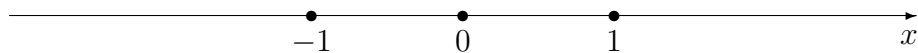


Lösungen der Aufgaben zu Kapitel 5

Abschnitt 5.1

Aufgabe 1

Zur Lösung der Aufgabe ist folgende Skizze hilfreich:



Für die Diskussion von (a), (b), (c) unterscheiden wir drei Fälle:

- Liegt x links von 0 (also $x < 0$), so hat x von -1 einen geringeren Abstand als von 1 (Ungleichung (a)).
- Liegt x rechts von 0 (also $x > 0$), so hat x von 1 einen geringeren Abstand als von -1 (Ungleichung (b)).
- Liegt x in der Mitte zwischen -1 und 1 (also $x = 0$), so hat x von -1 denselben Abstand wie von 1 (Gleichung (c)).

Da mit dieser Fallunterscheidung alle möglichen Lagen von x erfasst sind, folgt also:

$$(a) \quad |x + 1| < |x - 1| \iff x < 0,$$

$$(b) \quad |x - 1| < |x + 1| \iff x > 0,$$

$$(c) \quad |x + 1| = |x - 1| \iff x = 0.$$

Für die Diskussion von (d), (e), (f) beachten wir, dass -1 und 1 den Abstand 2 haben, und unterscheiden zwei Fälle:

- Liegt x zwischen -1 und 1, so ist die Summe der Abstände von x zu -1 und von x zu 1 genau 2 (Gleichung (e)).
- Liegt x links von -1 , so ist der Abstand von x zu 1 größer als 2, und liegt x rechts von 1, so ist der Abstand von x zu -1 größer als 2. In beiden Fällen ist also auch die Summe der beiden Abstände größer als 2 (Ungleichung (f)).

Da x nur im Intervall $[-1, 1]$ oder links von -1 oder rechts von 1 liegen kann, haben wir damit alle möglichen Lagen von x erfasst. Es gibt also keine Lage von x so, dass die Summe der Abstände von x zu 1 und von x zu -1 kleiner als 2 ist (Ungleichung (d)). Insgesamt folgt somit:

$$(d) \quad |x + 1| + |x - 1| < 2 \text{ ist für kein } x \in \mathbb{R} \text{ erfüllt,}$$

$$(e) \quad |x + 1| + |x - 1| = 2 \iff x \in [-1, 1],$$

$$(f) \quad |x + 1| + |x - 1| > 2 \iff x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) = \mathbb{R} \setminus [-1, 1].$$

Aufgabe 2

- (a) Die ε -Umgebung $I_\varepsilon(x_0)$ ist charakterisiert durch die Ungleichung $|x - x_0| < \varepsilon$ (Definition 5.1.2). Wir formen diese so um, dass wir die Endpunkte des Intervalls ablesen können, und erhalten die ε -Umgebungen, indem wir für ε die gegebenen Werte einsetzen.

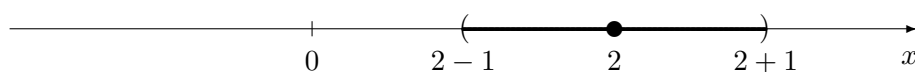
$$x \in I_\varepsilon(2) \iff |x - 2| < \varepsilon \iff -\varepsilon < x - 2 < \varepsilon \iff 2 - \varepsilon < x < 2 + \varepsilon.$$

Die ε -Umgebungen von $x_0 = 2$ für $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ sind dann die Intervalle

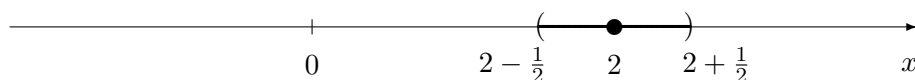
$$I_1(2) = (1, 3), \quad I_{1/2}(2) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right), \quad I_{1/4}(2) = \left(\frac{7}{4}, \frac{9}{4}\right).$$

Skizzen:

