

Lösungen der Aufgaben zu Kapitel 4

Abschnitt 4.2

Aufgabe 1

Die angegebenen Funktionen sind für alle diejenigen $x \in \mathbb{R}$ definiert, für die ein im Nenner auftretender Ausdruck $\neq 0$ ist und ein unter einem Wurzelzeichen stehender Ausdruck nicht-negativ ist. Wir bezeichnen den Definitionsbereich jeweils mit $\mathbb{D}$.

- (a) Hier muss $x^3 - 4x \geq 0$ gelten.

$$\begin{aligned}x^3 - 4x \geq 0 &\iff x(x^2 - 4) \geq 0 \\&\iff (x \geq 0 \text{ und } x^2 \geq 4) \text{ oder } (x \leq 0 \text{ und } x^2 \leq 4) .\end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}x \geq 0 \text{ und } x^2 \geq 4 &\iff x \geq 0 \text{ und } |x| \geq 2 \iff x \geq 2 , \\x \leq 0 \text{ und } x^2 \leq 4 &\iff x \leq 0 \text{ und } |x| \leq 2 \iff -2 \leq x \leq 0 .\end{aligned}$$

Also ist $\mathbb{D} = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 4x \geq 0 \} = [-2, 0] \cup [2, \infty)$.

- (b) Da $|x+6| \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, ist der Zähler für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert. Die Funktion ist also nur dann nicht definiert, wenn der Nenner 0 ist. Also ist $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- (c) Die Funktion ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert, für die der Ausdruck unter der Wurzel existiert und nicht negativ ist.

$$\frac{x-1}{x-3} \geq 0 \iff (x \geq 1 \text{ und } x > 3) \text{ oder } (x \leq 1 \text{ und } x < 3) \iff x > 3 \text{ oder } x \leq 1 .$$

Also ist $\mathbb{D} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{x-1}{x-3} \geq 0 \right\} = (-\infty, 1] \cup (3, \infty)$.

- (d) Die Funktion ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert, für die der Ausdruck unter der Wurzel nicht negativ ist.

$$x^2 - 10x + 29 \geq 0 \iff (x-5)^2 + 4 \geq 0 .$$

Dies ist für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt und daher ist $\mathbb{D} = \{ x \mid x^2 - 10x + 29 \geq 0 \} = \mathbb{R}$.

- (e) Die Funktion ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert, für die der Ausdruck unter der Wurzel nicht negativ ist.

$$\begin{aligned}(7-x)(x-3) \geq 0 &\iff (x \leq 7 \text{ und } x \geq 3) \text{ oder } (x \geq 7 \text{ und } x \leq 3) \\&\iff 3 \leq x \leq 7 .\end{aligned}$$

Also ist $\mathbb{D} = \{ x \in \mathbb{R} \mid (7-x)(x-3) \geq 0 \} = [3, 7]$.

Aufgabe 2

(a) Es ist $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$ mit

$$f_1(x) = \pi - x, \quad f_2(x) = \sin x, \quad f_3(x) = 1 - x, \quad f_4(x) = \sqrt[3]{x}.$$

(b) Es ist $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$ mit

$$f_1(x) = 3x - 1, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = \cos x, \quad f_4(x) = x^3.$$

(c) Es ist $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$ mit

$$f_1(x) = x^2 + 1, \quad f_2(x) = \sqrt{x}, \quad f_3(x) = \arctan x.$$

Aufgabe 3

Wir bestimmen zuerst die Bildmenge der Funktion f . Diese ist der Definitionsbereich der Umkehrfunktion g . Dann lösen wir die Gleichung $y = f(x)$ nach x auf. In dem gefundenen Ausdruck ersetzen wir y durch x und erhalten damit die Zuordnungsvorschrift der Umkehrfunktion.

(a) Bestimmung der Bildmenge von f :

Für $x \in \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ durchläuft $f(x) = \frac{1}{2-x}$ alle Zahlen $\neq 0$. Daher hat die Umkehrfunktion g von f den Definitionsbereich $f(\mathbb{D}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Auflösung der Gleichung $y = f(x)$ nach x :

$$y = \frac{1}{2-x} \iff 2-x = \frac{1}{y} \iff x = 2 - \frac{1}{y}.$$

Die Umkehrfunktion ist $g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = 2 - \frac{1}{x}$.

