

Lösungen der Aufgaben zu Kapitel 6

Abschnitt 6.1

Aufgabe 1

$$(a) \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x,$$

$$(b) \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x - x - h}{hx(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}.$$

Aufgabe 2

- (a) Beachten Sie, dass wegen der Stetigkeit der Funktion $\sqrt{x}$ in der folgenden Rechnung $\lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{x+h} = \sqrt{x}$ gilt.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Für $a = 0$ ergibt sich

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = \infty.$$

Daher ist die Funktion $\sqrt{x}$ in $a = 0$ nicht differenzierbar.

- (b) Ist die Funktion f differenzierbar in a , so gilt nach Satz 6.1.2 mit $h = x - x_0$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x - x_0) \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0.$$

Die lineare Funktion $l: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die in der Umgebung von x_0 näherungsweise mit f übereinstimmt, ist dann gegeben durch $l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Für $f(x) = \sqrt{x}$ und $x_0 = 9$ ist die lineare Funktion somit gegeben durch

$$l(x) = f(9) + f'(9)(x - 9) = 3 + \frac{1}{6}(x - 9) = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}.$$

Nach Folgerung 6.1.4 hat die Tangente im Punkt $(9, 3)$ die Gleichung

$$y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}.$$

- (c) Nach Satz 6.1.2 gilt mit $a = 9$:

$$f(9+h) = f(9) + f'(9)h + h\varepsilon(h) \quad \text{und} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0,$$

also

$$f(9+h) \approx f(9) + f'(9)h.$$

Daraus ergeben sich mit $f(x) = \sqrt{x}$ und $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ die Näherungswerte

$$\sqrt{10} = \sqrt{9+1} \approx \sqrt{9} + \frac{1}{2\sqrt{9}} \cdot 1 = \frac{19}{6},$$

$$\sqrt{8} = \sqrt{9-1} \approx \sqrt{9} + \frac{1}{2\sqrt{9}} \cdot (-1) = \frac{17}{6}.$$

Aufgabe 3

Nach Definition der Funktion f gilt:

$$h > 0 \implies 1+h > 1 \implies f(1+h) = 3(1+h)^2 - 1,$$

$$h < 0 \implies 1+h < 1 \implies f(1+h) = 2(1+h)^3.$$

Damit ergeben sich als rechtsseitiger und linksseitiger Grenzwert für $h \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{3(1+h)^2 - 1 - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{3(1+2h+h^2) - 1 - 2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{6h+3h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} (6+3h) = 6, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{2(1+h)^3 - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{2(1+3h+3h^2+h^3) - 2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{6h+6h^2+2h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} (6+6h+2h^2) = 6. \end{aligned}$$

Da die beiden einseitigen Grenzwerte denselben Wert 6 haben, existiert der Grenzwert für $h \rightarrow 0$ und hat ebenfalls den Wert 6 (Satz 5.2.4). Also ist die Funktion differenzierbar in $x_0 = 1$.

Aufgabe 4

Nach Folgerung 6.1.4 lautet die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(a, f(a))$

$$y = f(a) + f'(a)(x-a) \iff y = f'(a)x + (f(a) - af'(a)).$$

Damit $y = -x$ die Gleichung der Tangente ist, muss also gelten:

$$f'(a) = -1 \text{ und } f(a) - af'(a) = 0.$$

Mit der angegebenen Ableitung folgt:

$$f'(a) = -1 \iff 3a^2 - 12a + 8 = -1 \iff a^2 - 4a + 3 = 0 \iff a = 3 \text{ oder } a = 1.$$

Für diese beiden möglichen Stellen a prüfen wir, ob die zweite Bedingung erfüllt ist.

$$a = 3 \implies f(a) - af'(a) = f(3) - 3f'(3) = 0,$$

$$a = 1 \implies f(a) - af'(a) = f(1) - f'(1) = 4 \neq 0.$$

Für die Stelle $a = 3$ sind also beide oben gefundenen Bedingungen erfüllt. Daher hat der Graph von f im Punkt $(a, f(a)) = (3, -3)$ die Gerade mit der Gleichung $y = -x$ als Tangente.

Abschnitt 6.2

Aufgabe 1

$$(a) \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{7}x^5} \cdot 7 \cdot 5x^4 = \frac{5}{2} \sqrt{7} x^{3/2},$$

$$(b) \quad f'(x) = \frac{5}{2} \sqrt{7} x^{3/2}.$$

Aufgabe 2

$$(a) \quad f(x) = \sqrt[5]{3} x^{1/5} (x-1)^{7/5} \implies f'(x) = \sqrt[5]{3} \left(\frac{1}{5} x^{-4/5} (x-1)^{7/5} + \frac{7}{5} x^{1/5} (x-1)^{2/5} \right) \\ = \frac{\sqrt[5]{3}}{5} x^{\frac{1}{5}} (x-1)^{\frac{2}{5}} (x^{-1}(x-1) + 7) = \frac{\sqrt[5]{3}}{5} \sqrt[5]{x(x-1)^2} \left(7 + \frac{x-1}{x} \right);$$

$$(b) \quad f(x) = (\sin x)^{\frac{5}{3}} \implies f'(x) = \frac{5}{3} (\sin x)^{\frac{2}{3}} \cos x = \frac{5}{3} \sqrt[3]{\sin^2 x} \cos x;$$

$$(c) \quad f(x) = (2x+1)^{-1} \implies f'(x) = (-1)(2x+1)^{-2} \cdot 2 = \frac{-2}{(2x+1)^2};$$

$$(d) \quad f(x) = (2x+1)^{-4} \implies f'(x) = (-4)(2x+1)^{-5} \cdot 2 = \frac{-8}{(2x+1)^5};$$

$$(e) \quad f(x) = (\sin x)^{-2} \implies f'(x) = -2(\sin x)^{-3} \cos x = \frac{-2 \cos x}{\sin^3 x};$$

$$(f) \quad f(x) = (x-1)^{\frac{14}{5}} \implies f'(x) = \frac{14}{5} (x-1)^{\frac{9}{5}} = \frac{14}{5} \sqrt[5]{(x-1)^9} \\ = \frac{14}{5} (x-1) \sqrt[5]{(x-1)^4};$$

$$(g) \quad f(x) = (2x+1)^{\frac{22}{3}} \implies f'(x) = \frac{22}{3} (2x+1)^{\frac{19}{3}} \cdot 2 = \frac{44}{3} \sqrt[3]{(2x+1)^{19}} \\ = \frac{44}{3} (2x+1)^6 \sqrt[3]{2x+1}.$$

Aufgabe 3

$$(a) \quad f'(x) = \sqrt{1-x^2} + x \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(b) \quad f'(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - x \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{(1+x^2) - x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}};$$

$$\begin{aligned}
(c) \quad f'(x) &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}}{1-x} = \frac{(1-x) - (-1)(1+x)}{2(1-x)\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}} \\
&= \frac{1-x+1+x}{2(1-x)\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}} = \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(d) \quad f'(x) &= \frac{1}{1+\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \cdot \frac{1-x-(1+x)(-1)}{(1-x)^2} \\
&= \frac{1-x}{(1-x)+(1+x)} \cdot \frac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1+x}} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{(1-x)\sqrt{1-x} \cdot 2}{2 \cdot 2\sqrt{1+x}(1-x)^2} \\
&= \frac{(1-x)\sqrt{1-x}\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1+x}(1-x)^2\sqrt{1-x}} = \frac{(1-x)^2}{2\sqrt{1-x^2}(1-x)^2} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}};
\end{aligned}$$

$$(e) \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \right];$$

$$(f) \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt{x}}}} \left[\sqrt{x \cdot \sqrt{x}} + \frac{x}{2\sqrt{x \cdot \sqrt{x}}} \left(\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} \right) \right];$$

$$(g) \quad f'(x) = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x;$$

$$\begin{aligned}
(h) \quad f'(x) &= \cos(\cos^2 x) 2 \cos x (-\sin x) \cos(\sin^2 x) \\
&\quad + \sin(\cos^2 x) (-\sin(\sin^2 x)) 2 \sin x \cos x \\
&= -\sin 2x (\cos(\cos^2 x) \cos(\sin^2 x) + \sin(\cos^2 x) \sin(\sin^2 x)) \\
&= -\sin 2x \cos(\cos^2 x - \sin^2 x) = -\sin 2x \cos(\cos 2x).
\end{aligned}$$