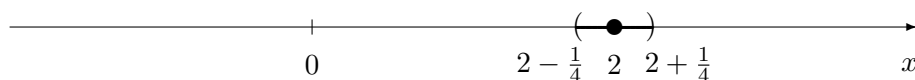
$\mathbb{I}_1(2)$



$\mathbb{I}_{1/2}(2)$



$\mathbb{I}_{1/4}(2)$



- (b) Nach Bemerkung 5.1.6 ist die ε -Umgebung $K_\varepsilon(z_0)$ charakterisiert durch die Ungleichung $|z - z_0| < \varepsilon$. Wir setzen $z = x + yi$ und erhalten durch Umformung der Ungleichung

$$\begin{aligned} |z - (1 + 2i)| < \varepsilon &\iff |x + yi - 1 - 2i| < \varepsilon \iff |(x - 1) + (y - 2)i| < \varepsilon \\ &\iff |(x - 1) + (y - 2)i|^2 < \varepsilon^2 \\ &\iff (x - 1)^2 + (y - 2)^2 < \varepsilon^2. \end{aligned}$$

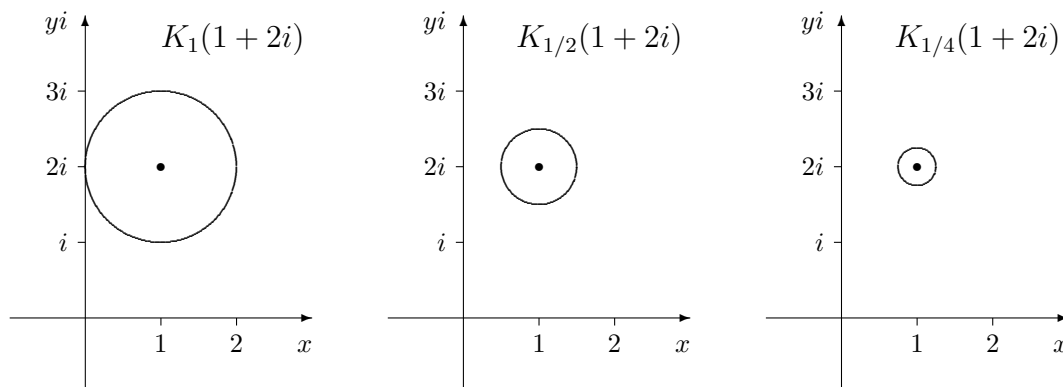
Die ε -Umgebung von $z_0 = 1 + 2i$ ist damit:

$$K_\varepsilon(1 + 2i) = \{x + yi \in \mathbb{C} \mid (x - 1)^2 + (y - 2)^2 < \varepsilon^2\}.$$

Da $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = \varepsilon^2$ die Gleichung des Kreises um $(1, 2)$ (das ist in der komplexen Ebene der Punkt $1 + 2i$) mit dem Radius ε ist, beschreibt die Ungleichung das Innere

dieses Kreises. Die ε -Umgebung von $z_0 = 1 + 2i$ ist also jeweils das Innere des Kreises in der komplexen Ebene um den Punkt $1 + 2i$ mit dem Radius $\varepsilon = 1$ bzw. $\varepsilon = \frac{1}{2}$ bzw. $\varepsilon = \frac{1}{4}$.

Skizzen: Es wird jeweils nur der Mittelpunkt $1 + 2i$ und die Kreislinie gezeichnet, die Menge $K_\varepsilon(1 + 2i)$ besteht dann jeweils aus allen Punkten innerhalb der Kreislinie.



