

# Lösungen der Aufgaben zu Kapitel 3

## Abschnitt 3.1

### Aufgabe 1

$\mathbf{u} + \mathbf{v}$  ist die Diagonale  $\overrightarrow{AC}$  in dem von  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{v}$  aufgespannten Parallelogramm (Abb. 3.3 in Abschnitt 3.1). Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor.

- (1) Sind  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{v}$  nicht kollinear, so gilt Aussage (e). Denn dann ist das Parallelogramm nicht entartet und die Länge  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$  der Diagonale ist kürzer als die Summe  $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$  der Längen der zwei Seiten, es ist also  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| < \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ .
- (2) Sind  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{v}$  kollinear und haben sie dieselbe Richtung, so gilt die Aussage (a). Denn dann liegt  $B$  auf der Verbindungsstrecke von  $A$  und  $C$ , unterteilt diese also nur, und es ist

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{BC}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|.$$

- (3) Sind  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{v}$  kollinear und haben die entgegengesetzte Richtung, so können zwei Situationen eintreten:

- $\|\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\|$ . Dann liegt  $C$  auf der Verbindungsstrecke von  $A$  und  $B$ , und es gilt die Aussage (b):

$$\|\overrightarrow{AC}\| = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\overrightarrow{AB}\| - \|\overrightarrow{BC}\| = \|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\|.$$

- $\|\mathbf{v}\| > \|\mathbf{u}\|$ . Dann liegt  $A$  auf der Verbindungsstrecke von  $B$  und  $C$ , und es gilt die in der Aufgabe nicht formulierte Aussage:

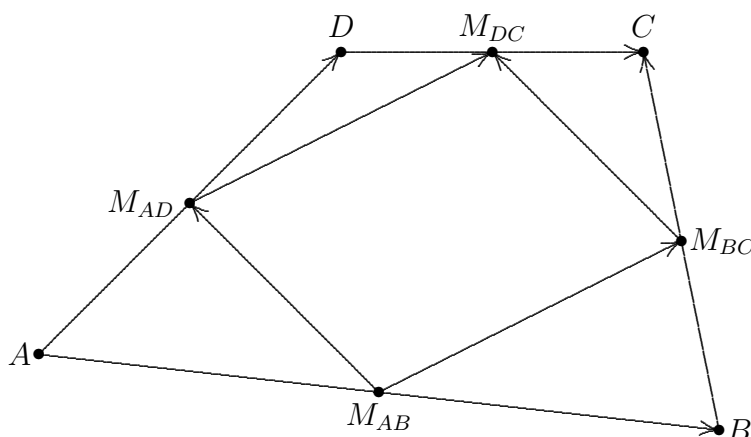
$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{BC}\| - \|\overrightarrow{AB}\| = \|\mathbf{v}\| - \|\mathbf{u}\|.$$

In allen drei Fällen (1), (2), (3) kann folgende besondere Bedingung vorliegen:  $\overrightarrow{AB}$  und  $\overrightarrow{AC}$  haben dieselbe Länge, d.h. der Punkt  $C$  liegt auf dem Kreis um  $A$  mit dem Radius  $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\mathbf{u}\|$ . Unter dieser Bedingung ist also  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = \|\mathbf{u}\|$ , gilt also Aussage (c).

Da mit den Fällen (1), (2), (3) eine vollständige Fallunterscheidung vorliegt, kann es einen anderen Fall nicht geben und kann daher die Aussage (d) nie erfüllt sein.

### Aufgabe 2

Wir betrachten die folgende Skizze:



Die Ortsvektoren der Punkte  $A, B, C, D$  bezeichnen wir mit  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ . Dann erhalten wir für die Ortsvektoren der Seitenmittelpunkte  $M_{AB}, M_{AB}, M_{AB}, M_{AB}$

$$\mathbf{m}_{AB} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}),$$

$$\mathbf{m}_{DC} = \frac{1}{2}(\mathbf{d} + \mathbf{c}),$$

$$\mathbf{m}_{AD} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{d}),$$

$$\mathbf{m}_{BC} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}).$$

Hieraus folgt dann

$$\mathbf{m}_{AD} - \mathbf{m}_{AB} = \frac{1}{2}(\mathbf{d} - \mathbf{b}) = \mathbf{m}_{DC} - \mathbf{m}_{BC},$$

$$\mathbf{m}_{AD} - \mathbf{m}_{DC} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{c}) = \mathbf{m}_{AB} - \mathbf{m}_{BC}.$$

Hieraus folgt dann sofort die Behauptung.

### Aufgabe 3

Im Anschluss an Abb. 3.1 haben wir festgestellt: Für zwei Punkte  $A$  und  $B$  mit den Koordinatendarstellungen  $A = (a_1, a_2, a_3)$  und  $B = (b_1, b_2, b_3)$  hat der Vektor  $\overrightarrow{AB}$  die Koordinatendarstellung

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt mit den Koordinatendarstellungen der hier gegebenen Punkte  $A, B, C, D$ :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7 - 4 \\ 9 - (-2) \\ -4 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 - 6 \\ 12 - 1 \\ -2 - 7 \end{pmatrix} = \overrightarrow{DC}$$

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 6 - 4 \\ 1 - (-2) \\ 7 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 - 7 \\ 12 - 9 \\ -2 - (-4) \end{pmatrix} = \overrightarrow{BC}.$$

Also liegen die vier Punkte in einer Ebene und in dem Viereck mit den Eckpunkten  $A, B, C, D$  sind die gegenüberliegenden Seiten  $\overline{AB}$  und  $\overline{CD}$  sowie  $\overline{AD}$  und  $\overline{BC}$  parallel. Daher sind die vier Punkte  $A, B, C, D$  die Eckpunkte eines Parallelogramms.