(b) Bestimmung der Bildmenge von f :

Wegen $\mathbb{D} = [-1, 1)$ gilt $1+x \geq 0$ und $1-x > 0$. Damit erhalten wir

$$1+x \geq 0 \text{ und } 1-x > 0 \implies \frac{1+x}{1-x} \geq 0 \implies \frac{\sqrt[3]{1+x}}{\sqrt[3]{1-x}} = \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Weiter ist

$$\frac{1+x}{1-x} = -\frac{-1-x}{1-x} = -\frac{1-x-2}{1-x} = -1 + \frac{2}{1-x}.$$

Da $-1 + \frac{2}{1-x}$ für $-1 \leq x < 1$ alle Zahlen aus $[0, \infty)$ durchläuft, folgt nun

$$\begin{aligned} -1 \leq x < 1 &\implies 0 \leq -1 + \frac{2}{1-x} < \infty \implies 0 \leq \frac{1+x}{1-x} < \infty \\ &\implies 0 \leq \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} < \infty \implies 0 \leq \arctan \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} < \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Der Definitionsbereich der Umkehrfunktion g ist also das Intervall $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Auflösung der Gleichung $y = f(x)$ nach x :

$$y = \arctan \frac{\sqrt[3]{1+x}}{\sqrt[3]{1-x}} = \arctan \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} \iff \tan y = \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$\iff \tan^3 y = \frac{1+x}{1-x} = -1 + \frac{2}{1-x}$$

$$\iff \frac{2}{1-x} = 1 + \tan^3 y \iff 1-x = \frac{2}{1+\tan^3 y}$$

$$\iff x = 1 - \frac{2}{1+\tan^3 y}.$$

Die Umkehrfunktion ist $g: \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = 1 - \frac{2}{1+\tan^3 x}$.

Aufgabe 4

Wir zeigen, dass $\sin(\arcsin x + \arccos x) = 1$ ist, und benutzen dazu das Additionstheorem für Sinus (Satz 2.4.1). Durch Anwendung von $\arcsin$ auf diese Gleichung folgt dann die Behauptung. Bei der Rechnung ist zu beachten, dass $\sin$ und $\arcsin$ sowie $\cos$ und $\arccos$ Umkehrfunktionen voneinander sind und weiter nach Satz 2.3.4, (2) gilt

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - x^2},$$

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \sin(\arcsin x + \arccos x) &= \sin(\arcsin x) \cos(\arccos x) + \cos(\arcsin x) \sin(\arccos x) \\ &= x^2 + \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-x^2} = x^2 + (1-x^2) = 1. \end{aligned}$$

Anwendung von $\arcsin$ auf diese Gleichung liefert schließlich

$$\arcsin x + \arccos x = \arcsin(\sin(\arcsin x + \arccos x)) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Aufgabe 5

Um die Zuordnungsvorschrift der Funktion f zu bestimmen, löst man die Gleichung nach y auf. Aus der Vorschrift lässt sich dann der Definitionsbereich $\mathbb{D}$ der Funktion ablesen.

(a) Es gilt

$$4y^2 - 9x^2 - 24y + 36 = 0 \iff 4(y^2 - 6y + 9) - 9x^2 = 0$$

$$\iff 4(y-3)^2 - 9x^2 = 0$$

$$\iff (y-3)^2 = \frac{9}{4}x^2 \iff y-3 = \frac{3}{2}|x|$$

$$\Longleftrightarrow y = 3 + \frac{3}{2}|x|.$$

Also gilt $f(x) = 3 + \frac{3}{2}|x|$ und $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.

(b) Es gilt

$$\arcsin \sqrt{1-2y} + \arccos x = \frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow \arcsin \sqrt{1-2y} = \frac{\pi}{2} - \arccos x$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{1-2y} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right)$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{1-2y} = \sin \frac{\pi}{2} \cdot \cos(\arccos x) - 0 \cdot \sin(\arccos x) = x$$

$$\Longleftrightarrow 1-2y = x^2 \Longleftrightarrow y = \frac{1}{2}(1-x^2).$$

Also gilt $f(x) = \frac{1}{2}(1-x^2)$ und $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.