- (c) Wir bezeichnen mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ den Ortsvektor des Punktes X und mit $\mathbf{x}_0$ den Ortsvektor des Punktes X_0 . Nach Bemerkung 5.1.6 ist die ε -Umgebung $\mathbb{B}_\varepsilon(X_0)$ dann charakterisiert durch die Ungleichung $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon$. Die Umformung der Ungleichung liefert

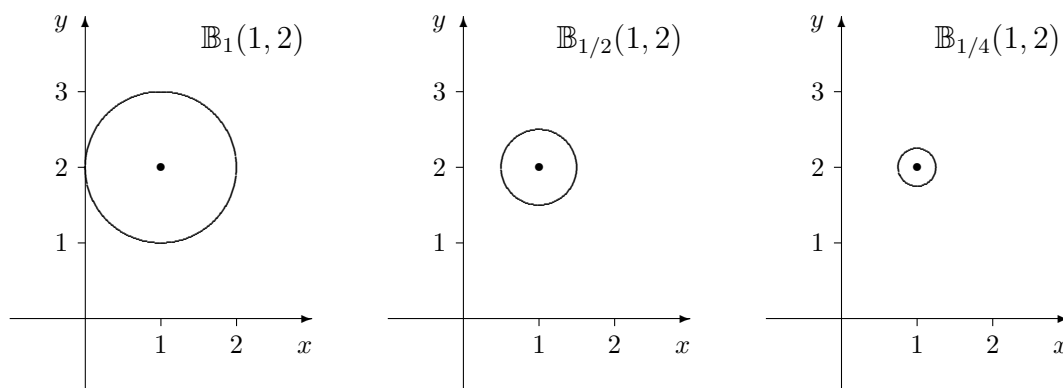
$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| < \varepsilon &\iff \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| < \varepsilon \iff \left\| \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} \right\|^2 < \varepsilon^2 \\ &\iff (x-1)^2 + (y-2)^2 < \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Die ε -Umgebung von $X_0 = (1, 2)$ ist damit

$$\mathbb{B}_\varepsilon(1, 2) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y-2)^2 < \varepsilon^2 \}.$$

Sie ist das Innere des Kreises in der (x, y) -Ebene um den Punkt $X_0 = (1, 2)$ mit dem Radius $\varepsilon = 1$ bzw. $\varepsilon = \frac{1}{2}$ bzw. $\varepsilon = \frac{1}{4}$.

Skizzen: Es wird jeweils nur der Mittelpunkt $1 + 2i$ und die Kreislinie gezeichnet, die Menge $\mathbb{B}_\varepsilon(1, 2)$ besteht dann jeweils aus allen Punkten innerhalb der Kreislinie.



Aufgabe 3

In allen drei Aufgaben weisen wir die den Grenzwert charakterisierende Bedingung nach (Definition 5.1.3).

- (a) Es sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon^2}$. Wegen der Voraussetzung $|b| < 1$ gilt dann für alle $n \geq n_\varepsilon$

$$\left| (-1)^n \frac{b^n}{\sqrt{n}} - 0 \right| = \frac{|b|^n}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n_\varepsilon}} < \varepsilon.$$

- (b) Es sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $n_\varepsilon > \frac{6}{\varepsilon}$. Wegen $\frac{4}{n} \leq 4$ und $\frac{3}{n} > 0$ gilt dann für alle $n \geq n_\varepsilon$

$$\begin{aligned} \left| \frac{n^2 - 2n - 1}{n^2 + 3} - 1 \right| &= \left| \frac{n^2 - 2n - 1 - n^2 - 3}{n^2 + 3} \right| = \left| \frac{-2n - 4}{n^2 + 3} \right| = \frac{2n + 4}{n^2 + 3} = \frac{2 + \frac{4}{n}}{n + \frac{3}{n}} \\ &< \frac{2 + 4}{n} = \frac{6}{n} \leq \frac{6}{n_\varepsilon} < \varepsilon. \end{aligned}$$

- (c) Es sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon^2}$. Wir erweitern nun mit $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ und berechnen dann das Produkt im Zähler nach der binomischen Formel $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$. Dann erhalten wir für alle $n \geq n_\varepsilon$

