

Lösungen der Aufgaben zu Kapitel 2

Abschnitt 2.1

Aufgabe 1

Wir benutzen die Potenzrechenregeln, um eine Potenz von i mit geradem Exponenten $2n$ oder mit ungeradem Exponenten $2n + 1$ wie folgt darzustellen:

$$i^{2n} = (i^2)^n \quad \text{und} \quad i^{2n+1} = i^{2n} \cdot i = (i^2)^n \cdot i$$

Dann nutzen wir aus, dass $i^2 = -1$ ist (Definition 2.1.1):

$$i^2 = -1,$$

$$i^5 = (i^2)^2 i = (-1)^2 i = i,$$

$$i^8 = (i^2)^4 = (-1)^4 = 1,$$

$$i^{2n} = (i^2)^n = (-1)^n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$i^{2n+1} = i^{2n} i = (-1)^n i \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$i^3 - i^4 = i^2 i - (i^2)^2 = -i - (-1)^2 = -i - 1 = -1 - i,$$

$$i^3(i + i^6) = i^4 + i^9 = (i^2)^2 + (i^2)^4 i = (-1)^2 + (-1)^4 i = 1 + i,$$

$$i + i^2 + i^3 = i + (-1) + (-1)i = -1.$$

Aufgabe 2

Wir berechnen das Produkt komplexer Zahlen entsprechend der Definition 2.1.6 (beachten Sie den Hinweis zu Definition 2.1.6) und den Quotienten komplexer Zahlen entsprechend dem Rezept in Definition 2.1.7:

$$(a) \quad (2 - 3i)(1 + 2i) = 2 + 4i - 3i + 6 = 8 + i,$$

$$(b) \quad (2 + 5i)^2 = 4 + 20i + 25i^2 = 4 + 20i - 25 = -21 + 20i,$$

$$(c) \quad (2 - 5i)^2 = 4 - 20i + 25i^2 = 4 - 20i - 25 = -21 - 20i,$$

$$(d) \quad \frac{2 + 6i}{3 - 5i} = \frac{(2 + 6i)(3 + 5i)}{9 + 25} = \frac{6 + 10i + 18i - 30}{34} = -\frac{12}{17} + \frac{14}{17}i,$$

$$(e) \quad \frac{2 - i}{3i} = \frac{(2 - i)(-3i)}{9} = \frac{-6i - 3}{9} = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}i,$$

$$(f) \quad \frac{1}{1 - i} = \frac{1(1 + i)}{1 + 1} = \frac{1 + i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$(g) \quad \frac{3 + 2i}{(1 - 2i)(3 + i)} = \frac{3 + 2i}{3 + i - 6i + 2} = \frac{3 + 2i}{5 - 5i} = \frac{(3 + 2i)(5 + 5i)}{25 + 25} \\ = \frac{15 + 15i + 10i - 10}{50} = \frac{1}{10} + \frac{1}{2}i.$$

Aufgabe 3

Wir berechnen zuerst die Quotienten auf der linken Seite der Gleichung (entsprechend dem Rezept in Definition 2.1.7) und bilden ihre Summe:

$$\begin{aligned}\frac{-3+11i}{3-i} + \frac{-11+10i}{1-4i} &= \frac{(-3+11i)(3+i)}{9+1} + \frac{(-11+10i)(1+4i)}{1+16} \\ &= \frac{-9-3i+33i-11}{10} + \frac{-11-44i+10i-40}{17} \\ &= \frac{-20+30i}{10} + \frac{-51-34i}{17} \\ &= -2+3i-3-2i = -5+i.\end{aligned}$$

Die Gleichung lautet damit jetzt:

$$(-5+i)z = 24-10i.$$

Wir lösen diese Gleichung nach z auf und berechnen den Quotienten:

$$z = \frac{24-10i}{-5+i} = \frac{(24-10i)(-5-i)}{25+1} = \frac{-120-24i+50i-10}{26} = \frac{-130+26i}{26} = -5+i.$$

Die Lösung der Gleichung ist also die komplexe Zahl $z = -5+i$.

Aufgabe 4

Wie man bei der quadratischen Ergänzung vorgeht, wurde in Abschnitt 2.1 (vor Satz 2.1.11) erklärt. Das dort beschriebene Vorgehen benutzen wir jetzt:

$$\begin{aligned}\text{(a)} \quad x^2 - 4x + 1 &= 0 \iff (x-2)^2 - 4 + 1 = 0 \iff (x-2)^2 = 3 \\ &\iff x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3} \iff x_1 = 2 + \sqrt{3}, x_2 = 2 - \sqrt{3}, \\ \text{(b)} \quad x^2 - 4x + 7 &= 0 \iff (x-2)^2 - 4 + 7 = 0 \iff (x-2)^2 = -3 \\ &\iff x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}i \iff x_1 = 2 + \sqrt{3}i, x_2 = 2 - \sqrt{3}i, \\ \text{(c)} \quad x^2 - \sqrt{3}x + \frac{3}{4} &= 0 \iff \left(x - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 - \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 0 \\ &\iff \left(x - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 = 0 \iff x_1 = x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Aufgabe 5