Bemerkung zu Aufgabe (f): Die Vereinfachung der oben gewonnenen Ableitung führt zu dem Ergebnis $f'(x) = \frac{7}{8\sqrt[8]{x}}$. Dieses lässt sich leichter herleiten, wenn wir die Funktion wie folgt zuerst vereinfachen und dann ableiten:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt{x}}} = \left(x \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(x \left(x^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(x x^{\frac{3}{4}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(x^{\frac{7}{4}} \right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{7}{8}} \\
\implies f'(x) &= \frac{7}{8} x^{-\frac{1}{8}} = \frac{7}{8\sqrt[8]{x}}.
\end{aligned}$$

Abschnitt 6.3

Aufgabe 1

(a) Wir bestimmen die Nullstellen der Ableitung $f'(x)$:

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x - 3) = 0 \iff x = 0 \text{ oder } x = \frac{3}{2}.$$

An diesen beiden Stellen hat die Funktion nach Satz 6.3.2 möglicherweise lokale Extrema. Die Funktionswerte in diesen beiden Punkten und in den Endpunkten des Intervalls sind:

$$f(0) = 0, \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{16}, \quad f(-3) = 135, \quad f(3) = 27.$$

Nach Folgerung 6.3.3 hat f das absolute Minimum $-\frac{27}{16}$ an der Stelle $\frac{3}{2}$ und das absolute Maximum 135 im Randpunkt -3 .

(b) Die Funktion ist nur definiert, wenn $3 + 4x - 4x^2 \geq 0$ ist. Wir untersuchen, für welche $x \in \mathbb{R}$ diese Ungleichung erfüllt ist :

$$\begin{aligned} 3 + 4x - 4x^2 \geq 0 &\iff x^2 - x - \frac{3}{4} \leq 0 \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 1 \leq 0 \\ &\iff \left|x - \frac{1}{2}\right| \leq 1 \iff -1 \leq x - \frac{1}{2} \leq 1 \iff -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Der Definitionsbereich von f ist somit das Intervall $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

Wir bestimmen die Nullstellen der Ableitung von f :

$$f'(x) = \frac{4 - 8x}{2\sqrt{3 + 4x - 4x^2}} = 0 \iff 4 - 8x = 0 \iff x = \frac{1}{2}.$$

Nach Satz 6.3.2 hat f an dieser Stelle möglicherweise ein lokales Extremum. Die Funktionswerte an dieser Stelle und in den Endpunkten des Intervalls sind:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2, \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 = f\left(\frac{3}{2}\right).$$

Nach Folgerung 6.3.3 hat f das absolute Maximum 2 im Punkt $\frac{1}{2}$ und das absolute Minimum 0 in den Randpunkten $-\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{2}$.

Aufgabe 2

Nach Voraussetzung erfüllt die Funktion f die Voraussetzungen des 1. Mittelwertsatzes (Satz 6.3.5). Daher gibt es zu beliebigen Punkten $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $x_1 < x_2$ eine Stelle $x_0 \in (x_1, x_2)$ so, dass gilt:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_0).$$

Da nach Voraussetzung $f'(x_0) \neq 0$ ist, ist daher $f(x_2) - f(x_1) \neq 0$, also $f(x_2) \neq f(x_1)$. Also nimmt f an je zwei verschiedenen Stellen $x_1, x_2 \in [a, b]$ nicht denselben Funktionswert an.

Dann nimmt f auch nur an höchstens einer Stelle in $[a, b]$ den Wert 0 an, hat also nur höchstens eine Nullstelle.

Die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = x^n - nx + c \text{ (} n \in \mathbb{N} \text{ und } c \in \mathbb{R} \text{)}$$

ist in $\mathbb{R}$ stetig und differenzierbar. Daher ist sie insbesondere stetig auf $[-1, 1]$ und differenzierbar in $(-1, 1)$. Weiter gilt:

$$f'(x) = nx^{n-1} - n = 0 \iff nx^{n-1} = n \iff x^{n-1} = 1 \iff x = \pm 1.$$

Daher ist $f'(x) \neq 0$ in dem offenen Intervall $(-1, 1)$. Wie vorher gezeigt, besitzt f dann in $[-1, 1]$ nur höchstens eine Nullstelle, hat die Gleichung in $[-1, 1]$ also nur höchstens eine Lösung.

Aufgabe 3

- (a) Wir bestimmen die in $[0, 2\pi]$ enthaltenen Intervalle, in denen $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$ ist. Nach Satz 6.3.7 ist f in diesen Intervallen streng monoton steigend bzw. fallend. Zuerst berechnen wir die Ableitung von f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-3 \sin x (2 - \sin x) - 3 \cos x (-\cos x)}{(2 - \sin x)^2} = \frac{-6 \sin x + 3 \sin^2 x + 3 \cos^2 x}{(2 - \sin x)^2} \\ &= \frac{-6 \sin x + 3 (\sin^2 x + \cos^2 x)}{(2 - \sin x)^2} = \frac{-6 \sin x + 3}{(2 - \sin x)^2} = \frac{3(1 - 2 \sin x)}{(2 - \sin x)^2}. \end{aligned}$$

Da der Nenner immer positiv ist, folgt daraus:

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff 1 - 2 \sin x > 0 \iff \sin x < \frac{1}{2} \\ &\iff 0 < x < \frac{\pi}{6} \quad \text{oder} \quad \frac{5}{6}\pi < x < 2\pi; \\ f'(x) < 0 &\iff 1 - 2 \sin x < 0 \iff \sin x > \frac{1}{2} \iff \frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi. \end{aligned}$$

f ist also streng monoton steigend in den Intervallen $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ und $\left[\frac{5}{6}\pi, 2\pi\right]$ und streng monoton fallend in dem Intervall $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right]$.

- (b) Die Ableitung von f ist:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3((x-1)^2 - 4).$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} f'(x) < 0 &\iff (x-1)^2 < 4 \iff |x-1| < 2 \iff -2 < x-1 < 2 \\ &\iff -1 < x < 3; \\ f'(x) > 0 &\iff (x-1)^2 > 4 \iff |x-1| > 2 \iff x < -1 \text{ oder } x > 3. \end{aligned}$$

Nach Satz 6.3.7 ist f also streng monoton fallend im Intervall $[-1, 3]$ und streng monoton steigend in den Intervallen $(-\infty, -1]$ und $[3, \infty)$.