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right| &= \left| \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right| = \left| \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n_\varepsilon}} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Wir zeigen, dass die Teilfolge (x_{2k}) den Grenzwert 2 und die Teilfolge (x_{2k+1}) den davon verschiedenen Grenzwert 0 hat. Es sei also $\varepsilon > 0$. Wir wählen $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $k_\varepsilon > \frac{1}{2\varepsilon}$. Dann gilt für alle $k \geq k_\varepsilon$

$$\left| (-1)^{2k} + \frac{2k}{2k+1} - 2 \right| = \left| 1 + \frac{2k}{2k+1} - 2 \right| = \frac{1}{2k+1} < \frac{1}{2k} \leq \frac{1}{2k_\varepsilon} < \varepsilon$$

und

$$\left| (-1)^{2k+1} + \frac{2k+1}{2k+2} - 0 \right| = \left| -1 + \frac{2k+1}{2k+2} \right| = \frac{1}{2k+2} < \frac{1}{2k} \leq \frac{1}{2k_\varepsilon} < \varepsilon.$$

Es kann also keine Zahl $a \in \mathbb{R}$ geben so, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein Index n_ε existiert mit $|x_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$. Daher ist die Folge (x_n) divergent.

Abschnitt 5.2

Aufgabe 1

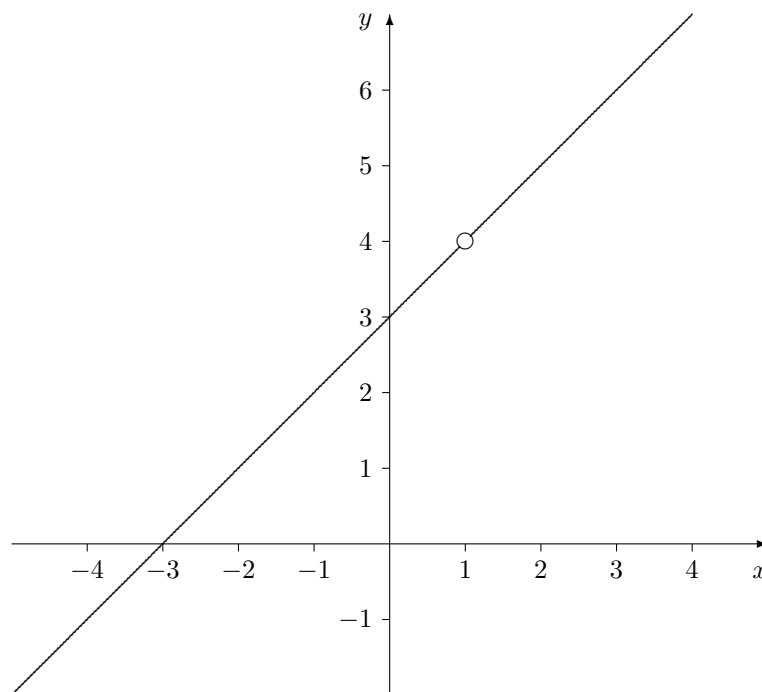
- (a) f ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert, die nicht Nullstellen des Nenners sind. Die einzige Nullstelle des Nenners ist 1. Daher hat f den Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Weiter gilt für $x \neq 1$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \frac{(x + 3)(x - 1)}{x - 1} = x + 3.$$

Damit ergibt sich für die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x + 3) = \pm\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 3) = 4.$$

Skizze des Graphen:



- (b) Mit derselben Begründung wie in Teil (a) ist $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ der Definitionsbereich von f . Weiter gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{|x^2 + 2x - 3|}{x - 1} = \frac{|(x + 3)(x - 1)|}{x - 1} \\ &= \begin{cases} \frac{(x + 3)(x - 1)}{x - 1} = x + 3 & \text{für } x > 1 \text{ oder } x \leq -3, \\ -\frac{(x + 3)(x - 1)}{x - 1} = -(x + 3) & \text{für } -3 \leq x < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

