\ -1 & 4 - \lambda & 2 \\ 3 & -6 & -4 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (5 - \lambda)(4 - \lambda)(-4 - \lambda) - 36 - 36 + 18(4 - \lambda) + 12(5 - \lambda) + 6(4 + \lambda) \\ &= (5 - \lambda)(\lambda^2 - 16) - 24\lambda + 84 = -(\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4) \\ &= -(\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2. \end{aligned}$$

A hat also den Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ der Vielfachheit 2 und den Eigenwert $\lambda_3 = 1$ der Vielfachheit 1.

Bestimmung des Eigenraumes zu $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & -6 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Hieraus ergibt sich für den Eigenraum von A zum Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$

$$E(A, 2) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bestimmung des Eigenraumes zu $\lambda_3 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Hieraus ergibt sich für den Eigenraum von A zum Eigenwert $\lambda_3 = 1$

$$E(A, 1) = \left\{ c_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \mid c_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

(b) Bestimmung der Eigenwerte von A :

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 10 - \lambda & 2 & 2 \\ 2 & 7 - \lambda & 1 \\ 2 & 1 & 7 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (10 - \lambda)(7 - \lambda)^2 + 4 + 4 - 4(7 - \lambda) - (10 - \lambda) - 4(7 - \lambda) \\ &= (10 - \lambda)(\lambda^2 - 14\lambda + 49) + 9\lambda - 58 = -(\lambda^3 - 24\lambda^2 + 180\lambda - 432) \\ &= -(\lambda - 6)(\lambda^2 - 18\lambda + 72) = -(\lambda - 6)^2(\lambda - 12). \end{aligned}$$

A hat also den Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_2 = 6$ der Vielfachheit 2 und den Eigenwert $\lambda_3 = 12$ der Vielfachheit 1.

Bestimmung des Eigenraumes zu $\lambda_1 = \lambda_2 = 6$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Hieraus ergibt sich für den Eigenraum von A zum Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_2 = 6$

$$E(A, 6) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bestimmung des Eigenraumes zu $\lambda_3 = 12$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Hieraus ergibt sich für den Eigenraum von A zum Eigenwert $\lambda_3 = 12$

$$E(A, 12) = \left\{ c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe 3

(a) Wir bestimmen die Basisvektoren der drei Eigenräume in der üblichen Weise und normieren sie sofort.

Bestimmung eines normierten Basisvektors des Eigenraumes $E(A, 1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 19 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Ein normierter Basisvektor von $E(\mathbf{A}, 1)$ ist also gegeben durch

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmung eines normierten Basisvektors des Eigenraumes $E(\mathbf{A}, 2)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 18 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Ein normierter Basisvektor von $E(\mathbf{A}, 2)$ ist also gegeben durch

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{19}} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmung eines normierten Basisvektors des Eigenraumes $E(\mathbf{A}, 21)$:

$$\begin{pmatrix} -19 & 1 & 3 \\ 1 & -19 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} 1 & -19 & 3 \\ 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Ein normierter Basisvektor von $E(\mathbf{A}, 21)$ ist also gegeben durch

$$\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{38}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Die Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sind paarweise orthogonal, denn für Skalarprodukte je zweier der Vektoren gilt offenbar $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 = 0$. Also bilden $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ (wie in Satz 11.2.8, (4) ausgesagt).

(b) Nach Satz 3.6.8 hat $\mathbf{x}$ eine Darstellung als Linearkombination

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3$$

der Basisvektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$, und die Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sind gegeben durch die Skalarprodukte

$$\alpha_1 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_1 = 0, \quad \alpha_2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_2 = -\frac{9}{\sqrt{19}}, \quad \alpha_3 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_3 = \frac{22}{\sqrt{38}}.$$

Abschnitt 11.3

Aufgabe 1

Die Matrizen sind symmetrisch und haben daher reelle Eigenwerte. Nach Satz 11.3.3 kann dann mit Hilfe der Eigenwerte und der Basisvektoren der zugehörigen Eigenräume die allgemeine Lösung des homogenen linearen Differentialgleichungssystems angegeben werden.

(a) Bestimmung der Eigenwerte:

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & -2-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(2+\lambda)(2+\lambda)(1+\lambda) - 4 - 4 + 4(2+\lambda) + 4(2+\lambda) + (1+\lambda) \\ &= -(\lambda+2)^2(\lambda+1) + 9 + 9\lambda = -(\lambda+1)(\lambda^2 + 4\lambda - 5) \\ &= -(\lambda+1)(\lambda+5)(\lambda-1). \end{aligned}$$

A hat also die reellen Eigenwerte $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$.