Wir setzen dazu $z_1 = x_1 + y_1i$, $z_2 = x_2 + y_2i$, $z = x + yi$ und benutzen dann die Definition der konjugiert komplexen Zahl (Definition 2.1.8):

$$\text{(a)} \quad \overline{z_1 \pm z_2} = \overline{(x_1 + y_1i) \pm (x_2 + y_2i)} = \overline{(x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i} = (x_1 \pm x_2) - (y_1 \pm y_2)i$$

$$= (x_1 - y_1 i) \pm (x_2 - y_2 i) = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2,$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \overline{(z_1 z_2)} &= \overline{(x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i)} = \overline{(x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i} \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) - (x_1 y_2 + x_2 y_1) i = (x_1 - y_1 i)(x_2 - y_2 i) = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad \bar{z} = z &\iff \overline{x + y i} = x + y i \iff x - y i = x + y i \iff 2y i = 0 \iff y = 0 \\ &\iff z = x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Aufgabe 6

Wir setzen z in die Gleichung ein, bilden die konjugiert komplexe Gleichung und benutzen die Aussagen (1) und (4) aus Satz 2.1.9. Nach Aussage (4) ist $\bar{a}_k = a_k$, weil nach Voraussetzung $a_k \in \mathbb{R}$ für $0 \leq k \leq n$ gilt.

$$\begin{aligned} a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0 &\implies \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} = \bar{0} \\ &\implies \bar{a}_n \bar{z}^n + \bar{a}_{n-1} \bar{z}^{n-1} + \cdots + \bar{a}_1 \bar{z} + \bar{a}_0 = \bar{0} \\ &\implies a_n \bar{z}^n + a_{n-1} \bar{z}^{n-1} + \cdots + a_1 \bar{z} + a_0 = 0 \end{aligned}$$

Also ist mit z auch $\bar{z}$ eine Lösung der Gleichung.

Abschnitt 2.2

Aufgabe 1

Wir stellen die angegebenen Zahlen z in der Form $z = x + y i$ dar. Dann sind $x = \operatorname{Re} z$ und $y = \operatorname{Im} z$ die kartesischen Koordinaten (Definition 2.2.1):

$$\text{(a)} \quad i^3 + i^4 = (-1)i + (-1)^2 = -i + 1 = 1 - i \implies x = 1, y = -1,$$

$$\text{(b)} \quad 3i = 0 + 3i \implies x = 0, y = 3,$$

$$\text{(c)} \quad (3 + 2i)(2 - 3i) = 6 - 9i + 4i - 6i^2 = 12 - 5i \implies x = 12, y = -5,$$

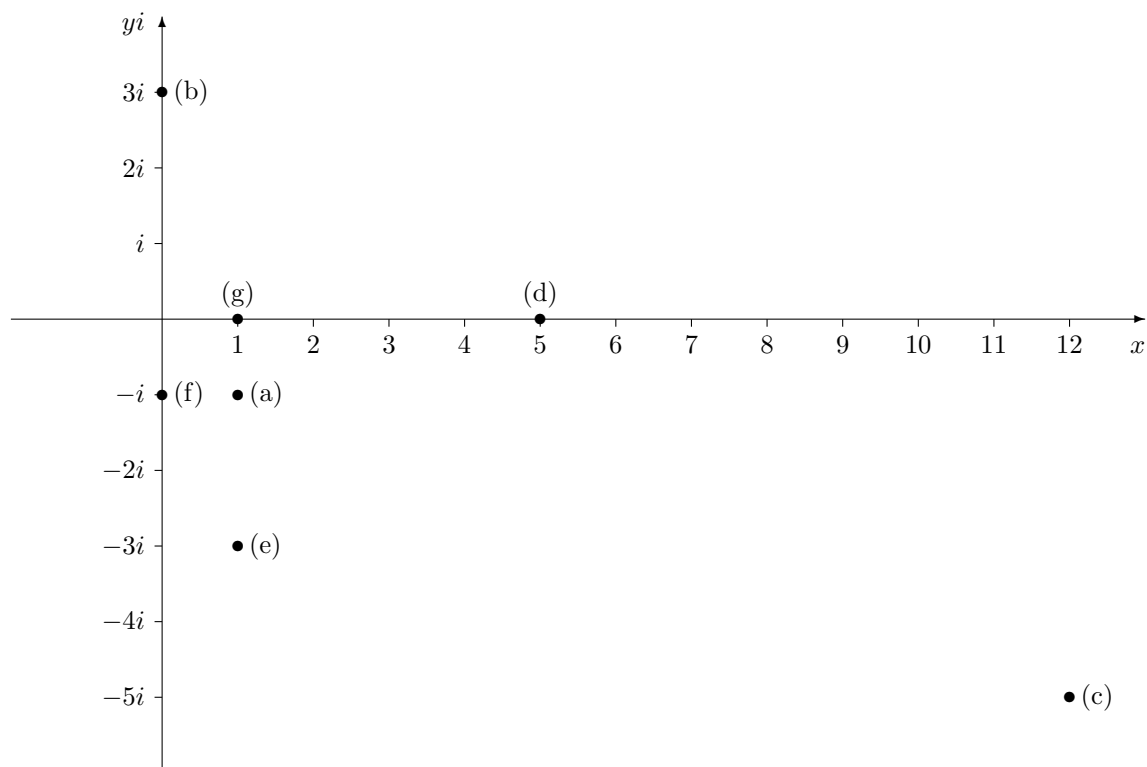
$$\text{(d)} \quad (1 + 2i)(1 - 2i) = 1^2 - (2i)^2 = 1 + 4 = 5 \implies x = 5, y = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{(e)} \quad \frac{5 - 5i}{2 + i} &= \frac{(5 - 5i)(2 - i)}{2^2 + 1^2} = \frac{10 - 5i - 10i - 5}{5} = \frac{5 - 15i}{5} = 1 - 3i \\ &\implies x = 1, y = -3, \end{aligned}$$

$$\text{(f)} \quad \frac{1}{i} = \frac{1 \cdot (-i)}{1} = 0 - i \implies x = 0, y = -1,$$

$$\text{(g)} \quad \frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i} = \frac{1-i}{1^2+1^2} + \frac{1+i}{1^2+1^2} = \frac{1-i}{2} + \frac{1+i}{2} = 1 \implies x = 1, y = 0.$$