(c) Es gilt

$$\sqrt{x} \arccos \sqrt{1-y} = 1 \Longleftrightarrow \arccos \sqrt{1-y} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

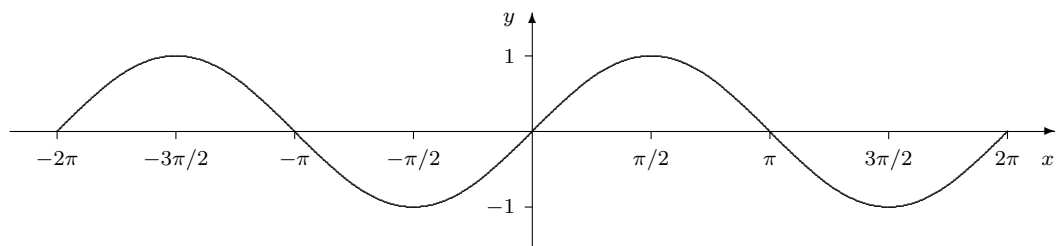
$$\Longleftrightarrow \sqrt{1-y} = \cos \frac{1}{\sqrt{x}} \Longleftrightarrow 1-y = \cos^2 \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\Longleftrightarrow y = 1 - \cos^2 \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

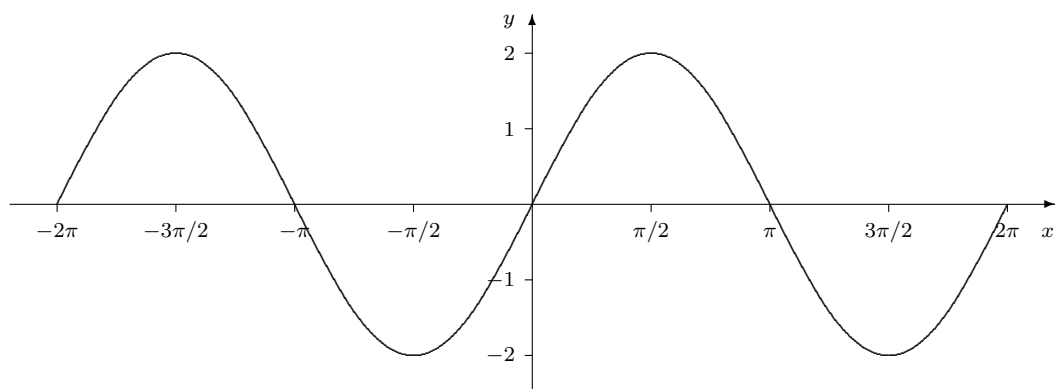
Also gilt $f(x) = 1 - \cos^2 \frac{1}{\sqrt{x}}$ und $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} = (0, \infty)$.

Aufgabe 6

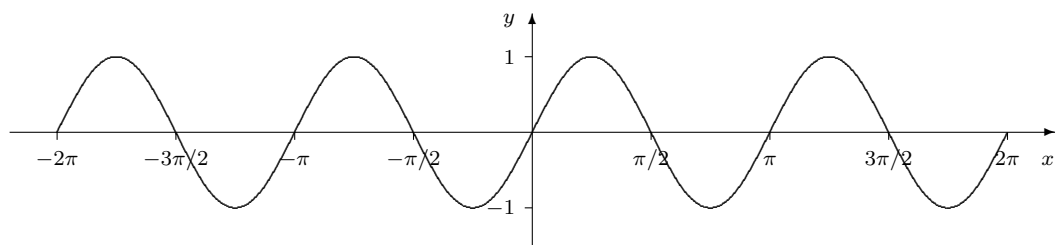
(a) $f(x) = \sin x$



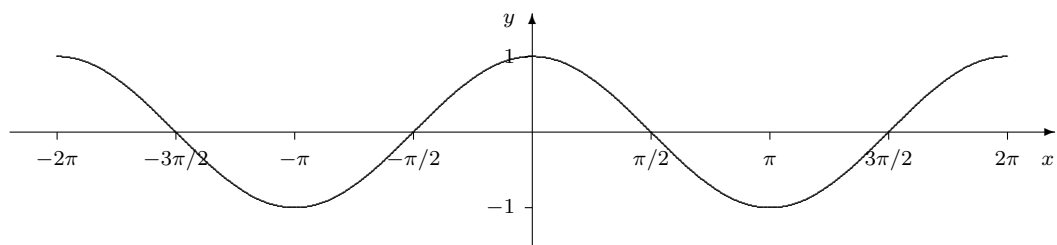
(b) $f(x) = 2 \sin x$



(c) $f(x) = \sin 2x$



(d) $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$



Abschnitt 4.3

Aufgabe 1

- (a) Die Strecke von O nach A liegt auf der x -Achse und hat dieselbe Orientierung wie die x -Achse. Wir setzen $t = x$, die zweite Koordinate ist konstant 0. Damit lautet eine Parameterdarstellung der Strecke von O nach A

$$\mathbf{x}_1: [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Strecke von A nach B ist parallel zur y -Achse und hat dieselbe Orientierung wie die y -Achse. Wir setzen $t = y$, die erste Koordinate ist konstant 5. Damit lautet eine Parameterdarstellung der Strecke von A nach B

$$\mathbf{x}_2: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}_2(t) = \begin{pmatrix} 5 \\ t \end{pmatrix}.$$