### Aufgabe 4

Wird der Vektor  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$  durch den Pfeil  $\overrightarrow{OU}$  veranschaulicht, so ist seine Norm  $\|\mathbf{u}\|$  die Länge dieses Pfeils (Definition 3.1.3). Wie Sie an Hand von Abb. 3.1 leicht nachvollziehen können, gilt nach dem Satz des Pythagoras:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$

Multiplizieren wir  $\mathbf{u}$  mit  $\frac{1}{\|\mathbf{u}\|}$ , so erhalten wir einen Einheitsvektor. Multiplizieren wir diesen mit 2, so erhalten wir den Vektor  $\tilde{\mathbf{u}}$  vom Betrag 2, der dieselbe Richtung wie  $\mathbf{u}$  hat, multiplizieren wir mit  $(-2)$ , so erhalten wir den Vektor  $-\tilde{\mathbf{u}}$  vom Betrag 2, der die entgegengesetzte Richtung wie  $\mathbf{u}$  hat. Entsprechendes gilt für  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{w}$ .

$$(a) \quad \|\mathbf{u}\| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{36} = 6 \implies \pm \tilde{\mathbf{u}} = \pm \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix},$$

$$(b) \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5 \implies \pm \tilde{\mathbf{v}} = \pm \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$(c) \quad \|\mathbf{w}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3 \implies \pm \tilde{\mathbf{w}} = \pm \left( \frac{4}{3} \mathbf{e}_1 + \frac{2}{3} \mathbf{e}_2 - \frac{4}{3} \mathbf{e}_3 \right).$$

## Abschnitt 3.2

### Aufgabe 1

Einen zu  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  senkrechten Vektor  $\mathbf{y}$  finden Sie, indem Sie die beiden Koordinaten von  $\mathbf{x}$  vertauschen und bei einer von ihnen dabei das Vorzeichen ändern, also  $y_1 = -x_2$  und  $y_2 = x_1$  setzen. Dann ist das Skalarprodukt der beiden Vektoren 0, und die Vektoren sind daher senkrecht zueinander (Satz 3.2.3, (4)):

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = x_1(-x_2) + x_2x_1 = 0.$$

Ist  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ , so bestimmt man einen zu  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  senkrechten Vektor  $\mathbf{y}$ , indem man zum Beispiel wie vorher  $y_1 = -x_2$  und  $y_2 = x_1$  wählt und  $y_3 = 0$  setzt. Wieder ist dann das Skalarprodukt 0, und die beiden Vektoren sind daher senkrecht zueinander.

Um einen Einheitsvektor zu erhalten, braucht man dann  $\mathbf{y}$  nur noch zu normieren, also mit  $\frac{1}{\|\mathbf{y}\|}$  zu multiplizieren.

$$(a) \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \|\mathbf{u}\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5 \implies \mathbf{v} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$(b) \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \|\mathbf{u}\| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{14} \implies \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(c) \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \|\mathbf{u}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14} \implies \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

### Aufgabe 2

Wir berechnen die Skalarprodukte je zweier der Vektoren. Nach Satz 3.2.3 (4) sind zwei Vektoren genau dann senkrecht zueinander, wenn ihr Skalarprodukt den Wert 0 hat.

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 0 + 3 \cdot 3 = 8 \neq 0,$$

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 3 + 3 \cdot (-1) = -6 \neq 0,$$

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) + 3 \cdot 0 = 3 \neq 0,$$

$$\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot 3 + 0 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) = -6 \neq 0,$$

$$\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1) \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 = -1 \neq 0,$$

$$\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 = 0.$$

Da nur das Skalarprodukt von  $\mathbf{u}_3$  und  $\mathbf{u}_4$  den Wert 0 hat, sind  $\mathbf{u}_3$  und  $\mathbf{u}_4$  die einzigen zueinander senkrechten Vektoren (Satz 3.2.3 (4)).

### Aufgabe 3

Um den Cosinus des Winkels  $\alpha$  zwischen  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{v}$  zu bestimmen, berechnen wir  $\|\mathbf{u}\|$ ,  $\|\mathbf{v}\|$  und das Skalarprodukt von  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  und wenden dann die Formel (2) in Folgerung 3.2.4 an. Durch seinen Cosinuswert ist dann der Winkel  $\alpha \in [0, \pi]$  eindeutig bestimmt.

$$(a) \quad \|\mathbf{u}\| = \sqrt{10}, \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{5}, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 5$$

$$\implies \cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{10}\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \implies \alpha = \frac{\pi}{4},$$

$$(b) \quad \|\mathbf{u}\| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}, \quad \|\mathbf{v}\| = 25, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 125$$

$$\implies \cos \alpha = \frac{125}{5\sqrt{2} \cdot 25} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \implies \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

### Aufgabe 4

Wir berechnen zuerst  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  und  $\mathbf{u} - \mathbf{v}$  und dann deren Skalarprodukt.

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2t \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} t \\ t+3 \\ 2 \end{pmatrix} \implies \mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3t \\ t+5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} - \mathbf{v} = \begin{pmatrix} t \\ -t-1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 3t \\ t+5 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ -t-1 \\ -1 \end{pmatrix} = 3t^2 + (t+5)(-t-1) - 3$$

$$= 2t^2 - 6t - 8 = 2(t^2 - 3t - 4).$$

Wir setzen das Skalarprodukt gleich 0 (Satz 3.2.3 (4)) und erhalten damit die Bestimmungsgleichung  $t^2 - 3t - 4 = 0$  für  $t$ . Hieraus folgt  $t = 4$  oder  $t = -1$ . Genau für die Werte  $t \in \{-1, 4\}$  sind somit  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  und  $\mathbf{u} - \mathbf{v}$  senkrecht zueinander.

### Aufgabe 5

Wir berechnen die Vektorprodukte nach der Formel in Satz 3.2.7 (6) oder auch so, wie in dem Rezept dazu angegeben.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3 \\ &= (-4 + 6)\mathbf{e}_1 - (8 - 9)\mathbf{e}_2 + (-4 + 3)\mathbf{e}_3 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - 2 \\ -(2 - 8) \\ 2 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

### Aufgabe 6

Das Dreieck hat den halben Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den Vektoren

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird. Nach Ergebnis 3.2.6 hat das von diesen zwei Vektoren  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{v}$  aufgespannte Parallelogramm den Flächeninhalt

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 4 - 12 \\ 2 + 6 \\ 2 + 2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{144} = 12.$$

Flächeninhalt des Dreiecks: 6 (Flächeneinheiten).