Skizze der Punkte in der komplexen Ebene:



Aufgabe 2

Wir setzen $z = x + yi$. Dann ist $\bar{z} = x - yi$. Die Lösungsmenge ist jeweils mit $\mathbb{L}$ bezeichnet.

(a) Es gilt

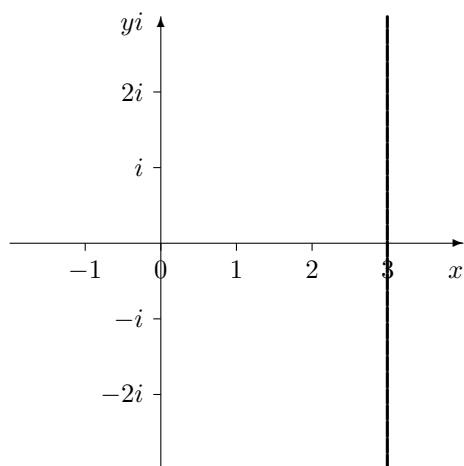
$$z + \bar{z} = 6 \iff (x + yi) + (x - yi) = 6 \iff 2x = 6 \iff x = 3.$$

Damit folgt

$$\mathbb{L} = \{ 3 + yi \mid y \in \mathbb{R} \}.$$

Die Lösungsmenge ist also die zur imaginären Achse parallele Gerade durch den Punkt 3 (auf der reellen Achse).

Skizze:



(b) Es gilt

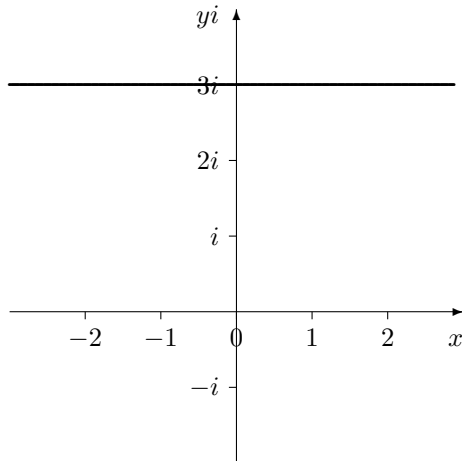
$$z - \bar{z} = 6i \iff (x + yi) - (x - yi) = 6i \iff 2yi = 6i \iff y = 3.$$

Damit folgt

$$\mathbb{L} = \{x + 3i \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Die Lösungsmenge ist die zur reellen Achse parallele Gerade durch den Punkt $3i$ (auf der imaginären Achse).

Skizze:



(c) Es gilt

$$z \cdot \bar{z} - z + \bar{z} = 1 \iff (x + yi)(x - yi) - (x + yi) + (x - yi) = 1 \iff x^2 + y^2 - 2yi = 1.$$

Die Real- und die Imaginärteile auf beiden Seiten dieser Gleichung müssen übereinstimmen. Daher gilt:

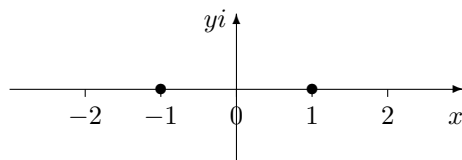
$$x^2 + y^2 - 2yi = 1 \iff x^2 + y^2 = 1 \quad \text{und} \quad 2y = 0 \iff x = \pm 1, \quad y = 0.$$

Also folgt

$$\mathbb{L} = \{x + yi \mid x = \pm 1, \quad y = 0\} = \{1, -1\}.$$

Die Lösungsmenge besteht nur aus den zwei Punkten -1 und 1 auf der reellen Achse.

Skizze:



(d) Es gilt

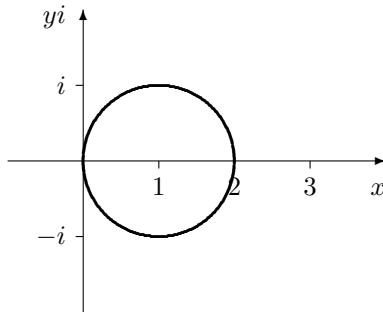
$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} - z - \bar{z} = 0 &\iff (x + yi)(x - yi) - (x + yi) - (x - yi) = 0 \\ &\iff x^2 + y^2 - 2x = 0 \iff (x - 1)^2 + y^2 = 1. \end{aligned}$$

Also folgt

$$\mathbb{L} = \{ x + yi \in \mathbb{C} \mid (x - 1)^2 + y^2 = 1 \}.$$

Die Lösungsmenge ist der Kreis mit Radius 1 um den Punkt $(1, 0)$.