Aufgabe 4

- (a) Es gilt: $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach Satz 6.3.7 ist daher f in $\mathbb{R}$ streng monoton steigend. Daher besitzt $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nach Folgerung 4.2.4 eine Umkehrfunktion.
- (b) Es gilt: $f'(x) = 3x^2 - 1$. Damit folgt:

$$f'(x) > 0 \iff 3x^2 - 1 > 0 \iff x^2 > \frac{1}{3} \iff |x| > \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\iff x \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \infty\right);$$

$$f'(x) < 0 \iff 3x^2 - 1 < 0 \iff x^2 < \frac{1}{3} \iff |x| < \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\iff x \in \left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right).$$

Also ist f nach Satz 6.3.7 auf jedem der drei angegebenen Intervalle streng monoton. Die Einschränkung von f auf jedes dieser Intervalle besitzt daher nach Folgerung 4.2.4 eine Umkehrfunktion. Als Funktion auf $\mathbb{R}$ ist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ allerdings nicht streng monoton und besitzt daher keine Umkehrfunktion.

Aufgabe 5

- (a) f ist nicht definiert an den Stellen, in denen der Nenner 0 ist. Das ist genau dann der Fall, wenn gilt:

$$x^2 - x - 2 = 0 \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = 0$$

$$\iff \left(\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}\right) \left(\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2}\right) = 0$$

$$\iff (x + 1)(x - 2) = 0 \iff x = 2 \text{ oder } x = -1.$$

Die Funktion f ist also nicht definiert an den Stellen $a_1 = 2$ und $a_2 = -1$, d. h. ihr Definitionsbereich ist $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$.

Mit der gerade gewonnenen Produktdarstellung des Nenners können wir die Funktion einfacher wie folgt angeben:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5}{(x + 1)(x - 2)}.$$

Die Nullstellen von f sind die Nullstellen des Zählers, die zum Definitionsbereich gehören, also die Stellen $\pm\sqrt{5}$.

Die Grenzwerte an den Stellen $a_1 = 2$ und $a_2 = -1$ lassen sich an der vereinfachten Darstellung der Funktion sofort ablesen:

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = -\infty.$$

Zur Berechnung der Grenzwerte für $x \rightarrow \pm\infty$ erweitern wir $f(x)$ mit $\frac{1}{x^2}$.

$$f(x) = \frac{x^2 - 5}{(x+1)(x-2)} = \frac{1 - \frac{5}{x^2}}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{2}{x}\right)} \implies \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1.$$

Mit Hilfe der Ableitung von f bestimmen wir die Intervalle, auf denen f streng monoton ist:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - x - 2) - (x^2 - 5)(2x - 1)}{(x^2 - x - 2)^2} = \frac{-x^2 + 6x - 5}{(x^2 - x - 2)^2}.$$

Da der Nenner im Definitionsintervall immer > 0 ist, folgt daraus:

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff -x^2 + 6x - 5 > 0 \iff x^2 - 6x + 5 < 0 \\ &\iff (x-3)^2 - 4 < 0 \iff |x-3| < 2 \iff 1 < x < 5; \\ f'(x) < 0 &\iff (x-3)^2 - 4 > 0 \iff |x-3| > 2 \iff x < 1 \text{ oder } x > 5. \end{aligned}$$

Nach Satz 6.3.7 ist daher f streng monoton steigend im Intervall $[1, 5]$ und streng monoton fallend in den Intervallen $(-\infty, 1]$ und $[5, \infty)$.

- (b) Die Funktion ist eine Differenz zweier rationaler Funktionen. Sie ist nicht definiert an den Stellen, an denen der Nenner einer der beiden rationalen Funktionen 0 wird, also an den Stellen 0 und ± 1 . Der Definitionsbereich ist daher $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

Vereinfachung von $f(x)$:

$$f(x) = \frac{2(x^2 - 1) - 2x^2}{x(x^2 - 1)} = \frac{-2}{x(x^2 - 1)} = \frac{-2}{x(x+1)(x-1)}.$$

f hat keine Nullstellen. Die Grenzwerte lassen sich an der vereinfachten Darstellung der Funktion leicht ablesen:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) &= -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \infty, \\ \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) &= \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) &= -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \infty, \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) &= 0. \end{aligned}$$

Um die Intervalle zu bestimmen, auf denen f monoton ist, berechnen wir die Ableitung von f :

$$f(x) = \frac{-2}{x(x^2 - 1)} = \frac{-2}{x^3 - x} \implies f'(x) = \frac{-(-2)(3x^2 - 1)}{x^2(x^2 - 1)^2} = \frac{2(3x^2 - 1)}{x^2(x^2 - 1)^2}.$$

Da der Nenner im Definitionsbereich immer positiv ist, folgt:

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff 3x^2 - 1 > 0 \iff x^2 > \frac{1}{3} \iff |x| > \sqrt{\frac{1}{3}} \\ &\iff x > \sqrt{\frac{1}{3}} \text{ oder } x < -\sqrt{\frac{1}{3}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) < 0 &\iff 3x^2 - 1 < 0 \iff x^2 < \frac{1}{3} \iff |x| < \sqrt{\frac{1}{3}} \\
&\iff -\sqrt{\frac{1}{3}} < x < \sqrt{\frac{1}{3}}.
\end{aligned}$$

Nach Satz 6.3.7 ist f daher streng monoton steigend auf den Intervallen

$$\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right] \quad \text{und} \quad \left[\sqrt{\frac{1}{3}}, \infty\right)$$

und streng monoton fallend auf dem Intervall

$$\left[-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right].$$

Abschnitt 6.4

Aufgabe 1

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \sin(x-1)^2}{\sin^2(\pi x)} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \lim_{x \rightarrow 1} x \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)^2}{\sin^2(\pi x)} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)^2}{\sin^2(\pi x)} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1) \cos(x-1)^2}{2\pi \sin(\pi x) \cos(\pi x)} = \frac{1}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(x-1)^2}{\cos(\pi x)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sin(\pi x)} \\
&= -\frac{1}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sin(\pi x)} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\pi \cos(\pi x)} = \frac{1}{\pi^2}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \frac{1}{\cos^2 x}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^3 x - 1}{3x^2 \cos^2 x} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3 \cos^2 x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^3 x - 1}{x^2} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^3 x - 1}{x^2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3 \cos^2 x \sin x}{2x} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \cos^2 x \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \\
&= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \left(x \tan \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right) [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\tan \left(\frac{\pi}{2} - x \right)}{\frac{1}{x}} \begin{bmatrix} \infty \\ \infty \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{-1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} \left[\frac{0}{\frac{0}{0}} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{2x}{2 \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \left(-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right) (-1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} \\
&= 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} \left[\frac{0}{\frac{0}{0}} \right] = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = 1.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}}{\frac{\pi}{2} + \arcsin x} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^{\frac{2}{3}}}{\frac{\pi}{2} + \arcsin x} \left[\frac{0}{\frac{0}{0}} \right] = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \\
&= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{(x+1)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}{(x+1)^{\frac{1}{3}}} \\
&= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{1-x} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+1}}{(x+1)^{\frac{1}{3}}} \\
&= \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2} \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^{\frac{1}{2}} (x+1)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^{\frac{1}{6}} \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Aufgabe 5

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2 \cos x} - \frac{1}{x^2} \right) [\infty - \infty] &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \\
&= 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \left[\frac{0}{\frac{0}{0}} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} \left[\frac{0}{\frac{0}{0}} \right] \\
&= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 6

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[4]{x} \sin \frac{1}{\sqrt{x}} \right) [\infty \cdot 0] &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{\sqrt{x}}}{x^{-\frac{1}{4}}} \left[\frac{0}{\frac{0}{0}} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x}}}{-\frac{1}{4}x^{-\frac{5}{4}}} \\
&= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{\sqrt{x}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}} = 2 \cdot 1 \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Aufgabe 7