### Aufgabe 7

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= 1 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 0 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 \\ &= -1 + 3 - 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1-i & i \\ 1+i & 2 & -1+i \\ i & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot (-1) + (1-i) \cdot (-1+i) \cdot i + i \cdot (1+i) \cdot 1$$

$$\begin{aligned}
& -i \cdot 2 \cdot i - 1 \cdot (-1 + i) \cdot 1 - (-1) \cdot (1 + i) \cdot (1 - i) \\
& = -2 - i(1 - i)^2 + i + i^2 - 2i^2 + 1 - i + (1 - i)(1 + i) \\
& = -2 - i(1 - 2i + i^2) - i^2 + 1 + 1 - i^2 \\
& = -2 - i + 2i^2 - i^3 - 2i^2 + 2 = -i - (-1)i = -i + i = 0.
\end{aligned}$$

### Aufgabe 8

Nach Folgerung 3.2.11 sind die drei Vektoren genau dann nicht komplanar, wenn ihr Spatprodukt  $\neq 0$  ist. Nach Satz 3.2.13 ist das Spatprodukt gleich der Determinante, deren Spalten die drei Vektoren sind. Wir berechnen zuerst (nach der Regel von Sarrus) diese Determinante.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} t & 1 & -1 \\ 1 & 0 & t \\ 2 & t & 0 \end{vmatrix} &= t \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot t \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot t - 2 \cdot 0 \cdot (-1) - t \cdot t \cdot t - 0 \cdot 1 \cdot 1 \\
&= 2t - t - t^3 = t - t^3 = -t(t^2 - 1).
\end{aligned}$$

Die Determinante ist genau dann gleich 0, wenn  $t = 0$  oder  $t = \pm 1$  ist. Also sind die drei Vektoren genau dann nicht komplanar, wenn  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, 1\}$  ist.

### Aufgabe 9

Wir berechnen mit den gegebenen Vektoren die beiden Seiten des Graßmannschen Entwicklungssatzes (Satz 3.2.14) und überzeugen uns davon, dass beide Ergebnisse übereinstimmen.

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2+2 \\ -4-1 \\ 4-1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+0 \\ 3+0 \\ 5-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -1 + 4 + 0 = 3, \\
\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -2 + 2 - 0 = 0.
\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}).$$

## Aufgabe 10

Wir berechnen mit den gegebenen Vektoren die beiden Seiten der angegebenen Identität und überzeugen uns davon, dass beide Ergebnisse übereinstimmen.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 + 18 \\ 18 - 6 \\ -9 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 + 6 \\ 4 - 6 \\ -1 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{w} \times \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 20 \\ -6 + 12 \\ 5 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Nach Satz 3.2.13 und mit der Regel von Sarrus erhalten wir dann:

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{v} \times \mathbf{w}, \mathbf{w} \times \mathbf{u}) &= \begin{vmatrix} -12 & -6 & -14 \\ 12 & -2 & 6 \\ -4 & 2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (-12) \cdot (-2) \cdot 2 + (-6) \cdot 6 \cdot (-4) + (-14) \cdot 12 \cdot 2 \\ &\quad - (-4) \cdot (-2) \cdot (-14) - 2 \cdot 6 \cdot (-12) - 2 \cdot 12 \cdot (-6) \\ &= 48 + 144 - 336 + 112 + 144 + 144 = 256. \end{aligned}$$

Andererseits gilt:

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 3 \cdot (-3) \cdot 4 + (-1) \cdot 1 \cdot 6 + 1 \cdot 5 \cdot (-6) \\ &\quad - 6 \cdot (-3) \cdot 1 - (-6) \cdot 1 \cdot 3 - 4 \cdot 5 \cdot (-1) \\ &= -36 - 6 - 30 + 18 + 18 + 20 = -16. \end{aligned}$$

Damit folgt schließlich:

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{v} \times \mathbf{w}, \mathbf{w} \times \mathbf{u}) = 256 = (-16)^2 = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})^2.$$

## Abschnitt 3.3

### Aufgabe 1

Wir bezeichnen mit  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  die Ortsvektoren der Punkte  $A$ ,  $B$ . Ihre Koordinatendarstellungen sind durch die Koordinatendarstellungen der Punkte gegeben (Bemerkung zu Definition 3.3.1).

- (a) Der Vektor  $\mathbf{b} - \mathbf{a}$  ist ein Richtungsvektor der Geraden durch  $A$  und  $B$ , und nach Satz 3.3.2 lautet eine Parameterdarstellung der Geraden:  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

$$\mathbf{b} - \mathbf{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- (b) Wie in Teil (a) gilt

$$\mathbf{b} - \mathbf{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- (c) Gegeben ist der Punkt  $A$  auf der Geraden mit dem Ortsvektor  $\mathbf{a}$  und der Richtungsvektor  $\mathbf{u}$  der Geraden. Wie im Anschluss an Satz 3.3.2 bemerkt, ist eine Parameterdarstellung dann gegeben durch

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- (d) Die Gerade ist durch ihre Koordinatengleichung in der  $(x, y)$ -Ebene gegeben. Wir führen einen Parameter  $t$  ein, indem wir  $t = x$  setzen (wie im Beispiel (2), Seite 48/49). Dann ist  $y = -2t + 3$ , und es gilt

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -2t + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Eine Parameterdarstellung der Geraden ist also

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

## Aufgabe 2

Die Punkte  $A_1, A_2, A_5$  liegen auf einer Geraden, denn  $\overrightarrow{A_1 A_2}$  und  $\overrightarrow{A_1 A_5}$  sind kollinear:

$$\overrightarrow{A_1 A_2} = \begin{pmatrix} 0 + 2 \\ -3 - 1 \\ 4 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + 2 \\ 3 - 1 \\ 1 - 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{A_1 A_5}.$$

Die Gerade durch die Punkte  $A_1, A_2$  hat nach Satz 3.3.2 die Parameterdarstellung

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Die Punkte  $A_3$  und  $A_4$  liegen nicht auf dieser Geraden, denn setzen wir für  $\mathbf{x}$  den Ortsvektor von  $A_3$  bzw.  $A_4$  in die Parameterdarstellung ein, so erhalten wir in beiden Fällen jeweils drei Gleichungen für  $t$ , die sich widersprechen:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{l} -1 = 2t \\ 2 = -4t \\ 0 = 2t \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{l} 5 = 2t \\ -7 = -4t \\ 0 = 2t \end{array}.$$