Skizze:



(e) Es gilt

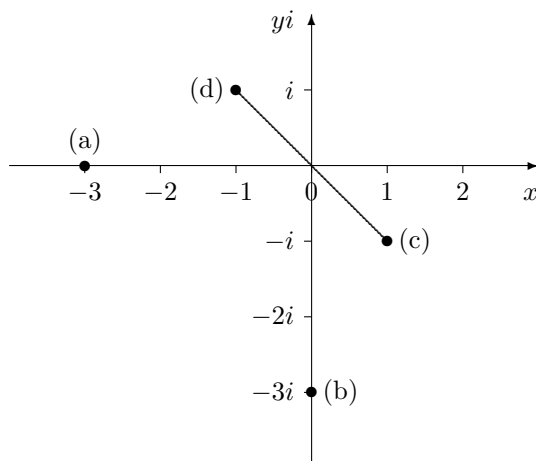
$$\begin{aligned} (z - i)^2 = (z + i)^2 &\iff (x + yi - i)^2 = (x + yi + i)^2 \\ &\iff (x + (y - 1)i)^2 = (x + (y + 1)i)^2 \\ &\iff x^2 + 2x(y - 1)i - (y - 1)^2 = x^2 + 2x(y + 1)i - (y + 1)^2 \\ &\iff 2xyi - 2xi - y^2 + 2y - 1 = 2xyi + 2xi - y^2 - 2y - 1 \\ &\iff 4y - 4xi = 0 \iff y - xi = 0 \iff y = 0 \text{ und } x = 0. \end{aligned}$$

Beachten Sie, dass die letzte Äquivalenz gilt, weil wegen $y - xi = 0$ die Realteile und die Imaginärteile auf beiden Seiten der Gleichung übereinstimmen, also x und y beide 0 sind. Damit ist $\mathbb{L} = \{0\}$. Die Lösungsmenge besteht somit nur aus dem Nullpunkt. Eine Skizze erübrigt sich hier.

Abschnitt 2.3

Aufgabe 1

Wenn Sie ein kartesisches Koordinatensystem für die komplexe Zahlenebene wählen und die angegebenen Zahlen als Punkte eintragen, können Sie sofort die Argumente ablesen.



Natürlich haben -3 und $-3i$ den Betrag 3. Die Beträge von $1-i$ und $-1+i$ erhält man nach der Formel in Satz 2.3.5.

$$(a) \quad |-3| = 3, \arg(-3) = \pi \implies -3 = 3(\cos \pi + i \sin \pi),$$

$$(b) \quad |-3i| = 3, \arg(-3i) = -\frac{\pi}{2} \implies -3i = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right),$$

$$(c) \quad |1-i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, \arg(1-i) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\implies 1-i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right),$$

$$(d) \quad |-1+i| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \arg(-1+i) = \frac{3\pi}{4}$$

$$\implies -1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Aufgabe 2

Wie in Aufgabe 1 können die Polarkoordinaten der Zahlen in (a), (b) und (c) sofort angegeben werden, weil die Zahlen auf der imaginären Achse bzw. auf der Winkelhalbierenden im 1. Quadranten liegen. Die Polarkoordinaten der Zahl in (d) können ebenso leicht bestimmt werden, wenn die Zahl erst einmal auf die Normalform gebracht wird.

$$(a) \quad |i| = 1, \arg i = \frac{\pi}{2} \implies i = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2},$$

$$(b) \quad |-i| = 1, \arg(-i) = -\frac{\pi}{2} \implies -i = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right),$$

$$(c) \quad |2+2i| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}, \arg(2+2i) = \frac{\pi}{4}$$

$$\implies 2+2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right),$$

$$(d) \quad \frac{i}{1-i} = \frac{i(1+i)}{1^2 + 1^2} = \frac{-1+i}{2} = \frac{1}{2}(-1+i)$$

$$\implies \left|\frac{i}{1-i}\right| = \frac{1}{2}|-1+i| = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \arg\left(\frac{i}{1-i}\right) = \arg\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{3\pi}{4}$$

$$\implies \frac{i}{1-i} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Aufgabe 3

Veranschaulichen wir komplexe Zahlen z und w als Punkte in der komplexen Zahlenebene, so können wir $|z-w|$ deuten als den Abstand des Punktes z vom Punkt w . Mit dieser Deutung lassen sich die Punktmengen, die durch die Gleichungen bzw. Ungleichungen in den folgenden Aufgaben beschrieben werden, leicht anschaulich deuten. Bei der zusätzlich angegebenen Rechnung nutzen wir immer aus, dass $|x+yi|^2 = x^2 + y^2$ gilt (Satz 2.3.5).

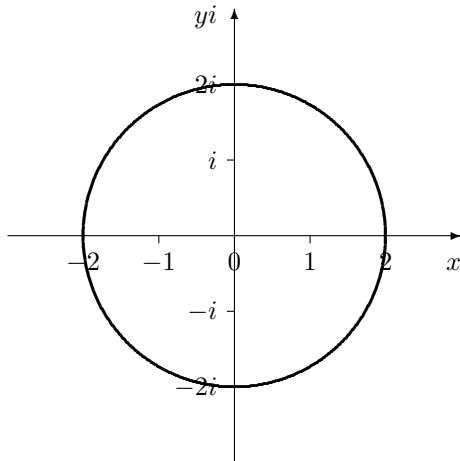
- (a) Die Gleichung beschreibt genau alle komplexen Zahlen mit dem Betrag 2, also den Kreis um den Nullpunkt mit Radius 2.

Rechnung: Mit $z = x + yi$ gilt

$$|z| = 2 \iff |x + yi| = 2 \iff |x + yi|^2 = 2^2 \iff x^2 + y^2 = 4.$$

Das ist die Gleichung des Kreises um 0 mit dem Radius 2.