Bestimmung eines Basisvektors von $E(A, -5)$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Ein Basisvektor von $E(A, -5)$ ist also gegeben durch

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmung eines Basisvektors von $E(A, -1)$:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Ein Basisvektor von $E(A, -1)$ ist also gegeben durch

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmung eines Basisvektors von $E(A, 1)$:

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Ein Basisvektor von $E(A, 1)$ ist also gegeben durch

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung des homogenen linearen Differentialgleichungssystems lautet damit

$$\mathbf{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-5x} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-x} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^x.$$

(b) Bestimmung der Eigenwerte:

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} -3-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & -3-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(3+\lambda)(3+\lambda)\lambda + 4 + 4 + 4(3+\lambda) + 4(3+\lambda) + \lambda \\ &= -(\lambda^3 + 6\lambda^2 + 9\lambda - 32 - 9\lambda) = -(\lambda^3 + 6\lambda^2 - 32) \\ &= -(\lambda - 2)(\lambda^2 + 8\lambda + 16) = -(\lambda - 2)(\lambda + 4)^2. \end{aligned}$$

A hat also die reellen Eigenwerte $\lambda_1 = \lambda_2 = -4$, $\lambda_3 = 2$.

Bestimmung der Basisvektoren von $E(A, -4)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Basisvektoren von $E(A, -4)$ sind also gegeben durch

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmung eines Basisvektors von $E(A, 2)$:

$$\begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Ein Basisvektor von $E(A, 2)$ ist also gegeben durch

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung des homogenen linearen Differentialgleichungssystems lautet damit

$$\mathbf{y}(x) = \left(c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) e^{-4x} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{2x}.$$

Aufgabe 2

Das homogene lineare Differentialgleichungssystem hat die Form

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} \quad \text{mit} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmung der Eigenwerte:

$$\begin{aligned}
 P_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & -3 \\ 2 & 1-\lambda & -6 \\ -1 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} \\
 &= (2+\lambda)(1-\lambda)\lambda + 12 + 12 - 3(1-\lambda) + 12(2+\lambda) + 4\lambda \\
 &= -(\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda - 45 - 19\lambda) = -(\lambda^3 + \lambda^2 + 21\lambda - 45) \\
 &= -(\lambda - 5)(\lambda^2 + 6\lambda + 9) = -(\lambda - 5)(\lambda + 3)^2.
 \end{aligned}$$

Die Matrix A hat also den reellen Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$ der Vielfachheit 2 und den reellen Eigenwert $\lambda_3 = 5$ der Vielfachheit 1.

Bestimmung der Basisvektoren von $E(A, -3)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Basisvektoren von $E(A, -3)$ sind also gegeben durch

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmung eines Basisvektors von $E(A, 5)$:

$$\begin{pmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Ein Basisvektor von $E(A, 5)$ ist also gegeben durch

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung des homogenen linearen Differentialgleichungssystems lautet damit

$$\mathbf{y}(x) = \left(c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) e^{-3x} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5x}.$$

Aufgabe 3

Bestimmung der Eigenwerte:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 3 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2) = -(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2).$$

A hat also die reellen Eigenwerte $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$.

Bestimmung eines Basisvektors von $E(\mathbf{A}, -1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Ein Basisvektor von $E(\mathbf{A}, -1)$ ist also gegeben durch

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmung eines Basisvektors von $E(\mathbf{A}, 1)$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Ein Basisvektor von $E(\mathbf{A}, 1)$ ist also gegeben durch

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmung eines Basisvektors von $E(\mathbf{A}, 2)$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Ein Basisvektor von $E(\mathbf{A}, 2)$ ist also gegeben durch

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung des homogenen linearen Differentialgleichungssystems lautet damit

$$\mathbf{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^x + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x}.$$

Wir setzen hier die Anfangsbedingung ein und erhalten ein lineares Gleichungssystem für c_1, c_2, c_3 :

$$c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mit dem Gaußschen Algorithmus erhalten wir die Lösung $c_1 = 1, c_2 = 3, c_3 = 0$.

Die Lösung des Anfangswertproblems lautet damit

$$\mathbf{y}_A(x) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} e^x.$$

Mathematik für Chemiker

Brunner, G.; Brück, R.

2013, IX, 374 S., Softcover

ISBN: 978-3-642-37504-0