Es ist jetzt nur noch zu prüfen, ob einer der drei Punkte  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_5$  auf der Geraden durch  $A_3$ ,  $A_4$  liegt. Es ist

$$\overrightarrow{A_3 A_4} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Eine Parameterdarstellung der Geraden durch  $A_3$  und  $A_4$  lautet

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Die Punkte  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_5$  liegen nicht auf dieser Geraden, denn setzen wir für  $\mathbf{x}$  den Ortsvektor von  $A_1$  bzw.  $A_2$  bzw.  $A_5$  in die Parameterdarstellung ein, so erhalten wir in allen Fällen jeweils drei Gleichungen für  $t$ , die sich widersprechen:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{l} 1 = 6t \\ -2 = -9t \\ 0 = 0t \end{array},$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{l} 3 = 6t \\ -6 = -9t \\ 2 = 0t \end{array},$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{l} 0 = 6t \\ 0 = -9t \\ -1 = 0t \end{array}.$$

**Ergebnis:** Die einzigen drei Punkte, die auf einer Geraden liegen, sind  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_5$ .

### Aufgabe 3

Die Koordinatendarstellungen der Ortsvektoren  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  von  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sind durch die Koordinatendarstellungen der Punkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$  gegeben (Bemerkung zu Definition 3.3.1). Der Richtungsvektor  $\mathbf{b} - \mathbf{a}$  und eine Parameterdarstellung der Geraden  $g$  lauten dann nach Satz 3.3.2:

$$\mathbf{b} - \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Wir setzen den Ortsvektor  $\mathbf{c}$  des Punktes  $C$  in die Parameterdarstellung von  $g$  ein und erhalten eine Vektorgleichung, die eine Bestimmungsgleichung für den zu  $C$  gehörenden Parameter  $t$  ist (natürlich hat diese nur dann eine Lösung, wenn  $C$  tatsächlich ein Punkt auf  $g$  ist):

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \iff -1 = 2t \iff t = -\frac{1}{2}.$$

Der zu  $C$  gehörende Parameter ist also  $t = -\frac{1}{2}$ .

#### Aufgabe 4

Wir stellen zuerst die Normalengleichungen und daraus die Koordinatengleichungen der Ebenen auf.

- (a) Die Ebene ist durch den Punkt  $A$  mit dem Ortsvektor  $\mathbf{a}$  und den Normalenvektor  $\mathbf{n}$  gegeben. Die Normalengleichung kann damit nach Satz 3.3.4 sofort aufgeschrieben werden:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad \left( \mathbf{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = 0.$$

Hieraus ergibt sich die Koordinatengleichung

$$3x - 6y + 2z = 9 - 12 + 2 = -1.$$

- (b) Die Ebene ist durch die drei Punkte  $P_1, P_2, P_3$  gegeben. Daher sind die Vektoren  $\mathbf{u} = \overrightarrow{P_1P_2}$  und  $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_3}$  Richtungsvektoren der Ebene und ihr Vektorprodukt ist ein Normalenvektor  $\mathbf{n}$  der Ebene (Siehe Beispiel (2) auf Seite 51/52):

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 - 0 \\ 0 + 12 \\ 0 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Mit dem Ortsvektor von  $P_1$  und dem Normalenvektor  $\mathbf{n}$  lautet die Normalengleichung:

$$\left( \mathbf{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix} = 0.$$

Hieraus ergibt sich die Koordinatengleichung

$$-6x + 12y - 4z = -6 + 12 - 4 = 2 \quad \text{oder} \quad 3x - 6y + 2z = -1.$$

- (c) Diese Ebene ist bereits durch eine Koordinatengleichung gegeben, nämlich

$$2x + 3y + 6z = 5.$$

- (d) Die Ebene ist durch den Ortsvektor des Punktes  $Q$  und zwei Richtungsvektoren  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  der Ebene gegeben. Wir bilden deren Vektorprodukt und erhalten einen Normalenvektor

$$\mathbf{n} = \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 4 \\ -3 + 12 \\ 6 + 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 18 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Die Normalengleichung der Ebene lautet

$$\left( \mathbf{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 0.$$

Hieraus ergibt sich die Koordinatengleichung

$$2x + 3y + 6z = 4 - 3 + 12 = 13.$$

Diskussion der gegenseitigen Lage der vier Ebenen:

Durch (a) und (b) ist dieselbe Ebene  $E$  bestimmt, da die Koordinatengleichungen identisch sind.

Wir sehen an den Koordinatengleichungen, dass die Ebenen in (c) und (d) parallel und nicht gleich sind.

Die beiden (parallelen) Ebenen in (c) und (d) besitzen den Normalenvektor (dessen Koordinaten bestehen aus den Koeffizienten der Koordinatengleichung)

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Daher stehen beide Ebenen senkrecht auf der Ebene  $E$  (in (a) und (b)), denn das Skalarprodukt ihrer Normalenvektoren ist 0:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-6) + 6 \cdot 2 = 0.$$

### Aufgabe 5

Die Parameterdarstellung der Geraden  $g$  und die Normalendarstellung der Ebene  $E$  sind nach Satz 3.3.2 und Satz 3.3.4 gegeben durch

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \left( \mathbf{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} = 0.$$

Hieraus ergibt sich die Koordinatengleichung von  $E$ :

$$4x + 7y + 4z = 7.$$

Wir setzen die Parameterdarstellung von  $g$  in die Koordinatengleichung von  $E$  ein und erhalten eine Gleichung, aus der wir den Parameter  $t$  des Schnittpunktes gewinnen:

$$\begin{aligned} 4(4 + 2t) + 7(-1 - t) + 4(4 + 2t) &= 7 \iff 16 + 8t - 7 - 7t + 16 + 8t = 7 \\ &\iff 9t = -18 \iff t = -2. \end{aligned}$$

Diesen Wert  $t = -2$  setzen wir in die Parameterdarstellung der Geraden ein und finden so den Schnittpunkt  $S$  mit dem Ortsvektor  $\mathbf{s}$ :