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 - \cos x} - \frac{\sin x}{x(1 - \cos x)} \right) \begin{bmatrix} \infty - \frac{0}{0} \end{bmatrix} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x(1 - \cos x)} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{0}{0} \end{bmatrix} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 - \cos x + x \sin x} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{0}{0} \end{bmatrix} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \sin x + x \cos x} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{0}{0} \end{bmatrix} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{3 \cos x - x \sin x} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Aufgabe 8

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos^2(x - 1)}{(x \arctan(x - 1))^2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos^2(x - 1)}{\arctan^2(x - 1)} \\ &= 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos^2(x - 1)}{\arctan^2(x - 1)} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2 \cos(x - 1)(-\sin(x - 1))}{2 \arctan(x - 1) \cdot \frac{1}{1 + (x - 1)^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(x - 1)}{\frac{1}{1 + (x - 1)^2}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x - 1)}{\arctan(x - 1)} \\ &= 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x - 1)}{\arctan(x - 1)} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(x - 1)}{\frac{1}{1 + (x - 1)^2}} = 1.\end{aligned}$$

Abschnitt 6.5

Aufgabe 1

Wir definieren eine vektorwertige Funktion durch

$$\mathbf{x}: [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{t} - 1 \end{pmatrix}.$$

Da die beiden Koordinatenfunktionen stetig in $[1, 4]$ sind, ist $\mathbf{x}$ nach Folgerung 6.5.3 eine stetige vektorwertige Funktion. Nach Definition 6.5.4 ist dann Γ eine Kurve, nämlich die Kurve von $\mathbf{x}$, und $\mathbf{x}$ ist die Parameterdarstellung von Γ . In Definition 6.5.10 ist angegeben, unter welchen Bedingungen eine Kurve glatt ist. Wir bilden die Ableitung von $\mathbf{x}$ und prüfen, ob die Bedingungen für diese erfüllt sind:

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{t}} \end{pmatrix}.$$

Die Ableitung existiert also und ist stetig, weil beide Koordinatenfunktionen im Intervall $[1, 4]$ stetig sind. Weiter ist $\mathbf{x}'(t) \neq \mathbf{0}$, weil zum Beispiel die erste Koordinatenfunktion $\neq 0$ ist.

Damit ist Γ nach Definition 6.5.10 eine glatte Kurve.

Aufgabe 2

Ein Punkt der Kurve liegt genau dann auf der x -Achse, wenn seine zweite und dritte Koordinate 0 sind, wenn also $t\sqrt{1+t} = 0$ und $\arctan t = 0$ ist. Beides ist genau dann der Fall, wenn $t = 0$ gilt. Für $t = 0$ erhalten wir den Kurvenpunkt $P = (4\sqrt{2}, 0, 0)$ auf der x -Achse.

Um den Schnittwinkel zu berechnen, bestimmen wir den Tangentenvektor an die Kurve im Punkt P , also für den Parameterwert $t = 0$:

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{2-t}} \\ \sqrt{1+t} + \frac{t}{2\sqrt{1+t}} \\ \frac{1}{1+t^2} \end{pmatrix} \implies \mathbf{x}'(0) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen den Schnittwinkel α zwischen dem Tangentenvektor $\mathbf{x}'(0)$ und dem Einheitsvektor $\mathbf{e}_1$ auf der x -Achse nach der Formel in Folgerung 3.2.4:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(0) \cdot \mathbf{e}_1 &= \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\sqrt{2}, \quad \|\mathbf{x}'(0)\| = \sqrt{4} = 2, \quad \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 1 \\ \implies \cos \alpha &= \frac{-\sqrt{2}}{2 \cdot 1} = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \implies \alpha = \frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

Der Schnittwinkel zwischen der Kurve und der x -Achse ist also $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

Aufgabe 3

Wir berechnen die Ableitung der Parameterdarstellung:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2(1+t^2)-4t^2}{(1+t^2)^2} \\ \frac{-2t(1+t^2)-(1-t^2)2t}{(1+t^2)^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{(1+t^2)^2} \begin{pmatrix} 2(1-t^2) \\ -4t \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{(1+t^2)^2} \begin{pmatrix} 1-t^2 \\ -2t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nach Folgerung 6.5.3 ist sie stetig, weil die Ableitungen beider Koordinatenfunktionen stetig sind. Weiter gilt:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}'(t)\|^2 &= (x'(t))^2 + (y'(t))^2 = \frac{4}{(1+t^2)^4} \left((1-t^2)^2 + (-2t)^2 \right) = \frac{4(1+t^2)^2}{(1+t^2)^4} \\ &= \frac{4}{(1+t^2)^2} \neq 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Also ist $\mathbf{x}'(t) \neq \mathbf{0}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Nach Definition 6.5.10 ist Γ somit eine glatte Kurve.

Wir berechnen $\|\mathbf{x}(t)\|$ und den Winkel zwischen $\mathbf{x}(t)$ und $\mathbf{x}'(t)$:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}(t)\|^2 &= \frac{4t^2}{(1+t^2)^2} + \frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2} = \frac{(1+t^2)^2}{(1+t^2)^2} = 1, \\ \mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{x}'(t) &= \frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} 2t \\ 1-t^2 \end{pmatrix} \cdot \frac{2}{(1+t^2)^2} \begin{pmatrix} 1-t^2 \\ -2t \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{(1+t^2)^3} (2t(1-t^2) - 2t(1-t^2)) = 0.\end{aligned}$$

Also ist $\|\mathbf{x}(t)\|$ konstant für alle $t \in \mathbb{R}$, und der Winkel zwischen dem Ortsvektor $\mathbf{x}(t)$ und dem Tangentenvektor $\mathbf{x}'(t)$ ist für alle $t \in \mathbb{R}$ konstant gleich $\frac{\pi}{2}$. Nach Satz 6.5.2 dürfen wir die Grenzwerte von $\mathbf{x}(t)$ für $t \rightarrow \pm\infty$ koordinatenweise berechnen:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) &= \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{2t}{1+t^2} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{\frac{1}{t} + t} = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \pm\infty} y(t) &= \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1-t^2}{1+t^2} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{t^2} - 1}{\frac{1}{t^2} + 1} = -1.\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{x}(t).$$

Γ ist der Kreis um den Nullpunkt O mit dem Radius 1. Das erkennt man auch wie folgt:

Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist $(1+t)^2 \geq 0$ und $(1-t)^2 \geq 0$. Damit folgt:

$$\begin{aligned}(1+t)^2 \geq 0 &\iff 1+2t+t^2 \geq 0 \iff -(1+t^2) \leq 2t \iff -1 \leq \frac{2t}{1+t^2}, \\ (1-t)^2 \geq 0 &\iff 1-2t+t^2 \geq 0 \iff 2t \leq 1+t^2 \iff \frac{2t}{1+t^2} \leq 1.\end{aligned}$$

Daher ist durch $\frac{2t}{1+t^2}$ ein eindeutiger Winkel ϕ bestimmt mit $\frac{2t}{1+t^2} = \cos \phi$. Weiter ist dann:

$$\sin \phi = \sqrt{1 - \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{(1+t^2)^2 - 4t^2}{(1+t^2)^2}} = \sqrt{\frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Wenn wir also durch $\cos \phi = \frac{2t}{1+t^2}$ den neuen Parameter ϕ einführen, erhalten wir als neue Parameterdarstellung von Γ die bekannte Parameterdarstellung eines Kreises um O mit dem Radius 1:

$$\mathbf{x}: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{x}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4

(a) Das Skalarprodukt von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ ist die wie folgt gegebene reellwertige Funktion:

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})(t) = \mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{y}(t) = x_1(t)y_1(t) + x_2(t)y_2(t) + x_3(t)y_3(t).$$