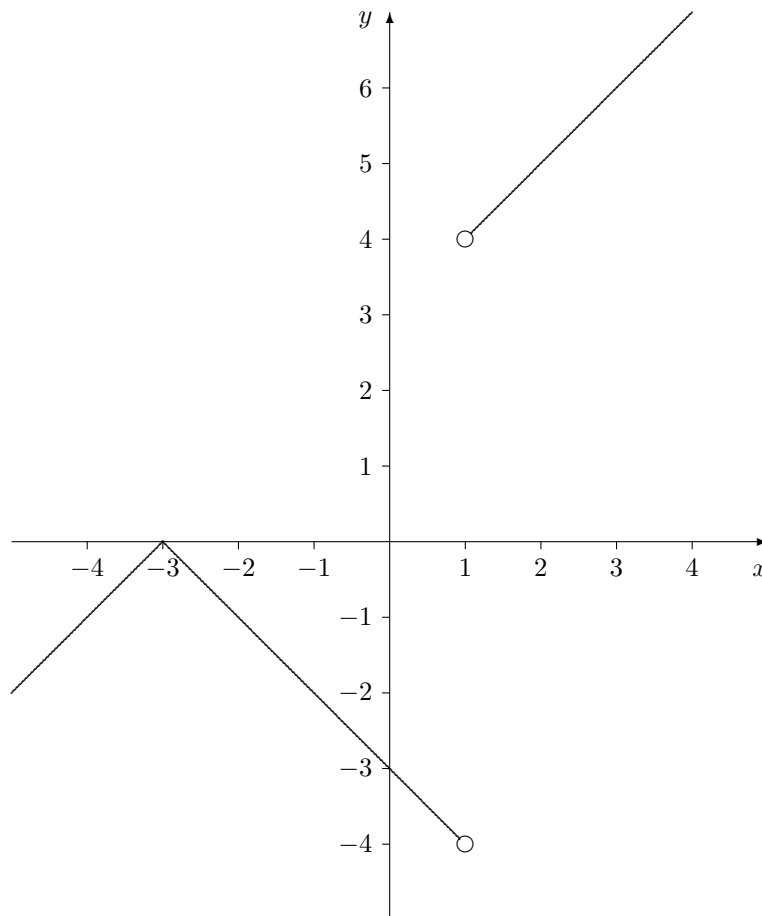
Damit ergibt sich für die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x + 3) = \pm\infty$$

und

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (x + 3) = 4, \quad \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} -(x + 3) = -4.$$

Skizze des Graphen:



Aufgabe 2

- (a) Wir zeigen, dass der rechts- und linksseitige Grenzwert von f für $x \rightarrow 1$ übereinstimmen:

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} x = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} x^2 = 1.$$

Also existiert auch der Grenzwert von f für $x \rightarrow 1$ und hat den Wert 1 (Satz 5.2.4). Da dieser zugleich der Funktionswert $f(1) = 1$ ist, ist f stetig in 1 (Definition 5.2.5).

- (b) Wir zeigen, dass der rechts- und linksseitige Grenzwert von f für $x \rightarrow 1$ nicht übereinstimmen:

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} 3x^2 = 3 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} 2x^3 = 2.$$

Also existiert der Grenzwert von f für $x \rightarrow 1$ nicht (Satz 5.2.4) und f ist dann natürlich auch nicht stetig in 1.

Aufgabe 3

Nach Folgerung 5.2.7 (mit η statt ε und ε statt δ) ist f genau dann stetig in a , wenn es zu jedem $\eta > 0$ ein $\varepsilon > 0$ so gibt, dass gilt

$$|f(x) - f(a)| < \eta \text{ für alle } x \in \mathbb{I} \text{ mit } |x - a| < \varepsilon.$$

Da f stetig in a und $f(a) > 0$ ist, gibt es zu $\eta = \frac{1}{2} f(a) > 0$ ein $\varepsilon > 0$ so, dass gilt

$$|f(x) - f(a)| < \eta = \frac{1}{2} f(a) \text{ für alle } x \in \mathbb{I} \text{ mit } |x - a| < \varepsilon.$$

Daher gilt für alle $x \in \mathbb{I}$ mit $|x - a| < \varepsilon$

$$-\frac{1}{2} f(a) < f(x) - f(a) < \frac{1}{2} f(a),$$

also

$$\frac{1}{2} f(a) < f(x) < \frac{3}{2} f(a).$$

Insbesondere ist damit $f(x) > \frac{1}{2} f(a) > 0$ für alle $x \in \mathbb{I}$ mit $|x - a| < \varepsilon$. Das war zu zeigen.