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene ist also der Punkt  $S = A = (0, 1, 0)$ . Der Winkel zwischen  $g$  und dem Normalenvektor ist der Winkel zwischen dem Richtungsvektor  $\mathbf{u}$  von  $g$  und dem Normalenvektor  $\mathbf{v}$ . Wir berechnen  $\|\mathbf{u}\|$ ,  $\|\mathbf{v}\|$  und das Skalarprodukt  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ . Nach Formel (2) in Folgerung 3.2.4 bestimmen wir damit den Cosinus des Winkels und daraus einen Näherungswert für den Schnittwinkel  $\alpha$ :

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3, \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{4^2 + 7^2 + 4^2} = \sqrt{81} = 9,$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot 4 + (-1) \cdot 7 + 2 \cdot 4 = 9$$

$$\implies \cos \alpha = \frac{9}{9 \cdot 3} = \frac{1}{3} \implies \alpha \approx 70.5^\circ.$$

## Abschnitt 3.5

### Aufgabe 1

Um festzustellen, ob  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{w}$  Linearkombinationen der Vektoren  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  sind, machen wir die Ansätze

$$(a) \quad x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + x_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{u} \quad \text{und} \quad (b) \quad x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + x_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{w}.$$

Wir setzen hier die Koordinatendarstellungen der Vektoren  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  ein, erhalten ein lineares Gleichungssystem und bestimmen dessen Lösungen:

$$(a) \quad x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + 3x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & x_3 = 3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 & = & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \xrightarrow{(2) \rightarrow (2) - (1)} & x_1 + & x_2 + 3x_3 = 2 \\ \xrightarrow{(3) \rightarrow (3) + (1)} & - & x_2 - 2x_3 = 1 \\ & 2x_2 + 4x_3 & = 8 \end{array} \quad \xrightarrow{(3) \rightarrow (3) + 2 \cdot (2)} \quad \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + 3x_3 & = & 2 \\ - & x_2 - 2x_3 & = 1 \\ & 0x_3 & = 10 \end{array}$$

Das Gleichungssystem hat keine Lösung, denn die dritte Gleichung kann durch keine Wahl von  $x_1, x_2, x_3$  erfüllt werden. Daher ist der Vektor  $\mathbf{u}$  nicht als Linearkombination von  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  darstellbar.

$$(b) \quad x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + 3x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & x_3 = -2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 & = & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \xrightarrow{(2) \rightarrow (2) - (1)} & x_1 + & x_2 + 3x_3 = 2 \\ \xrightarrow{(3) \rightarrow (3) + (1)} & - & x_2 - 2x_3 = -4 \\ & 2x_2 + 4x_3 & = 8 \end{array} \quad \xrightarrow{(3) \rightarrow (3) + 2 \cdot (2)} \quad \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + 3x_3 & = & 2 \\ - & x_2 - 2x_3 & = -4 \\ & 0x_3 & = 0 \end{array}$$

Wir setzen  $x_3 = t$ . Dabei ist  $t$  ein Parameter und kann beliebige Werte aus  $\mathbb{R}$  annehmen. Dann ist  $x_2 = 4 - 2t$  und  $x_1 = -2 - t$ . Der Vektor  $\mathbf{w}$  kann somit auf unendlich viele Arten als Linearkombination von  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  dargestellt werden:

$$\mathbf{w} = (-2 - t)\mathbf{v}_1 + (4 - 2t)\mathbf{v}_2 + t\mathbf{v}_3 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Nach (a) kann der Vektor  $\mathbf{u}$  nicht als Linearkombination der drei Vektoren  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  dargestellt werden. Also bilden die drei Vektoren keine Basis von  $\mathbb{R}^3$  und sind daher nach Ergebnis 3.5.15 und Folgerung 3.5.16 linear abhängig.

## Aufgabe 2

Der Ansatz  $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}$  liefert ein lineares Gleichungssystem mit komplexen Zahlen als Koeffizienten. Ein solches wird auf dieselbe Weise gelöst wie ein Gleichungssystem mit reellen Koeffizienten:

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 1+i \\ 2i \end{pmatrix} \iff \begin{array}{rcl} x_1 & + & ix_3 = i \\ & x_2 + & x_3 = 1+i \\ ix_1 + ix_2 & & = 2i \end{array}$$

$$\xrightarrow{(3) \rightarrow (3) - i \cdot (1)} \begin{array}{rcl} x_1 & + & ix_3 = i \\ & x_2 + & x_3 = 1+i \\ ix_2 & & x_3 = 1+2i \end{array} \xrightarrow{(3) \rightarrow (3) - i \cdot (2)} \begin{array}{rcl} x_1 & + & ix_3 = i \\ & x_2 + & x_3 = 1+i \\ & & (1-i)x_3 = 2+i \end{array}$$

Jetzt können wir nacheinander  $x_3$  aus der dritten Gleichung,  $x_2$  aus der zweiten Gleichung und  $x_1$  aus der ersten Gleichung bestimmen:

$$x_3 = \frac{2+i}{1-i} = \frac{(2+i)(1+i)}{1^2+1^2} = \frac{1}{2}(2-1+3i) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i,$$

$$x_2 = 1+i - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i,$$

$$x_1 = i - i\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right) = \frac{1}{2}i - \frac{3}{2}i^2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Damit hat  $\mathbf{u}$  folgende Darstellung als Linearkombination von  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ :

$$\mathbf{u} = \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right) \mathbf{v}_1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) \mathbf{v}_2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right) \mathbf{v}_3.$$

## Aufgabe 3

Wir wählen einen zu  $\mathbf{v}_1$  senkrechten Vektor in der Weise, wie wir es in Aufgabe (1) zu Abschnitt 3.2 beschrieben haben, vertauschen also die ersten beiden Koordinaten von  $\mathbf{v}_1$ , ändern das Vorzeichen bei  $-1$  und wählen als dritte Koordinate 0:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist tatsächlich  $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ . Nun bestimmen wir  $\mathbf{v}_3$  als das Vektorprodukt von  $\mathbf{v}_1$  und  $\mathbf{v}_2$ :

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-6 \\ 3-0 \\ 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Als paarweise zueinander senkrechte Vektoren sind  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  nicht komplanar, bilden also nach Folgerung 3.5.16 eine Basis von  $\mathbb{R}^3$ .