Ihre Differentiation liefert die Aussage (a):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) &= (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})'(t) = (x_1(t)y_1(t) + x_2(t)y_2(t) + x_3(t)y_3(t))' \\ &= x_1'(t)y_1(t) + x_1(t)y_1'(t) + x_2'(t)y_2(t) + x_2(t)y_2'(t) \\ &\quad + x_3'(t)y_3(t) + x_3(t)y_3'(t) \\ &= \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{x}'(t) \cdot \mathbf{y}(t) + \mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{y}'(t) = \left(\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) \right) \cdot \mathbf{y}(t) + \mathbf{x}(t) \cdot \left(\frac{d}{dt} \mathbf{y}(t) \right). \end{aligned}$$

(b) Das Vektorprodukt von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ ist die wie folgt gegebene vektorwertige Funktion:

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y})(t) = \mathbf{x}(t) \times \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} x_2(t)y_3(t) - x_3(t)y_2(t) \\ x_3(t)y_1(t) - x_1(t)y_3(t) \\ x_1(t)y_2(t) - x_2(t)y_1(t) \end{pmatrix}.$$

Ihre Ableitung erhalten wir durch Differentiation der Koordinatenfunktionen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{x} \times \mathbf{y})(t) &= (\mathbf{x}(t) \times \mathbf{y}(t))' \\ &= \begin{pmatrix} x_2'(t)y_3(t) + x_2(t)y_3'(t) - x_3'(t)y_2(t) - x_3(t)y_2'(t) \\ x_3'(t)y_1(t) + x_3(t)y_1'(t) - x_1'(t)y_3(t) - x_1(t)y_3'(t) \\ x_1'(t)y_2(t) + x_1(t)y_2'(t) - x_2'(t)y_1(t) - x_2(t)y_1'(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_2'(t)y_3(t) - x_3'(t)y_2(t) \\ x_3'(t)y_1(t) - x_1'(t)y_3(t) \\ x_1'(t)y_2(t) - x_2'(t)y_1(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2(t)y_3'(t) - x_3(t)y_2'(t) \\ x_3(t)y_1'(t) - x_1(t)y_3'(t) \\ x_1(t)y_2'(t) - x_2(t)y_1'(t) \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{x}'(t) \times \mathbf{y}(t) + \mathbf{x}(t) \times \mathbf{y}'(t) \\ &= \left(\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) \right) \times \mathbf{y}(t) + \mathbf{x}(t) \times \left(\frac{d}{dt} \mathbf{y}(t) \right). \end{aligned}$$

Aufgabe 5

Nach (b) in Aufgabe (4) ist

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x} \times \mathbf{v}) = \left(\frac{d}{dt} \mathbf{x} \right) \times \mathbf{v} + \mathbf{x} \times \left(\frac{d}{dt} \mathbf{v} \right)$$

$$= \mathbf{x}' \times \mathbf{v} + \mathbf{x} \times \mathbf{v}' = \mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{x} \times \mathbf{a} = \mathbf{x} \times \mathbf{a},$$

denn nach Satz 3.2.7, (2) ist $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Ist $\mathbf{x} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$, so gilt dann also:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x} \times \mathbf{v}) = \mathbf{x} \times \mathbf{a} = \mathbf{0} \implies \mathbf{x} \times \mathbf{v} = \mathbf{c} \text{ ist ein konstanter Vektor.}$$

Für jeden Kurvenpunkt liegen somit der Ortsvektor des Punktes und der Tangentenvektor an die Kurve in diesem Punkt in einer Ebene (mit Normalenvektor $\mathbf{c}$). Daher handelt es sich dann um eine ebene Kurve.

Die Parameterdarstellung von $\mathbf{x}$, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung sind:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ a \sin t \\ bt \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(t) = \mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} -a \sin t \\ a \cos t \\ b \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \begin{pmatrix} -a \cos t \\ -a \sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen $\|\mathbf{v}(t)\|$, $\|\mathbf{a}(t)\|$ und das Skalarprodukt $\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{a}(t)$:

$$\|\mathbf{v}(t)\|^2 = a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2 = a^2 + b^2 \implies \|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\|\mathbf{a}(t)\|^2 = a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t = a^2 \implies \|\mathbf{a}(t)\| = |a|,$$

$$\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{a}(t) = a^2 \sin t \cos t - a^2 \sin t \cos t + 0 = 0 \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Für alle $t \in \mathbb{R}$ haben also Geschwindigkeit und Beschleunigung einen konstanten Betrag und sind senkrecht zueinander.

Abschnitt 6.6

Aufgabe 1

$$(a) \quad f(x, y, z) = \left(x + x^{\frac{1}{5}} y z^{\frac{7}{5}} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= \frac{1}{3} \left(x + x^{\frac{1}{5}} y z^{\frac{7}{5}} \right)^{-\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{1}{5} x^{-\frac{4}{5}} y z^{\frac{7}{5}} \right) \\ &= \frac{1}{3 \sqrt[3]{\left(x + y z \sqrt[5]{x z^2} \right)^2}} \left(1 + \frac{1}{5} y z \sqrt[5]{\frac{z^2}{x^4}} \right), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{1}{3} \left(x + x^{\frac{1}{5}} y z^{\frac{7}{5}} \right)^{-\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{5}} z^{\frac{7}{5}} = \frac{1}{3 \sqrt[3]{\left(x + y z \sqrt[5]{x z^2} \right)^2}} z \sqrt[5]{x z^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{1}{3} \left(x + x^{\frac{1}{5}} y z^{\frac{7}{5}} \right)^{-\frac{2}{3}} \frac{7}{5} x^{\frac{1}{5}} y z^{\frac{2}{5}} = \frac{7}{15 \sqrt[3]{\left(x + y z \sqrt[5]{x z^2} \right)^2}} y \sqrt[5]{x z^2}.$$

$$(b) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{xy} + \sqrt{xyz}}} \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{xy + \sqrt{xyz}}} \left(y + \frac{yz}{2\sqrt{xyz}} \right) \right],$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{xy} + \sqrt{xyz}}} \frac{1}{2\sqrt{xy + \sqrt{xyz}}} \left(x + \frac{xz}{2\sqrt{xyz}} \right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{xy} + \sqrt{xyz}}} \frac{1}{2\sqrt{xy + \sqrt{xyz}}} \frac{xy}{2\sqrt{xyz}}.$$

$$(c) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x(x - y) - (x^2 + y^2)}{(x - y)^2} = \frac{x^2 - 2xy - y^2}{(x - y)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2y(x - y) - (x^2 + y^2)(-1)}{(x - y)^2} = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{(x - y)^2}.$$

$$(d) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{1}{1 + xy\sqrt{yz}} \frac{1}{2\sqrt{xy\sqrt{yz}}} y\sqrt{yz},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{1}{1 + xy\sqrt{yz}} \frac{1}{2\sqrt{xy\sqrt{yz}}} \left(x\sqrt{yz} + \frac{xyz}{2\sqrt{yz}} \right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{1}{1 + xy\sqrt{yz}} \frac{1}{2\sqrt{xy\sqrt{yz}}} \frac{xy^2}{2\sqrt{yz}}.$$

Aufgabe 2

$$(a) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \arctan y^2 + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2xy}{1 + y^4}.$$

Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung sind dann:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{-\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1 - x^2} = \frac{x}{(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{2x(1 + y^4) - 2xy \cdot 4y^3}{(1 + y^4)^2} = \frac{2x(1 + y^4) - 8xy^4}{(1 + y^4)^2} = \frac{2x(1 - 3y^4)}{(1 + y^4)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{2y}{1 + y^4}.$$

$$(b) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = y^2 - 2xz,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2xy + z \cos(yz),$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -x^2 + y \cos(yz).$$

Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung sind dann:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) = -2z,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) = 2x - z^2 \sin(yz),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) = -y^2 \sin(yz),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y, z) = 2y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, z) = -2x,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x, y, z) = \cos(yz) - yz \sin(yz).$$

Aufgabe 3

- (a) Bei jeder der partiellen Ableitungen ist zuerst die Ableitung der Wurzelfunktion zu bilden. Diese kann daher von vornherein vor die Koordinatendarstellung gezogen werden.

$$\text{grad } f(x, y, z) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 y^2 - z^2}} \begin{pmatrix} 2xy^2 \\ 2x^2 y \\ -2z \end{pmatrix};$$

- (b) Bei jeder partiellen Ableitung ist zuerst die Funktion $\arctan$ abzuleiten. Daher kann diese Ableitung vor die Koordinatendarstellung gezogen werden.

$$\text{grad } f(x, y) = \frac{1}{1 + x^2(1 + y^2)} \begin{pmatrix} \sqrt{1 + y^2} \\ \frac{xy}{\sqrt{1 + y^2}} \end{pmatrix};$$

- (c) Bei beiden partiellen Ableitungen sind zuerst die Ableitungen der Funktion $\arcsin$ und der Wurzelfunktion zu bilden. Beide Ableitungen können daher vor die Koordinatendarstellung gezogen werden.

$$\begin{aligned} \text{grad } f(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - (xy)^2)}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - (xy)^2}} \begin{pmatrix} -2xy^2 \\ -2x^2 y \end{pmatrix} \\ &= \frac{-xy}{|xy|\sqrt{1 - (xy)^2}} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

- (d) Da die Differentiation als lineare Operation (Bemerkung 6.2.2) vertauschbar ist mit der Addition, ist das Gradientenfeld von $f(x, y, z)$ die Differenz der Gradientenfelder

von xy und $\sqrt{y^2 + (xz)^2}$. Bei dem letzteren können wir die Ableitung der Wurzelfunktion vor die Koordinatendarstellung ziehen.

$$\text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2\sqrt{y^2 + (xz)^2}} \begin{pmatrix} 2xz^2 \\ 2y \\ 2x^2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{y^2 + (xz)^2}} \begin{pmatrix} xz^2 \\ y \\ x^2z \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4

Der Kreis um den Nullpunkt O mit dem Radius a hat die Parameterdarstellung

$$\mathbf{x} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ a \sin t \end{pmatrix}.$$

Der Gradient von F im Punkt $(x, y) = (a \cos t, a \sin t)$ und der Tangentenvektor an den Kreis im Punkt $(x, y) = (a \cos t, a \sin t)$ sind dann:

$$\text{grad } F(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \cos t \\ 2a \sin t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} -a \sin t \\ a \cos t \end{pmatrix}.$$

Die beiden sind senkrecht zueinander, weil das Skalarprodukt den Wert 0 hat:

$$\begin{aligned} \text{grad } F(x, y) \cdot \mathbf{x}'(t) &= \begin{pmatrix} 2a \cos t \\ 2a \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a \sin t \\ a \cos t \end{pmatrix} \\ &= -2a^2 \sin t \cos t + 2a^2 \sin t \cos t = 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 5

In der Definition 6.6.9 wurde für eine auf einem Gebiet $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$ differenzierbare Funktion $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ das vollständige Differential von f in $\mathbf{x} \in \mathbb{D}$ definiert. Wie im Anschluss an Definition 6.6.9 angegeben, schreibt man das vollständige Differential kurz in der Form:

$$df(\mathbf{x}) = \text{grad } f(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}) dx_k.$$

- (a) Hier ist $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion einer Variablen x . Das vollständige Differential ist also nur ein Summand:

$$df(x) = \frac{df}{dx}(x) \cdot dx = f'(x) dx = \frac{3x^2}{\sqrt{1 + 2x^3}} dx.$$

- (b) Mit $\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 2x\}$ ist $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ eine in $\mathbb{D}$ differenzierbare Funktion der beiden Variablen x, y . Die partiellen Ableitungen von f sind:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y(y - 2x) - xy(-2)}{(y - 2x)^2} = \frac{y^2}{(y - 2x)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x(y - 2x) - xy}{(y - 2x)^2} = \frac{-2x^2}{(y - 2x)^2}.$$

Das vollständige Differential ist daher:

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dy = \frac{y^2}{(y - 2x)^2} dx - \frac{2x^2}{(y - 2x)^2} dy.$$

- (c) Mit $\mathbb{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz > 0\}$ ist $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion der drei Variable x, y, z . Die partiellen Ableitungen sind:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{yz}{2\sqrt{xyz}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{xz}{2\sqrt{xyz}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{xy}{2\sqrt{xyz}}.$$

Das vollständige Differential ist:

$$\begin{aligned} df(x, y, z) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) dz \\ &= \frac{yz}{2\sqrt{xyz}} dx + \frac{xz}{2\sqrt{xyz}} dy + \frac{xy}{2\sqrt{xyz}} dz. \end{aligned}$$

Aufgabe 6

Nach Definition 6.6.10 heißt eine Differentialform

$$\sum_{k=1}^n f_k(\mathbf{x}) dx_k$$

exakt, wenn das Vektorfeld, dessen Koordinaten die Funktionen f_k ($k = 1, \dots, n$) sind, ein Gradientenfeld ist, wenn dieses Vektorfeld also konservativ ist (Definition 6.6.15). Das gilt wiederum nach Satz 6.6.18 genau dann, wenn die Koordinatenfunktionen den in Satz 6.6.18 angegebenen Integrabilitätsbedingungen genügen.

- (a) Die Differentialform hat hier die Form $f_1(x, y) dx + f_2(x, y) dy$. Daher ist nur die Gültigkeit der einen Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

zu überprüfen. Es gilt:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = -\cos y = \frac{\partial f_2}{\partial x}.$$

Also ist die Differentialform exakt.

- (b) Die Differentialform hat hier die Form $f_1(x, y, z) dx + f_2(x, y, z) dy + f_3(x, y, z) dz$. Daher ist die Gültigkeit von drei Integrabilitätsbedingungen zu überprüfen.

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial y}.$$

Es gilt:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y, z) = \frac{-z \frac{-1}{2\sqrt{x-y}}}{x-y} = \frac{z}{2(x-y)\sqrt{x-y}} = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, z),$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x-y}} = \frac{\partial f_3}{\partial x}(x, y, z),$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial z}(x, y, z) = -\frac{1}{\sqrt{x-y}} = \frac{\partial f_3}{\partial y}(x, y, z).$$

Die Differentialform ist also exakt.

Aufgabe 7

Der Graph einer auf einem Gebiet $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ differenzierbaren Funktion $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Fläche. Die Gleichung der Tangentialebene an diese Fläche in einem Flächenpunkt $(a, b, f(a, b))$ ist in Definition 6.6.11 angegeben.

Der Funktionswert von f in dem Punkt $(2, \sqrt{3})$ ist $f(2, \sqrt{3}) = \sqrt{4-3} = 1$. Der Flächenpunkt ist damit: $(2, \sqrt{3}, 1)$.