Skizze:



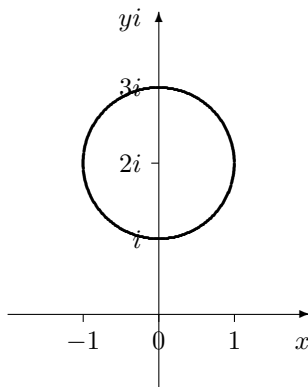
- (b) Die Gleichung beschreibt genau alle Punkte in der komplexen Ebene, die von dem Punkt $2i$ den Abstand 1 haben, also den Kreis um den Punkt $2i$ mit Radius 1.

Rechnung: Mit $z = x + yi$ gilt

$$|z - 2i| = 1 \iff |x + (y-2)i| = 1 \iff |x + (y-2)i|^2 = 1^2 \iff x^2 + (y-2)^2 = 1.$$

Das ist die Gleichung des Kreises mit dem Radius 1 um den Punkt $(0, 2)$.

Skizze:



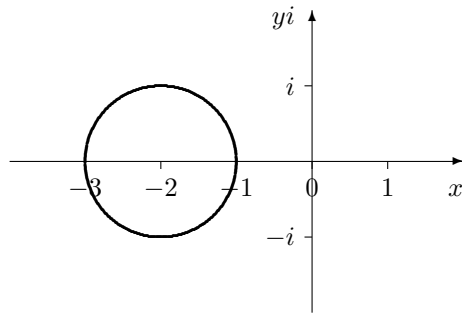
- (c) Wegen $|z + 2| = |z - (-2)|$ beschreibt die Gleichung genau alle Punkte in der komplexen Zahlenebene, die vom Punkt -2 den Abstand 1 haben, also den Kreis um den Punkt -2 mit Radius 1.

Rechnung: Mit $z = x + yi$ gilt

$$|z + 2| = 1 \iff |(x+2) + yi| = 1 \iff |(x+2) + yi|^2 = 1^2 \iff (x+2)^2 + y^2 = 1.$$

Das ist die Gleichung des Kreises mit dem Radius 1 um den Punkt $(-2, 0)$

Skizze:



- (d) Dieselbe Begründung wie in (c) zeigt: Die Ungleichung beschreibt das Innere des Kreises um den Punkt -2 mit Radius 1 .

Rechnung: Mit $z = x + yi$ gilt:

$$|z + 2| < 1 \iff |(x + 2) + yi|^2 < 1^2 \iff (x + 2)^2 + y^2 < 1.$$

Die Ungleichung kennzeichnet genau alle Punkte im Inneren des Kreises mit der Gleichung $(x + 2)^2 + y^2 = 1$.

Die Skizze ist im Prinzip die gleiche wie in (c), nur sind jetzt nicht die Punkte auf der Kreislinie sondern innerhalb gemeint.

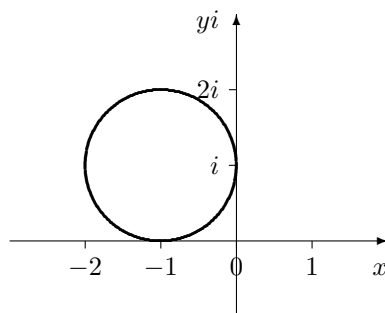
- (e) Wegen $z + 1 - i = z - (-1 + i)$ beschreibt die Ungleichung genau alle Punkte z , die von dem Punkt $-1 + i$ einen Abstand ≥ 1 haben, also alle Punkte, die auf oder außerhalb des Kreises um den Punkt $-1 + i$ mit dem Radius 1 liegen.

Rechnung: Mit $z = x + yi$ gilt

$$\begin{aligned} |z + 1 - i| \geq 1 &\iff |(x + 1) + (y - 1)i| \geq 1 \iff |(x + 1) + (y - 1)i|^2 \geq 1^2 \\ &\iff (x + 1)^2 + (y - 1)^2 \geq 1. \end{aligned}$$

Die Ungleichung beschreibt in der komplexen Ebene das Äußere des Kreises mit der Gleichung $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ inklusive der Kreislinie.

Skizze:



Gemeint sind alle Punkte auf der Kreislinie und die Punkte außerhalb.

- (f) Die Ungleichung beschreibt genau alle Punkte z in der komplexen Ebene, deren Argument sich von $\frac{\pi}{4}$ um höchstens $\frac{\pi}{2}$ unterscheidet, also alle Punkte z , deren Argument zwischen $-\frac{\pi}{4}$ und $\frac{3\pi}{4}$ liegt.

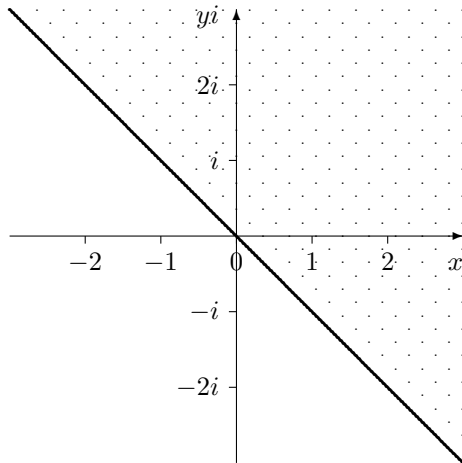
Rechnung:

$$\left| \arg z - \frac{\pi}{4} \right| \leq \frac{\pi}{2} \iff -\frac{\pi}{2} \leq \arg z - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} \iff -\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{4}.$$

Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid -\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{4} \right\}.$$

Skizze:



Die Lösungsmenge ist die Halbebene, die nach unten von den Winkelhalbierenden im 2. und 4. Quadranten begrenzt wird, inklusive der Winkelhalbierenden.