## Aufgabe 4

Da nach Folgerung 3.5.13 drei linear unabhängige Vektoren des  $\mathbb{R}^3$  eine Basis von  $\mathbb{R}^3$  bilden, ist nur zu prüfen, ob  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$  linear unabhängig sind. Dazu machen wir den Ansatz

$$x_1 \mathbf{w}_1 + x_2 \mathbf{w}_2 + x_3 \mathbf{w}_3 = \mathbf{0}$$

und untersuchen, ob die Koeffizienten alle den Wert 0 haben müssen oder nicht. Wir setzen in den Ansatz die gegebenen Darstellungen von  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$  ein und erhalten die Gleichung

$$x_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) + x_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) + x_3(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = \mathbf{0}$$

und hieraus

$$(x_1 + x_3)\mathbf{v}_1 + (-x_1 + x_2 - x_3)\mathbf{v}_2 + (-x_2 + x_3)\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}.$$

Nach Voraussetzung sind  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  linear unabhängig. Also sind die Koeffizienten bei  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  in dieser Gleichung 0. Das liefert uns das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Addition der ersten beiden Gleichungen liefert sofort  $x_2 = 0$ . Aus der dritten Gleichung folgt dann  $x_3 = 0$  und aus der ersten Gleichung schließlich  $x_1 = 0$ . Daher sind  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$  linear unabhängig, bilden also eine Basis von  $\mathbb{R}^3$ .

## Aufgabe 5

Wir untersuchen zuerst, ob die Vektoren linear abhängig sind. Dazu machen wir den Ansatz  $x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + x_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ , setzen für  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  die Koordinatendarstellungen ein und lösen das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcl} -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 & \begin{array}{c} (2) \rightarrow (2) + 2 \cdot (1) \\ (3) \rightarrow (3) + (1) \end{array} & -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 & & 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 0 & & -3x_2 - x_3 = 0 \end{array}$$

Da die zweite und dritte Gleichung identisch sind, können wir  $x_2$  oder  $x_3$  beliebig wählen. Wir setzen  $x_2 = t$ . Dann ist  $x_3 = -3t$  und  $x_1 = -5t$ . Es gibt also die unendlich vielen Lösungen  $(x_1, x_2, x_3) = (-5t, t, -3t)$  mit  $t \in \mathbb{R}$ . Speziell gilt mit  $t = \frac{1}{3}$

$$-\frac{5}{3} \mathbf{v}_1 + \frac{1}{3} \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \implies \mathbf{v}_3 = -\frac{5}{3} \mathbf{v}_1 + \frac{1}{3} \mathbf{v}_2.$$

Also ist  $\mathbf{v}_3$  als Linearkombination von  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  darstellbar, und es folgt

$$\mathbf{L}(\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}) = \mathbf{L}(\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}).$$

Offensichtlich sind  $\mathbf{v}_1$  und  $\mathbf{v}_2$  nicht kollinear und somit linear unabhängig. Daher ist  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$  eine Basis von  $\mathbf{L}(\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\})$ .

## Aufgabe 6

Wir fügen zu den beiden Vektoren aus  $A$  einen dritten hinzu:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Diese drei Vektoren bilden eine Basis von  $\mathbb{R}^3$ . Nach Folgerung 3.5.16 brauchen wir dazu nur zu zeigen, dass sie nicht komplanar sind, also die Determinante mit den Vektoren als Spalten einen Wert  $\neq 0$  hat (Folgerung 3.2.11 und Satz 3.2.13). Wir berechnen die Determinante nach der Regel von Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 + 0 - 0 - 2 - 0 = -3 \neq 0.$$

## Abschnitt 3.6

### Aufgabe

- (a) Wir berechnen die Vektoren  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$ ,  $\mathbf{u}_3$  der Orthonormalbasis von  $\mathbb{R}^3$  nach dem in Satz 3.6.9 angegebenen Verfahren.

Berechnung von  $\mathbf{u}_1$ :

$$\|\mathbf{v}_1\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{3} \implies \mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnung von  $\mathbf{u}_2$ :

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\|\tilde{\mathbf{u}}_2\|} \tilde{\mathbf{u}}_2 \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1) \mathbf{u}_1.$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_2\| = \sqrt{2} \implies \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnung von  $\mathbf{u}_3$ :

$$\mathbf{u}_3 = \frac{1}{\|\tilde{\mathbf{u}}_3\|} \tilde{\mathbf{u}}_3 \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{u}}_3 = \mathbf{v}_3 - (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1) \mathbf{u}_1 - (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2) \mathbf{u}_2.$$

Wir berechnen zuerst die beiden Skalarprodukte:

$$\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{6}{\sqrt{3}},$$

$$\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{4}{\sqrt{2}}.$$

Mit diesen erhalten wir

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}_3 &= \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{6}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(-\frac{4}{\sqrt{2}}\right) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_3\| = \sqrt{6} \implies \mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Orthonormalbasis ist also

$$\left\{ \mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

- (b) Wenn wir die Skalarprodukte der vier gegebenen Vektoren bilden, stellen wir fest, dass zum Beispiel die Vektoren  $\mathbf{v}_3$  und  $\mathbf{v}_4$  bereits orthogonal sind. Daher genügt es, sie zu normieren, um bereits zwei Vektoren der gesuchten Orthonormalbasis zu erhalten. Damit wir dann das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren anwenden können, ist es praktisch, die gegebenen Vektoren neu zu nummerieren. Aus rechentechnischen Gründen ist die folgende Nummerierung günstig:

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wie bemerkt brauchen wir  $\mathbf{w}_1$  und  $\mathbf{w}_2$  nur noch zu normieren, weil sie bereits orthogonal sind:

$$\|\mathbf{w}_1\| = \sqrt{6} \implies \mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \|\mathbf{w}_2\| = \sqrt{2} \implies \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnung von  $\mathbf{u}_3$ :

$$\mathbf{u}_3 = \frac{1}{\|\tilde{\mathbf{u}}_3\|} \tilde{\mathbf{u}}_3 \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{u}}_3 = \mathbf{w}_3 - (\mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 - (\mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2.$$