Die Strecke von B nach C ist parallel zur x -Achse und hat die entgegengesetzte Orientierung wie die x -Achse. Wir setzen $t = 5 - x$, die zweite Koordinate ist konstant 2. Damit lautet eine Parameterdarstellung der Strecke von B nach C

$$\mathbf{x}_3: [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}_3(t) = \begin{pmatrix} 5 - t \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Strecke von C nach O liegt auf der y -Achse und hat die entgegengesetzte Orientierung wie die y -Achse. Wir setzen $t = -y$, die erste Koordinate ist konstant 0. Damit lautet eine Parameterdarstellung der Strecke von C nach O

$$\mathbf{x}_4: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}_4(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 - t \end{pmatrix}.$$

- (b) Wir setzen $t = x$ (wie im Rezept auf Seite 109 angegeben). Das Parameterintervall ist dann das Definitionsintervall $[-2, 2]$ von f , und die zweite Koordinate ist $f(t) = t^2$. Eine Parameterdarstellung des Graphen von f ist somit gegeben durch

$$\mathbf{x}: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

- (a) Die Verbindungsstrecke von $O = (0, 0, 0)$ und $P = (x, y, z)$ hat die Parameterdarstellung (Beispiel auf Seite 110)

$$\mathbf{x}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(t) = t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

- (b) Der achsenparallele Weg von O nach P setzt sich aus drei Strecken zusammen, nämlich den Strecken von $O = (0, 0, 0)$ nach $P_1 = (x, 0, 0)$, von P_1 nach $P_2 = (x, y, 0)$ und von P_2 nach P .

Die Strecke von O nach P_1 liegt auf der x -Achse. Wir wählen als erste Koordinate t , die zweite und dritte Koordinate sind konstant 0. Dabei durchläuft t das Intervall $[0, x]$. Eine Parameterdarstellung ist gegeben durch

$$\mathbf{x}_1: [0, x] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Strecke von P_1 nach P_2 verläuft in der (x, y) -Ebene parallel zur y -Achse. Wir wählen daher als zweite Koordinate t , die erste Koordinate ist konstant x , die dritte konstant 0. Dabei durchläuft t das Intervall $[0, y]$. Eine Parameterdarstellung ist gegeben durch

$$\mathbf{x}_2: [0, y] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}_2(t) = \begin{pmatrix} x \\ t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Strecke von P_2 nach P verläuft parallel zur z -Achse. Wir wählen daher als dritte Koordinate t , die erste Koordinate ist konstant x , die zweite konstant y . Dabei durchläuft t das Intervall $[0, z]$. Eine Parameterdarstellung ist gegeben durch

$$\mathbf{x}_3: [0, z] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}_3(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

In beiden Aufgaben besteht der Definitionsbereich jeweils aus allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, für die der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen definiert und nicht-negativ ist.

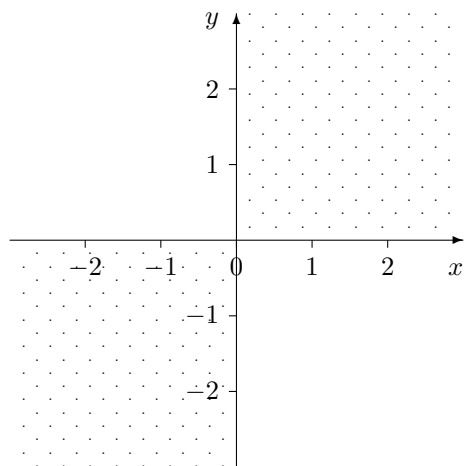
(a) Es gilt

$$\frac{x}{y} - 2 + \frac{y}{x} \geq 0 \iff \frac{x^2 - 2xy + y^2}{xy} \geq 0 \iff \frac{(x - y)^2}{xy} \geq 0 \iff xy > 0.$$

Die letzte Äquivalenz gilt, weil für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ natürlich $(x - y)^2 \geq 0$ ist.

Es folgt $\mathbb{D} = \{ (x, y) \mid xy > 0 \}$. $\mathbb{D}$ ist genau die aus dem ersten und dritten Quadranten (ausschließlich der Achsen) bestehende Punktmenge in der (x, y) -Ebene.