Um den Normalenvektor anzugeben, benötigen wir die beiden partiellen Ableitungen von f im Punkt $(2, \sqrt{3})$. Diese sind:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2x-y^2}} \implies \frac{\partial f}{\partial x}(2, \sqrt{3}) = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{y}{\sqrt{2x-y^2}} \implies \frac{\partial f}{\partial y}(2, \sqrt{3}) = -\sqrt{3}.$$

Die Gleichung der Tangentialebene ist dann nach Definition 6.6.11:

$$\begin{aligned} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} &= 0 \iff (x-2) - \sqrt{3}(y-\sqrt{3}) - (z-1) = 0 \\ &\iff x - \sqrt{3}y - z = -2. \end{aligned}$$

Aufgabe 8

Das Vektorfeld in (a) hat den Definitionsbereich $\mathbb{R}^2$, die Vektorfelder in (b) und (c) haben den Definitionsbereich $\mathbb{R}^3$. Dabei sind $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend. Weiter sind die Koordinatenfunktionen f_k der drei Vektorfelder stetig differenzierbar, weil sie mit Hilfe algebraischer Operationen aus stetig differenzierbaren Funktionen gebildet sind. Nach Satz 6.6.18 sind die Vektorfelder daher genau dann konservativ, wenn ihre Koordinatenfunktionen den Integrabilitätsbedingungen genügen. Diese sind:

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \quad \text{für } j, k \in \{1, 2\} \text{ bei (a) und für } j, k \in \{1, 2, 3\} \text{ bei (c) und (d).}$$

Wir brauchen also nur diese Bedingungen zu überprüfen.

(a) Es ist nur die eine Integrabilitätsbedingung $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$ zu überprüfen.

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = 4x^2y \cos(xy^2) + 2x^2y \cos(xy^2) - 2x^3y^3 \sin(xy^2) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y).$$

Also ist $\mathbf{f}$ konservativ.

(b) Zu überprüfen sind hier die drei Bedingungen

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y, z) = 3x^2 z^2 \cos(x^3 y) - 3x^5 y z^2 \sin(x^3 y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, z),$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z}(x, y, z) = 6x^2 y z \cos(x^3 y) = \frac{\partial f_3}{\partial x}(x, y, z),$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial z}(x, y, z) = 1 + 2x^3 z \cos(x^3 y) \neq 2x^3 z \cos(x^3 y) = \frac{\partial f_3}{\partial y}(x, y, z).$$

Da die letzte Bedingung nicht erfüllt ist, ist $\mathbf{f}$ nicht konservativ.

(c) Zu überprüfen sind die drei in Aufgabe (b) angegebenen Bedingungen.

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y, z) = 2xz \sin(y+z) + 2xyz \cos(y+z) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, z),$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z}(x, y, z) = 2xy \sin(y+z) + 2xyz \cos(y+z) = \frac{\partial f_3}{\partial x}(x, y, z),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial z}(x, y, z) &= x^2(\sin(y+z) + y \cos(y+z)) + x^2 z(\cos(y+z) - y \sin(y+z)) \\ &= x^2(\sin(y+z) + z \cos(y+z)) + x^2 y(\cos(y+z) - z \sin(y+z)) \\ &= \frac{\partial f_3}{\partial y}(x, y, z). \end{aligned}$$

Also ist $\mathbf{f}$ konservativ.

Aufgabe 9

Wir wählen als Definitionsbereich des Vektorfeldes den einfach zusammenhängenden Bereich

$$\mathbb{D} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y + x^2 > 0 \}.$$

Dann sind die Koordinatenfunktionen auf $\mathbb{D}$ stetig differenzierbar, und nach Satz 6.6.18 ist $\mathbf{f}$ genau dann konservativ, wenn die Integrabilitätsbedingung gilt.

Wir bilden die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_1}{\partial y}$ und $\frac{\partial f_2}{\partial x}$:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = 2x^{-2} (x^2 + y)^r + 2yx^{-2} r (x^2 + y)^{r-1},$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = x^{-2} (x^2 + y)^r - 2r (x^2 + y)^{r-1}.$$

$\mathbf{f}$ ist genau dann konservativ, wenn diese beiden partiellen Ableitungen übereinstimmen. Das liefert uns eine Bestimmungsgleichung für r :

$$\begin{aligned}
2x^{-2} (x^2 + y)^r + 2yx^{-2}r (x^2 + y)^{r-1} &= x^{-2} (x^2 + y)^r - 2r (x^2 + y)^{r-1} \\
\iff x^{-2} (x^2 + y)^r + 2r (x^2 + y)^{r-1} (x^{-2}y + 1) &= 0 \\
\iff x^{-2} (x^2 + y) (x^2 + y)^{r-1} + 2r (x^2 + y)^{r-1} (x^{-2}y + 1) &= 0 \\
\iff (x^2 + y)^{r-1} (1 + x^{-2}y) + 2r (x^2 + y)^{r-1} (1 + x^{-2}y) &= 0 \\
\iff (1 + 2r) \left((x^2 + y)^{r-1} (1 + x^{-2}y) \right) &= 0.
\end{aligned}$$

Diese letzte Gleichung ist genau dann für alle $(x, y) \in \mathbb{D}$ erfüllt, wenn gilt: $1 + 2r = 0$, also $r = -\frac{1}{2}$.

Das bedeutet: Das Vektorfeld ist genau dann konservativ, wenn $r = -\frac{1}{2}$ ist.

Abschnitt 6.7

Aufgabe 1

Nach Definition der Funktionalmatrix (Definition 6.7.1) gilt:

$$\begin{aligned}
J(\mathbf{f})(x, y) &= \begin{pmatrix} 2x \sin(xy) + x^2 y \cos(xy) & x^3 \cos(xy) \\ -y^3 \sin(xy) & 2y \cos(xy) - xy^2 \sin(xy) \end{pmatrix} \\
\implies J(\mathbf{f})(1, \pi) &= \begin{pmatrix} -\pi & -1 \\ 0 & -2\pi \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Die Werte der partiellen Ableitungen von f_1, f_2 an der Stelle $(1, \pi)$ sind dann:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(1, \pi) = -\pi, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(1, \pi) = -1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}(1, \pi) = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(1, \pi) = -2\pi.$$

Aufgabe 2

$$\begin{aligned}
\text{grad } f(x, y, z) &= \begin{pmatrix} y^2 - 2xz \\ 2xy + z \cos(yz) \\ -x^2 + y \cos(yz) \end{pmatrix} \\
\implies J(\text{grad } f)(x, y, z) &= \begin{pmatrix} -2z & 2y & -2x \\ 2y & 2x - z^2 \sin(yz) & \cos(yz) - yz \sin(yz) \\ -2x & \cos(yz) - yz \sin(yz) & -y^2 \sin(yz) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$J(\text{grad } f)$ ist eine symmetrische Matrix (Definition 3.7.2). Das entspricht der Aussage des Satzes von Schwarz (Satz 6.6.14), nach der je zwei Ableitungen von f überein stimmen, die durch Ableiten nach denselben Variablen in verschiedener Reihenfolge gebildet sind.