Wir berechnen zuerst die beiden Skalarprodukte:

$$\mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{u}_1 = -\frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Mit diesen erhalten wir:

$$\tilde{\mathbf{u}}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_3\| = \frac{2}{3}\sqrt{3} \implies \mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnung von  $\mathbf{u}_4$ :

$$\mathbf{u}_4 = \frac{1}{\|\tilde{\mathbf{u}}_4\|} \tilde{\mathbf{u}}_4 \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{u}}_4 = \mathbf{w}_4 - (\mathbf{w}_4 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 - (\mathbf{w}_4 \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 - (\mathbf{w}_4 \cdot \mathbf{u}_3)\mathbf{u}_3.$$

Wir berechnen zuerst die drei Skalarprodukte:

$$\mathbf{w}_4 \cdot \mathbf{u}_1 = \frac{4}{\sqrt{6}}, \quad \mathbf{w}_4 \cdot \mathbf{u}_2 = 0, \quad \mathbf{w}_4 \cdot \mathbf{u}_3 = -\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Mit diesen erhalten wir:

$$\tilde{\mathbf{u}}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da  $\|\tilde{\mathbf{u}}_4\| = 1$  ist, brauchen wir  $\tilde{\mathbf{u}}_4$  nicht mehr zu normieren, und es ist  $\mathbf{u}_4 = \tilde{\mathbf{u}}_4$ .

Die Orthonormalbasis ist also

$$\left\{ \mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

## Abschnitt 3.7

### Aufgabe 1

$$(a) \quad A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B - A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix},$$

$$A^T + B^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix},$$

$$B^T B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 29 & -12 \\ 0 & -12 & 5 \end{pmatrix},$$

$$(b) \quad (A+B)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$(B-A)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

## Aufgabe 2

Nach Definition 3.7.9 ist das Produkt zweier Matrizen nur definiert, wenn die Spaltenzahl der ersten gleich der Zeilenzahl der zweiten Matrix ist.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 & -3 \\ -8 & 8 & 8 & -8 \end{pmatrix},$$

$$AE = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 15 \\ 30 & 55 \\ -41 & -12 \end{pmatrix},$$

$$BC = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix},$$

$$CD = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix} (-1 \ 2 \ 0 \ 8) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 16 & 0 & 64 \\ 7 & -14 & 0 & -56 \end{pmatrix},$$

$$DC = (-1 \ 2 \ 0 \ 8) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix} = (-57).$$

### Aufgabe 3

- (a) Wir entwickeln die Determinante nach ihrer vierten Spalte und dann die dreireihigen Determinanten nach der zweiten bzw. nach der ersten Zeile (Satz 3.7.12).

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ -4 & 1 & 2 & -1 \\ 6 & 5 & 0 & 0 \\ -5 & -5 & -8 & 0 \end{vmatrix} &= (-4) \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & 0 \\ -5 & -5 & -8 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 6 & 5 & 0 \\ -5 & -5 & -8 \end{vmatrix} \\ &= (-4)(-6) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -8 \end{vmatrix} + (-4) \cdot 5 \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -5 & -8 \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1) \cdot 1 \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -5 & -8 \end{vmatrix} + (-1) \cdot 2 \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} \\ &= 24(-8 + 10) - 20(32 + 10) - (-40) - 2(-30 + 25) \\ &= 48 - 840 + 40 + 10 = -742. \end{aligned}$$

- (b) Wir entwickeln die Determinante nach der zweiten Spalte (Satz 3.7.12) und berechnen dann die dreireihigen Determinanten nach der Regel von Sarrus (Satz 3.2.12).

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} &= (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -(1 + 4 + 2 - (-2) - 4 - (-1)) \\ &\quad - (1 + (-6) + 4 - 4 - (-2) - 3) = -6 - (-6) = 0. \end{aligned}$$

## Abschnitt 3.8

### Aufgabe 1

- (a) Wir nehmen die elementaren Umformungen  $Z_1 \rightarrow Z_1 + Z_3$  und danach  $S_1 \rightarrow S_1 - 2 \cdot S_4$  vor und entwickeln die Determinante dann nach der ersten Zeile. Wir erhalten eine einzige dreireihige Determinante. Bei dieser nehmen wir die elementare Umformung  $Z_2 \rightarrow Z_2 - Z_1$  vor und entwickeln anschließend nach der ersten Spalte.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & -6 & -1 & 1 \\ 5 & 7 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 3 \\ 5 & 7 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 7 & 2 & 3 \\ -1 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-3) \begin{vmatrix} -1 & 7 & 2 \\ -1 & 6 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix} = (-3) \begin{vmatrix} -1 & 7 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix} \\ &= (-3)(-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 3(3 - 2) = 3. \end{aligned}$$

- (b) Mit den elementaren Umformungen  $Z_2 \rightarrow Z_2 + Z_1$ ,  $Z_3 \rightarrow Z_3 + Z_1$  und  $Z_4 \rightarrow Z_4 - 3 \cdot Z_1$  erreichen wir, dass in der zweiten Spalte an drei Stellen 0 steht. Wir entwickeln dann nach der zweiten Spalte. Bei der dreireihigen Determinante nehmen wir zuerst die Umformung  $Z_3 \rightarrow Z_3 + Z_1$ , dann die Umformung  $Z_1 \rightarrow Z_1 - 5 \cdot Z_3$  vor. Anschließend entwickeln wir die Determinante nach der zweiten Spalte.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 5 & -1 & 3 & 7 \\ 3 & -1 & -2 & 6 \\ -2 & 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 8 & 0 & 5 & 11 \\ 6 & 0 & 0 & 10 \\ -11 & 0 & -4 & -9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 8 & 5 & 11 \\ 6 & 0 & 10 \\ -11 & -4 & -9 \end{vmatrix} \\ = - \begin{vmatrix} 8 & 5 & 11 \\ 6 & 0 & 10 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 23 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 10 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 23 & 1 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = 224.$$

## Aufgabe 2

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 10 \\ 4 & 4 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{Z_2 \rightarrow Z_2 + 2 \cdot Z_1 \\ Z_3 \rightarrow Z_3 - 4 \cdot Z_1 \\ Z_4 \rightarrow Z_4 - 3 \cdot Z_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & -16 & 3 \\ 0 & 0 & -9 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_2 \leftrightarrow S_4} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 10 & 9 & 0 \\ 0 & 3 & -16 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_2 \leftrightarrow Z_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -9 & 0 \\ 0 & 3 & -16 & 0 \\ 0 & 10 & 9 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{Z_3 \rightarrow Z_3 - 3 \cdot Z_2 \\ Z_4 \rightarrow Z_4 - 10 \cdot Z_2}} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 99 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_4 \rightarrow Z_4 - 9 \cdot Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nach Satz 3.8.13 hat die Matrix den Rang 3.