- (g) Wir beachten, dass die Bedingung $-\frac{\pi}{2} \leq \arg w \leq \frac{\pi}{2}$ genau alle Punkte $w \in \mathbb{C}$ charakterisiert, die in der rechten Halbebene der komplexen Ebene (einschließlich der imaginären Achse) liegen, also genau alle Punkte $w \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} w \geq 0$. Damit folgt:

$$|\arg(z-1)| \leq \frac{\pi}{2} \iff -\frac{\pi}{2} \leq \arg(z-1) \leq \frac{\pi}{2} \iff \operatorname{Re}(z-1) \geq 0$$

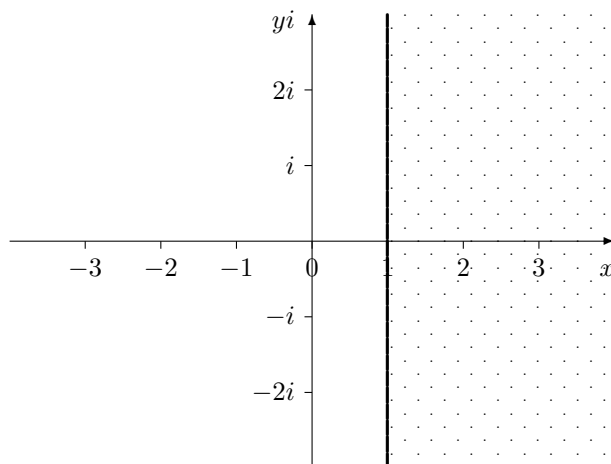
$$\iff \operatorname{Re}(x+yi-1) \geq 0 \iff x-1 \geq 0$$

$$\iff \operatorname{Re} z = x \geq 1.$$

Lösungsmenge:

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq 1\}.$$

Skizze:



Die Lösungsmenge ist die Halbebene, die nach links von der zur imaginären Achse parallelen Geraden durch den Punkt 1 (auf der reellen Achse) begrenzt wird, inklusive dieser Geraden.

Aufgabe 4

Wir quadrieren die Ungleichung und benutzen die in Satz 2.3.5 angegebene Formel für den Betrag einer komplexen Zahl. Dazu ist es erforderlich, die komplexe Zahl in der Normalform $z = x + yi$ darzustellen.

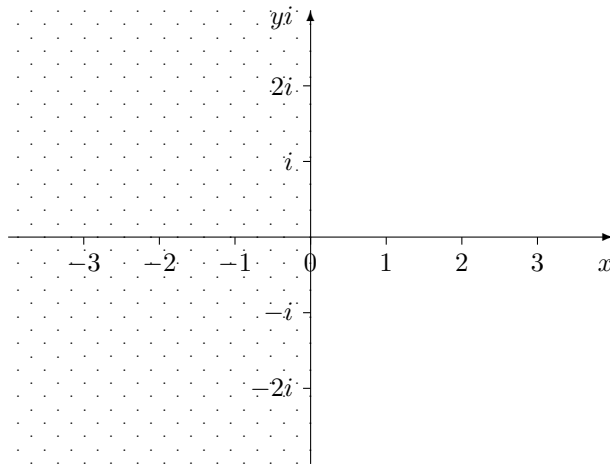
$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad |z + 1| < |z - 1| &\iff |x + yi + 1| < |x + yi - 1| \\
 &\iff |(x + 1) + yi| < |(x - 1) + yi| \\
 &\iff |(x + 1) + yi|^2 < |(x - 1) + yi|^2 \\
 &\iff (x + 1)^2 + y^2 < (x - 1)^2 + y^2 \\
 &\iff x^2 + 2x + 1 < x^2 - 2x + 1 \\
 &\iff 4x < 0 \iff x < 0.
 \end{aligned}$$

Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \{x + yi \in \mathbb{C} \mid x < 0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < 0\}.$$

Die Ungleichung charakterisiert also in der komplexen Ebene genau die linke Halbebene (ohne die imaginäre Achse).

Skizze:



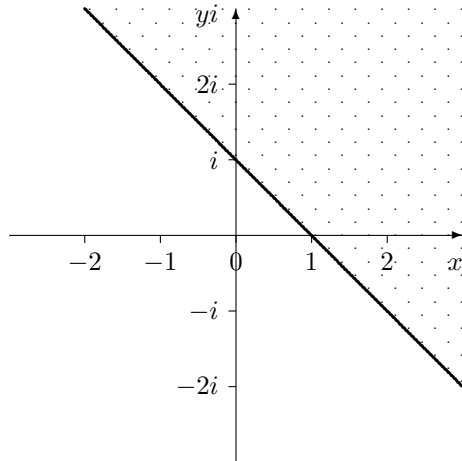
$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad |z - (1 + i)| \leq |z| &\iff |x + yi - 1 - i| \leq |x + yi| \\
 &\iff |(x - 1) + (y - 1)i| \leq |x + yi| \\
 &\iff |(x - 1) + (y - 1)i|^2 \leq |x + yi|^2 \\
 &\iff (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq x^2 + y^2 \\
 &\iff x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 \leq x^2 + y^2 \\
 &\iff 2 - 2x - 2y \leq 0 \iff 2x + 2y \geq 2 \iff x + y \geq 1.
 \end{aligned}$$

Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \{ x + yi \mid x + y \geq 1 \}.$$

Die Ungleichung charakterisiert in der komplexen Ebene die Halbebene, die nach unten von der Geraden mit der Gleichung $y = 1 - x$ begrenzt wird, inklusive dieser Geraden.