Skizze:

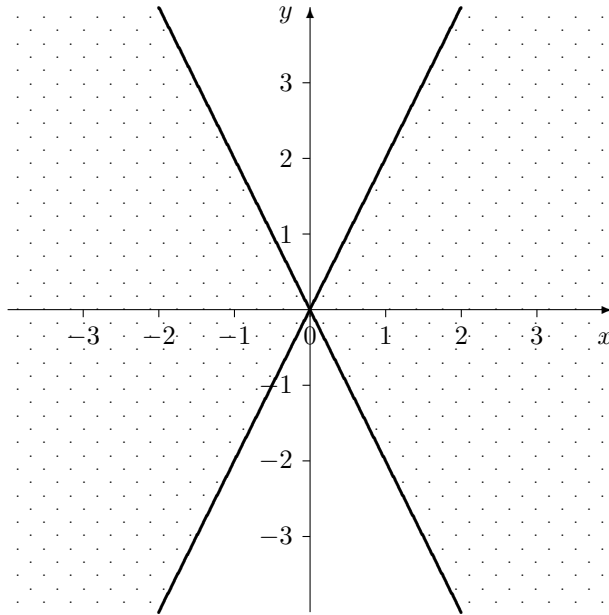


(b) Es gilt

$$4x^2 - y^2 \geq 0 \iff y^2 \leq 4x^2 \iff |y| \leq 2|x|.$$

Hieraus folgt $\mathbb{D} = \{ (x, y) \mid |y| \leq 2|x| \}$.

Skizze:



Aufgabe 4

Wir bestimmen den Parameterwert des Schnittpunktes von Kurve und Fläche, indem wir die Koordinaten von $\mathbf{x}(t)$ in die Gleichung der Fläche einsetzen und erhalten

$$t = 1 + \sqrt{2 - \cos^2 t - \sin^2 t} = 1 + \sqrt{2 - (\cos^2 t + \sin^2 t)} = 1 + \sqrt{2 - 1} = 2.$$

Der Schnittpunkt ist der zu diesem Parameterwert gehörende Punkt $S = (\cos 2, \sin 2, 2)$.

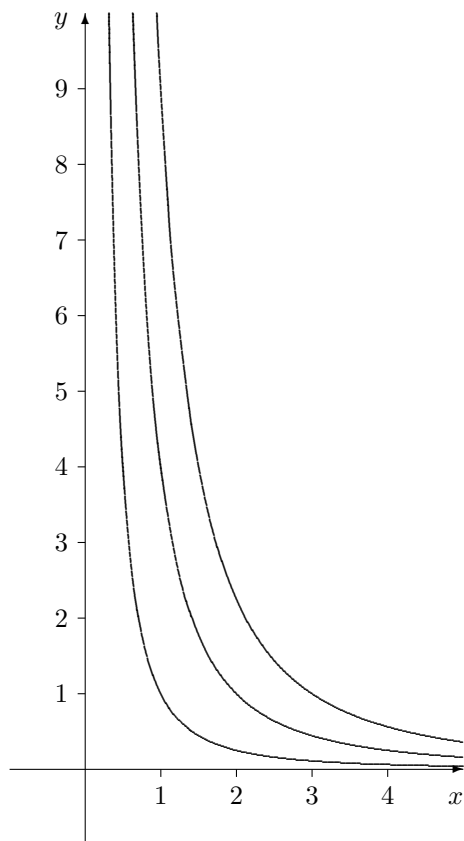
Aufgabe 5

- (a) Wir lösen die Gleichung $F(x, y) = c$ nach y auf und erhalten eine Gleichung der Form $y = f_c(x)$, wobei $x \in (0, \infty)$ ist wegen $x > 0$. Der Ausdruck $f_c(x)$ ist die Zuordnungsvorschrift der Funktion f_c .

$$F(x, y) = c \iff x\sqrt{y} = c \iff \sqrt{y} = \frac{c}{x} \iff y = \frac{c^2}{x^2}.$$

Also ist N_c der Graph der Funktion $f_c: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_c(x) = \frac{c^2}{x^2}$.

Skizze der Niveaulinien für $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 3$ (von links nach rechts):



- (b) Wir setzen $t = x$ (wie im Rezept auf Seite 109 angegeben). Das Parameterintervall ist dann das Definitionsintervall $(0, \infty)$ von f_c , und die zweite Koordinate ist $f_c(t)$. Damit hat N_c die Parameterdarstellung

$$\mathbf{x}: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \frac{c^2}{t^2} \end{pmatrix}.$$

Mathematik für Chemiker

Brunner, G.; Brück, R.

2013, IX, 374 S., Softcover

ISBN: 978-3-642-37504-0