Abschnitt 5.3

Aufgabe 1

Wir geben jeweils den Typ des Grenzwertes in eckigen Klammern hinter dem Grenzwert an.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) [\infty - \infty] &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 1) - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 + 1 - \sqrt{2x^3}) [\infty - \infty] &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^3 + 1 - \sqrt{2x^3})(x^3 + 1 + \sqrt{2x^3})}{x^3 + 1 + \sqrt{2x^3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^3 + 1)^2 - 2x^3}{x^3 + 1 + \sqrt{2x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 + 1}{x^3 + 1 + \sqrt{2x^3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^3} + \sqrt{\frac{2}{x^3}}} = \infty. \end{aligned}$$

$$\text{(c)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 2)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 2) = 3,$$

$$\text{(d)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{(x - 1)^2} \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 2)(x - 1)}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2}{x - 1}.$$

Der Grenzwert existiert nicht. Für den rechts- und linksseitigen Grenzwert gilt

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+2}{x-1} = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{x-1} = \infty.$$

$$(e) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{1-x} \right) [\infty \cdot 0] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x-1}{x(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{1-x} = -1,$$

$$(f) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{(1-x)^2} \right) [\infty \cdot 0] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x + 1 - 1}{x(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2}{(x-1)^2} = -2,$$

$$(g) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5}{2x^2 + 6x} \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{5}{x^2}}{2 + \frac{6}{x}} = \frac{1}{2},$$

$$(h) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 5}{2x^2 + 6x} \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{5}{x^3}}{\frac{2}{x} + \frac{6}{x^2}} = \infty.$$

Aufgabe 2

- (a) Wir bringen die beiden Summanden auf den gemeinsamen Nenner $\sqrt{x-1}(\sqrt{x}-1)$ und erweitern dann mit $(\sqrt{x}-1) + \sqrt{x-1}$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt{x}-1) - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{((\sqrt{x}-1) - \sqrt{x-1})((\sqrt{x}-1) + \sqrt{x-1})}{\sqrt{x-1}(\sqrt{x}-1)((\sqrt{x}-1) + \sqrt{x-1})} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-1)^2 - (x-1)}{\sqrt{x-1}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-1 + \sqrt{x-1})} \\ &= \frac{x - 2\sqrt{x} + 1 - x + 1}{\sqrt{x-1}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-1 + \sqrt{x-1})} \\ &= -\frac{2(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x-1}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-1 + \sqrt{x-1})} \\ &= -\frac{2}{\sqrt{x-1}(\sqrt{x}-1 + \sqrt{x-1})}. \end{aligned}$$

Da $\sqrt{x-1}$ nur für $x \geq 1$ definiert ist, existiert nur der rechtsseitige Grenzwert für $x \rightarrow 1$. Wir berechnen ihn und den Grenzwert für $x \rightarrow \infty$ mit Hilfe der gerade gewonnenen Darstellung von $f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

- (b) Wir bringen die beiden Summanden auf den gemeinsamen Nenner $(x+2)^2$ und kürzen dann durch $x+2$:

$$f(x) = \frac{x^2(x+2) - (x^3 - 4x)}{(x+2)^2} = \frac{x^3 + 2x^2 - x^3 + 4x}{(x+2)^2} = \frac{2x(x+2)}{(x+2)^2} = \frac{2x}{x+2}.$$