Skizze:



Abschnitt 2.4

Aufgabe 1

Da wir die Polardarstellungen der komplexen Zahlen $i, 1 \pm i, 1 + \sqrt{3}i$ sofort angeben können, ist es praktisch, den Quotienten (in Aufgabe (a)), die Potenz (in Aufgabe (b)) und das Produkt (in Aufgabe (c)) mit Hilfe von Satz 2.4.5 und Satz 2.4.6 zu bestimmen.

$$(a) \quad i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}, \quad 1 - i = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$$\implies \frac{i}{1 - i} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right),$$

$$(b) \quad 1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \quad (\text{siehe Beispiel (3), Seite 23})$$

$$\implies (1 + \sqrt{3}i)^{15} = 2^{15} (\cos 5\pi + i \sin 5\pi) = 2^{15} (\cos \pi + i \sin \pi) = -2^{15},$$

$$(c) \quad 1 \pm i = \sqrt{2} \left(\cos \left(\pm \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\pm \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$$\implies (1 + i)(1 - i) = \sqrt{2}\sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$$= 2(\cos 0 + i \sin 0) = 2.$$

Aufgabe 2

(a) Nach der Anmerkung hinter Satz 2.4.5 ist

$$\left| \frac{z - i}{z + i} \right| = \frac{|z - i|}{|z + i|}.$$

Setzen wir hier $z = x + yi$ und benutzen die in Satz 2.3.5 angegebene Formel für den Betrag komplexer Zahlen, so ergibt sich:

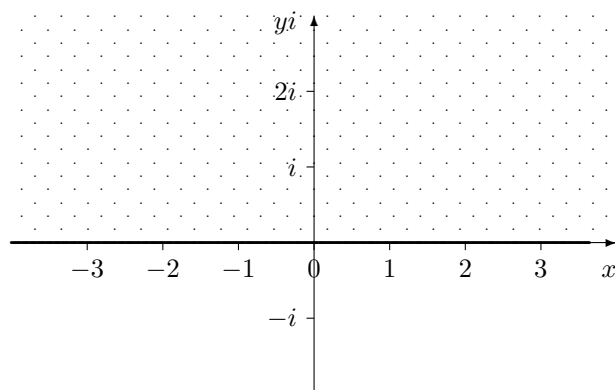
$$\begin{aligned}
 \left| \frac{z-i}{z+i} \right| \leq 1 &\iff \frac{|z-i|}{|z+i|} \leq 1 \iff |z-i| \leq |z+i| \\
 &\iff |x + (y-1)i|^2 \leq |x + (y+1)i|^2 \\
 &\iff x^2 + (y-1)^2 \leq x^2 + (y+1)^2 \\
 &\iff y^2 - 2y + 1 \leq y^2 + 2y + 1 \iff y \geq 0.
 \end{aligned}$$

Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0 \}.$$

Die Ungleichung charakterisiert in der komplexen Ebene genau die obere Halbebene (einschließlich der reellen Achse).

Skizze:



(b) Nach Satz 2.4.5 ist $\arg((1+i)z) = \arg(1+i) + \arg z = \frac{\pi}{4} + \arg z$. Damit folgt:

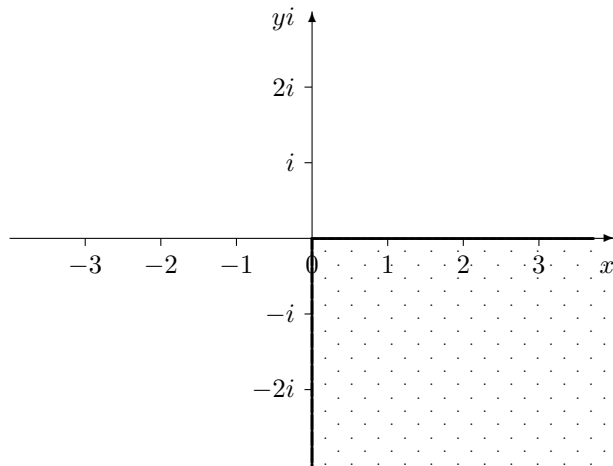
$$\begin{aligned}
 |\arg((1+i)z)| \leq \frac{\pi}{4} &\iff \left| \arg z + \frac{\pi}{4} \right| \leq \frac{\pi}{4} \iff -\frac{\pi}{4} \leq \arg z + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4} \\
 &\iff -\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq 0.
 \end{aligned}$$

Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid -\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq 0 \right\}.$$

Die Ungleichung charakterisiert in der komplexen Ebene genau den 4. Quadranten (einschließlich der ihn abgrenzenden Halbachsen).