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad & \begin{pmatrix} 2 & 5 & 18 & -1 \\ 4 & -3 & 5 & 6 \\ -6 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{Z_2 \rightarrow Z_2 - 2 \cdot Z_1 \\ Z_3 \rightarrow Z_3 + 3 \cdot Z_1}} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 18 & -1 \\ 0 & -13 & -31 & 8 \\ 0 & 18 & 45 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_2 \leftrightarrow S_4} \\ & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 18 & 5 \\ 0 & 8 & -31 & -13 \\ 0 & 0 & 45 & 18 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \leftrightarrow Z_4} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 18 & 5 \\ 0 & 8 & -31 & -13 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 45 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_4 \rightarrow Z_4 - 9 \cdot Z_3} \\ & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 18 & 5 \\ 0 & 8 & -31 & -13 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nach Satz 3.8.13 hat die Matrix den Rang 3.

### Aufgabe 3

Wir charakterisieren die linearen Gleichungssysteme  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  durch ihre erweiterte Matrix  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$  und wenden auf diese das Gaußsche Verfahren (Satz 3.8.14) an.

$$(a) \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & -2 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{Z_2 \rightarrow Z_2 + Z_1 \\ Z_3 \rightarrow Z_3 - 2Z_1}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & -6 & -6 & -12 \end{array} \right) \xrightarrow{Z_3 \rightarrow Z_3 + 2Z_2}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{Z_2 \rightarrow \frac{1}{2} Z_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Hier ist  $\text{Rang } \mathbf{A} = \text{Rang } (\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = 2 < n = 3$  (Anzahl der Unbekannten). Der Lösungsraum des homogenen Gleichungssystems hat daher die Dimension  $n - \text{Rang } \mathbf{A} = 3 - 2 = 1$ .

Wir setzen  $x_3 = c$ . Dann ist  $x_2 = 2 - c$  und  $x_1 = 3 - c$ . Damit folgt:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$(b) \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & -2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{Z_2 \rightarrow Z_2 + Z_1 \\ Z_3 \rightarrow Z_3 - 2Z_1}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & -6 & -6 & -8 \end{array} \right) \xrightarrow{Z_3 \rightarrow Z_3 + 2Z_2}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

Hier ist  $\text{Rang } \mathbf{A} = 2 < 3 = \text{Rang } (\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ . Nach Satz 3.8.14, (I) (oder auch nach Satz 3.8.10, (1)) hat das lineare Gleichungssystem daher keine Lösung.

$$(c) \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -6 \\ 4 & 5 & -1 & -9 \\ 3 & 4 & -2 & -7 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{Z_2 \rightarrow Z_2 - 4Z_1 \\ Z_3 \rightarrow Z_3 - 3Z_1}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 9 & -5 & 15 \\ 0 & 7 & -5 & 11 \end{array} \right) \xrightarrow{Z_3 \rightarrow Z_3 - Z_2}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 9 & -5 & 15 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{Z_3 \rightarrow -\frac{1}{2} Z_3} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 9 & -5 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

Man könnte hier die zweite und dritte Spalte der Koeffizientenmatrix vertauschen, müsste dann aber unter den Spalten der Koeffizientenmatrix die Unbekannten angeben und diese entsprechend mit vertauschen. Wir verzichten hier darauf, weil wir auch so leicht ablesen können, dass  $\text{Rang } \mathbf{A} = \text{Rang } (\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = 3 = n$  (Anzahl der Unbekannten). Der Lösungsraum des homogenen Gleichungssystems hat daher die Dimension  $n - \text{Rang } \mathbf{A} = 3 - 3 = 0$ . Also gibt es genau eine Lösung:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{23}{5} \\ 2 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \right\}.$$

$$(d) \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -4 & 8 & -12 & 0 \\ -3 & 6 & -9 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{Z_2 \rightarrow Z_2 + 4Z_1 \\ Z_3 \rightarrow Z_3 + 3Z_1}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Also ist  $\text{Rang } \mathbf{A} = \text{Rang } (\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = 1 < 3 = n$  (Anzahl der Unbekannten). Der Lösungsraum  $\mathbb{L}$  dieses homogenen Gleichungssystems hat daher die Dimension  $n - \text{Rang } \mathbf{A} = 3 - 1 = 2$ . Wir setzen  $x_3 = t$  und  $x_2 = s$ . Dann ist  $x_1 = 2s - 3t$ . Damit folgt:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2s - 3t \\ s \\ t \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$(e) \quad \left( \begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & -1 & -14 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{Z_2 \rightarrow Z_2 + 2Z_1 \\ Z_4 \rightarrow Z_4 + 2Z_1 \\ Z_5 \rightarrow Z_5 - Z_1}}$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 13 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & -19 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{Z_3 \rightarrow Z_3 + Z_2 \\ Z_4 \rightarrow Z_4 - Z_2 \\ Z_5 \rightarrow Z_5 - Z_2}}$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & -32 \end{array} \right) \xrightarrow{Z_5 \rightarrow Z_5 - 2Z_4}$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -30 \end{array} \right)$$

Also ist  $\text{Rang } \mathbf{A} = \text{Rang } (\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = 5 = n$  (Anzahl der Unbekannten). Der Lösungsraum des homogenen Gleichungssystems hat daher die Dimension  $n - \text{Rang } \mathbf{A} = 5 - 5 = 0$ . Also gibt es genau eine Lösung:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 12 \\ 14 \\ 15 \end{pmatrix} \right\}.$$

Mathematik für Chemiker

Brunner, G.; Brück, R.

2013, IX, 374 S., Softcover

ISBN: 978-3-642-37504-0