Der Grenzwert für $x \rightarrow -2$ existiert nicht, wohl aber der rechts- und linksseitige Grenzwert. Sie lassen sich mit Hilfe der gerade gewonnenen Darstellung von $f(x)$ sofort berechnen:

$$\lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = \infty.$$

- (c) Wir klammern im Nenner x aus und erhalten $x(\sqrt{x}-2)$. Dann erweitern wir $f(x)$ mit $\sqrt{x}+2$:

$$f(x) = \frac{(3x-12)(\sqrt{x}+2)}{x(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{3(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x(x-4)} = \frac{3(\sqrt{x}+2)}{x} = \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{6}{x}.$$

Da $\sqrt{x}$ nur für $x \geq 0$ definiert ist, existiert für $x \rightarrow 0$ nur der rechtsseitige Grenzwert. Wir berechnen ihn und die beiden anderen Grenzwerte mit Hilfe der gerade gewonnenen Darstellung von $f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 3 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

Aufgabe 3

- (a) Die Funktion ist mit Hilfe algebraischer Operationen aus Funktionen gebildet, die alle in $\mathbb{R}$ definiert und stetig sind. Da der Nenner nie 0 wird, hat f daher auch den Definitionsbereich $\mathbb{R}$ und ist stetig auf $\mathbb{R}$ (Folgerung 5.3.2).
- (b) Die Funktion ist mit Hilfe algebraischer Operationen aus Funktionen gebildet, die auf $\mathbb{R}$ definiert und stetig sind. Nach Folgerung 5.3.2 ist f daher stetig auf dem Definitionsbereich $\mathbb{D}$ von f . Diesen erhalten wir, wenn wir aus $\mathbb{R}$ die Nullstellen des Nenners herausnehmen.

$$(x-1)\sin^2 x = 0 \iff x = 1 \text{ oder } x = k\pi \text{ für } k \in \mathbb{Z}.$$

Also folgt $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus (\{1\} \cup \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\})$.

Aufgabe 4

Die Funktion ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert, für die der Nenner nicht 0 wird. Der Definitionsbereich ist also $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$. Weiter gilt für $x \neq 1$

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{(x-1)(x+2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x-2}{x+2}.$$

Damit folgt

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x+2} = -\frac{1}{3},$$

$$\lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{x-2}{x+2} = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2-} \frac{x-2}{x+2} = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-2}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = 1.$$