Skizze:



(c) Nach Satz 2.4.5 ist $\arg \frac{z}{i} = \arg z - \arg i = \arg z - \frac{\pi}{2}$. Damit folgt:

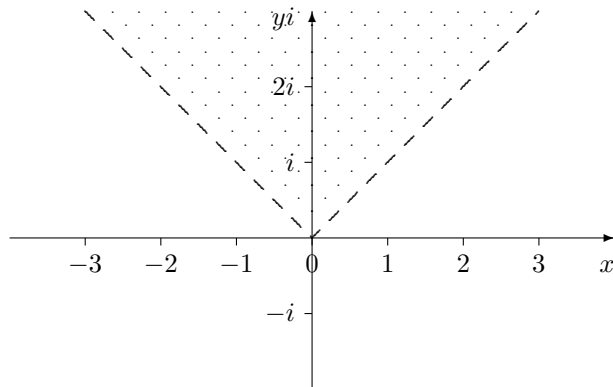
$$\begin{aligned} \left| \arg \frac{z}{i} \right| < \frac{\pi}{4} &\iff \left| \arg z - \frac{\pi}{2} \right| < \frac{\pi}{4} \iff -\frac{\pi}{4} < \arg z - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} \\ &\iff \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4} \right\}.$$

Die Ungleichung charakterisiert in der komplexen Ebene den Bereich zwischen den beiden Winkelhalbierenden in der oberen Halbebene.

Skizze:



Aufgabe 3

(a) Wir setzen $z_1 = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$ und $z_2 = 2e^{-\frac{\pi}{6}i}$. Dann gilt offenbar $|z_1| = |z_2| = 2$ und $\arg z_1 = \frac{\pi}{6}$, $\arg z_2 = -\frac{\pi}{6}$. Weiter folgt

$$z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \left(2 \cos \frac{\pi}{6} \right) + \left(2 \sin \frac{\pi}{6} \right) i$$

und daher

$$\operatorname{Re} z_1 = 2 \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}, \quad \operatorname{Im} z_1 = 2 \sin \frac{\pi}{6} = 1.$$

Ebenso gilt

$$\begin{aligned} z_2 &= 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right) \\ &= \left(2 \cos \frac{\pi}{6} \right) - \left(2 \sin \frac{\pi}{6} \right) i \end{aligned}$$

und daher

$$\operatorname{Re} z_2 = 2 \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}, \quad \operatorname{Im} z_2 = -2 \sin \frac{\pi}{6} = -1.$$

(b) Wie in Aufgabe 1 ist $1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$. Hieraus folgt

$$z_3 = (1 + \sqrt{3}i) e^{-\frac{\pi}{6}i} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) e^{-\frac{\pi}{6}i} = 2e^{\frac{\pi}{3}i} e^{-\frac{\pi}{6}i} = 2e^{(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6})i} = 2e^{\frac{\pi}{6}i}.$$

Also ist $z_3 = z_1$ aus Teil (a) und daraus liest man ab

$$|z_3| = 2, \quad \arg z_3 = \frac{\pi}{6}, \quad \operatorname{Re} z_3 = 2 \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}, \quad \operatorname{Im} z_3 = 2 \sin \frac{\pi}{6} = 1.$$

(c) Es gilt

$$z_4 = \cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} = \cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right)$$

und hieraus folgt

$$\operatorname{Re} z_4 = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \sqrt{3}, \quad \operatorname{Im} z_4 = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}, \quad |z_4| = 1, \quad \arg z_4 = -\frac{\pi}{6}.$$

Abschnitt 2.5

Aufgabe

Wir geben zuerst die Polardarstellung von -8 und 8 an:

$$(a) \quad |-8| = 8, \quad \arg(-8) = \pi \implies -8 = 8(\cos \pi + i \sin \pi),$$

$$(b) \quad |8| = 8, \quad \arg 8 = 0 \implies 8 = 8(\cos 0 + i \sin 0).$$

Nach der Formel in Abschnitt 2.5 (Seite 27) haben die Lösungen der Gleichungen $z^3 = -8$ und $z^3 = 8$ folgende Darstellung:

$$(a) \quad z_k = \sqrt[3]{8} e^{\pi i/3 + 2k\pi i/3} = \sqrt[3]{8} e^{(2k+1)\pi i/3} \quad (k = 0, 1, 2),$$

$$(b) \quad z_k = \sqrt[3]{8} e^{2k\pi i/3} \quad (k = 0, 1, 2).$$

Wir erhalten also die Lösungen:

$$(a) \quad z_0 = 2e^{\pi i/3} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 1 + \sqrt{3}i,$$

$$z_1 = 2e^{\pi i} = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = -2,$$

$$z_2 = 2e^{5\pi i/3} = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \bar{z}_0 ,$$

$$(b) \quad z_0 = 2e^0 = 2 ,$$

$$z_1 = 2e^{2\pi i/3} = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = -1 + \sqrt{3}i ,$$

$$z_2 = 2e^{4\pi i/3} = 2 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = \bar{z}_1 .$$

Anschaulich überzeugt man sich wie folgt davon, dass $z_k^3 = -8$ ist:

Trägt man den Winkel $\arg z_k$ dreimal hintereinander ab, so erhält man für jedes $k = 0, 1, 2$ den Winkel, dessen einer Schenkel die positive reelle Achse und dessen anderer Schenkel die negative reelle Achse ist, also den Winkel π . Der Schnittpunkt des zweiten Schenkels mit dem Kreis um 0 mit Radius 8 ist der Punkt -8 .

Entsprechendes gilt für die Lösungen z_k der Gleichung $z^3 = 8$.

Mathematik für Chemiker

Brunner, G.; Brück, R.

2013, IX, 374 S., Softcover

ISBN: 978-3-642-37504-0