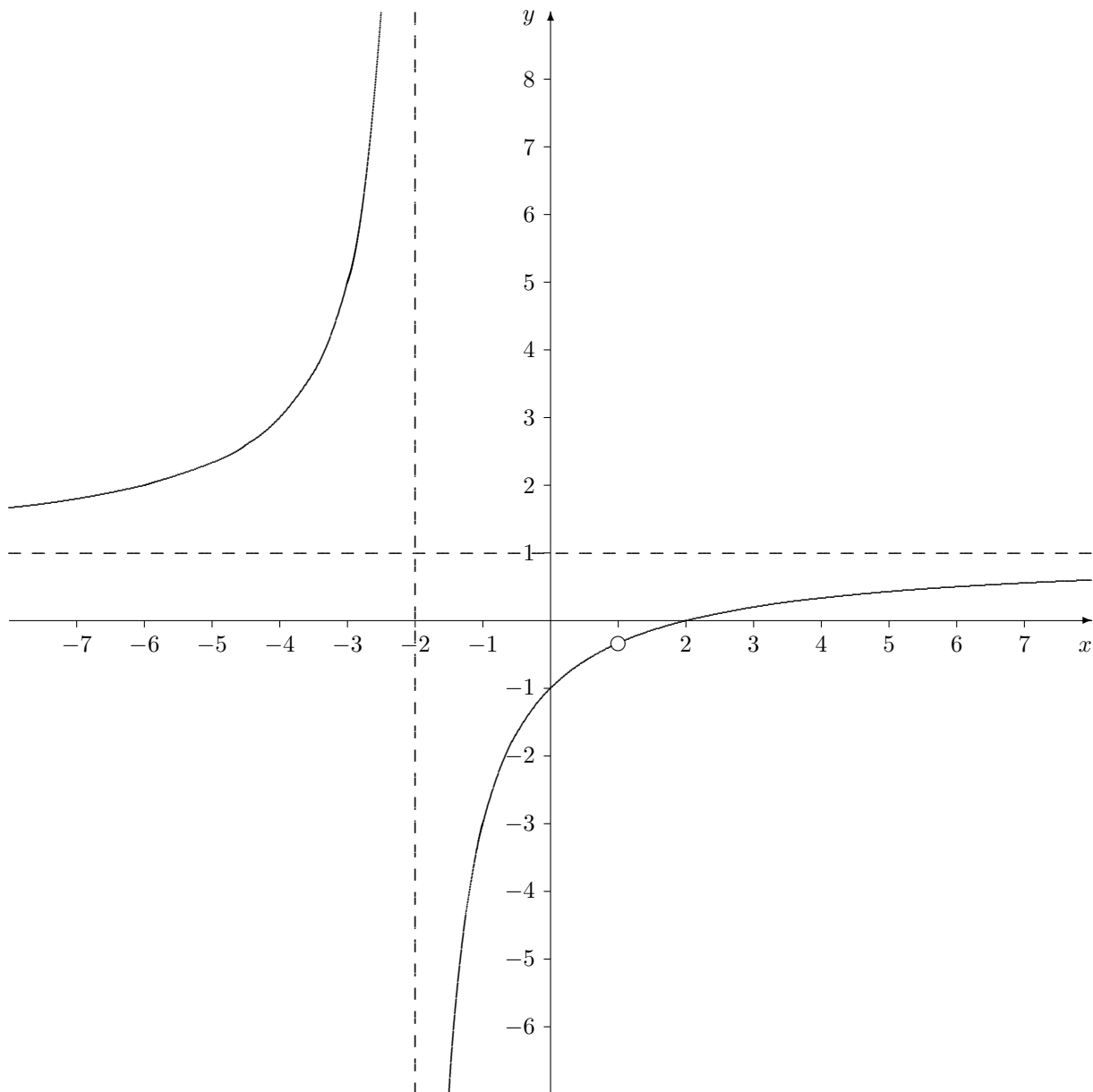
Die einzige Nullstelle ist 2, denn

$$f(x) = 0 \iff x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) = 0 \text{ und } x \in \mathbb{D} \iff x = 2.$$

Der Schnittpunkt des Graphen von f mit der y -Achse ist der Punkt $(0, -1)$, denn:

$$f(0) = \frac{2}{(-1) \cdot 2} = -1.$$

Diese Angaben reichen aus, um den Verlauf des Graphen grob zu skizzieren.



Aufgabe 5

- (a) Zähler und Nenner von f sind stetige Funktionen in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, und der Nenner wird in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ nicht 0. Daher ist f stetig in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Da $|x| = x$ für $x > 0$ und $|x| = -x$ für $x < 0$ ist, folgt weiter

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} 1 = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0-} (-1) = -1.$$

Da der rechts- und linksseitige Grenzwert für $x \rightarrow 0$ verschieden sind, existiert der Grenzwert von f für $x \rightarrow 0$ nicht (Satz 5.2.4). Daher kann f an der Stelle 0 nicht so definiert werden, dass eine auf $\mathbb{R}$ stetige Funktion entsteht (Definition 5.2.5).

- (b) Mit derselben Begründung wie in (a) ist f stetig in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wegen $|x| = x$ für $x > 0$ und $|x| = -x$ für $x < 0$ gilt jetzt

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} x = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x^2}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0-} (-x) = 0.$$

Der Grenzwert von f für $x \rightarrow 0$ existiert also und hat den Wert 0 (Satz 5.2.4). Setzen wir $f(0) = 0$, so ist der Grenzwert für $x \rightarrow 0$ gleich dem Funktionswert $f(0)$, die Funktion also nach Definition 5.2.5 stetig in 0. Damit ist sie dann auch stetig auf $\mathbb{R}$.

Mathematik für Chemiker

Brunner, G.; Brück, R.

2013, IX, 374 S., Softcover

ISBN: 978-3-642-37504-0