Aufgabe 3

Nach Definition 6.7.1 ist die Ableitung des Vektorfeldes $\mathbf{f}$ die Funktionalmatrix $J(\mathbf{f})$. Dabei sind die Spalten der Funktionalmatrix (Definition 6.7.1) die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}(x, y, z), \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y}(x, y, z), \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}(x, y, z).$$

Es ist übersichtlicher, zuerst diese partiellen Ableitungen von $\mathbf{f}$ zu bilden und erst dann mit ihnen als Spalten die Funktionalmatrix $J(\mathbf{f})$ anzugeben. Bei der Bildung der partiellen Ableitungen müssen wir die Produktregel benutzen, weil $\mathbf{f}$ das Produkt eines Skalarfeldes mit einem Vektorfeld ist. Zum Beispiel wird die partielle Ableitung von $\mathbf{f}$ nach x dann wie folgt gebildet:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}(\arcsin \sqrt{1 - x^2 y^2 z}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \arcsin \sqrt{1 - x^2 y^2 z} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Die partiellen Ableitungen von $\mathbf{f}$ nach x, y, z sind dann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}(x, y, z) &= \frac{-2xy^2z}{\sqrt{x^2y^2z} \cdot 2\sqrt{1 - x^2y^2z}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \arcsin \sqrt{1 - x^2y^2z} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2y^2z}\sqrt{1 - x^2y^2z}} \begin{pmatrix} -2x^2y^2z \\ -2xy^3z \\ -2xy^2z^2 \end{pmatrix} + \arcsin \sqrt{1 - x^2y^2z} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y}(x, y, z) &= \frac{-2x^2yz}{\sqrt{x^2y^2z} \cdot 2\sqrt{1 - x^2y^2z}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \arcsin \sqrt{1 - x^2y^2z} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2y^2z}\sqrt{1 - x^2y^2z}} \begin{pmatrix} -2x^3yz \\ -2x^2y^2z \\ -2x^2yz^2 \end{pmatrix} + \arcsin \sqrt{1 - x^2y^2z} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}(x, y, z) &= \frac{-x^2y^2}{\sqrt{x^2y^2z} \cdot 2\sqrt{1 - x^2y^2z}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \arcsin \sqrt{1 - x^2y^2z} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2y^2z}\sqrt{1 - x^2y^2z}} \begin{pmatrix} -x^3y^2 \\ -x^2y^3 \\ -x^2y^2z \end{pmatrix} + \arcsin \sqrt{1 - x^2y^2z} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Funktionalmatrix lässt sich dann als Summe zweier Matrizen schreiben:

$$\begin{aligned} J(\mathbf{f})(x, y, z) &= \frac{1}{2\sqrt{x^2y^2z}\sqrt{1 - x^2y^2z}} \begin{pmatrix} -2x^2y^2z & -2x^3yz & -x^3y^2 \\ -2xy^3z & -2x^2y^2z & -x^2y^3 \\ -2xy^2z^2 & -2x^2yz^2 & -x^2y^2z \end{pmatrix} \\ &\quad + \arcsin \sqrt{1 - x^2y^2z} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Wir schreiben direkt die Determinante der Funktionalmatrix auf, wobei die Funktionalmatrix entsprechend Definition 6.7.1 durch Ableiten der Koordinatenfunktionen nach u, v, w gebildet ist.

Die Determinante entwickeln wir nach der dritten Zeile (Satz 3.7.12) und erhalten zwei 2-reihige Determinanten. Bei ihnen ziehen wir gemeinsame Faktoren in den Spalten heraus und berechnen dann die so vereinfachten 2-reihigen Determinanten.

$$\begin{aligned}
 \det J(\mathbf{x})(u, v, w) &= \begin{vmatrix} \cos w \cos v & -(1 + u \cos w) \sin v & -u \sin w \cos v \\ \cos w \sin v & (1 + u \cos w) \cos v & -u \sin w \sin v \\ \sin v & u \cos v & 0 \end{vmatrix} \\
 &= \sin v \begin{vmatrix} -(1 + u \cos w) \sin v & -u \sin w \cos v \\ (1 + u \cos w) \cos v & -u \sin w \sin v \end{vmatrix} - u \cos v \begin{vmatrix} \cos w \cos v & -u \sin w \cos v \\ \cos w \sin v & -u \sin w \sin v \end{vmatrix} \\
 &= u \sin v (1 + u \cos w) \sin w \begin{vmatrix} -\sin v & -\cos v \\ \cos v & -\sin v \end{vmatrix} - u^2 \cos v \cos w \sin w \begin{vmatrix} \cos v & -\cos v \\ \sin v & -\sin v \end{vmatrix} \\
 &= u \sin v \sin w (1 + u \cos w) (\sin^2 v + \cos^2 v) = u \sin v \sin w (1 + u \cos w).
 \end{aligned}$$

Abschnitt 6.8

Aufgabe 1

Nach der Kettenregel in Satz 6.8.1 gilt: $F'(0) = \text{grad } f(\mathbf{x}(0)) \cdot \mathbf{x}'(0)$.

Um $\text{grad } f(\mathbf{x}(0))$ zu bestimmen, berechnen wir $\mathbf{x}(0)$ und $\text{grad } f(x, y, z)$ und setzen dann die Koordinaten von $\mathbf{x}(0)$ in $\text{grad } f(x, y, z)$ ein:

$$\begin{aligned}
 \text{grad } f(x, y, z) &= \begin{pmatrix} -y^2 \sqrt{yz} \sin(xy^2) \\ \frac{z}{2\sqrt{yz}} \cos(xy^2) - 2xy \sqrt{yz} \sin(xy^2) \\ \frac{y}{2\sqrt{yz}} \cos(xy^2) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 \implies \text{grad } f(\mathbf{x}(0)) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$x'(t) = \frac{\sqrt{1+t^2} - t \frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2} = \frac{(1+t^2) - t^2}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}} \implies x'(0) = 1,$$

$$y'(t) = \frac{-2}{2\sqrt{1-2t}} = -\frac{1}{\sqrt{1-2t}} \implies y'(0) = -1,$$

$$z'(t) = \frac{d}{dt}(1-t)^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}(1-t)^{-\frac{1}{3}}(-1) = -\frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{1-t}} \implies z'(0) = -\frac{2}{3}.$$

Also ist dann:

$$\mathbf{x}'(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Damit folgt:

$$F'(0) = \text{grad } f(\mathbf{x}(0)) \cdot \mathbf{x}'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{5}{6}.$$

Aufgabe 2

Nach dem Ergebnis 6.8.3 gilt:

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}(u, v)) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}(u, v)) \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \quad \text{und}$$

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}(u, v)) \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}(u, v)) \frac{\partial y}{\partial v}(u, v).$$

Es ist praktisch, die hier auftretenden partiellen Ableitungen von $\mathbf{x}$ und f aus $\mathbf{J}(\mathbf{x})(u, v)$ und $\text{grad } f(\mathbf{x}(u, v))$ abzulesen. Daher berechnen wir erst einmal $\mathbf{J}(\mathbf{x})(u, v)$ und $\text{grad } f(x, y)$.

$$\mathbf{J}(\mathbf{x})(u, v) = \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ 2u & -2v \end{pmatrix} \implies \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} = \begin{pmatrix} 2u \\ 2u \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 2v \\ -2v \end{pmatrix}$$

$$\text{grad } f(x, y) = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{y} \\ -\frac{x}{y^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}.$$

In $\text{grad } f(x, y)$ setzen wir die Koordinaten von $\mathbf{x}(u, v)$ ein, um $\text{grad } f(\mathbf{x}(u, v))$ zu erhalten:

$$\begin{aligned} \text{grad } f(\mathbf{x}(u, v)) &= \frac{1}{(u^2 + v^2)^2 + (u^2 - v^2)^2} \begin{pmatrix} u^2 - v^2 \\ -u^2 - v^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2(u^4 + v^4)} \begin{pmatrix} u^2 - v^2 \\ -u^2 - v^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit berechnen wir nun wie oben angegeben die partiellen Ableitungen von F :

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = \frac{u^2 - v^2}{2(u^4 + v^4)} 2u + \frac{-u^2 - v^2}{2(u^4 + v^4)} 2u = u \frac{u^2 - v^2 - u^2 - v^2}{u^4 + v^4} = -\frac{2uv^2}{u^4 + v^4},$$

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = \frac{u^2 - v^2}{2(u^4 + v^4)} 2v + \frac{-u^2 - v^2}{2(u^4 + v^4)} (-2v) = v \frac{u^2 - v^2 + u^2 + v^2}{u^4 + v^4} = \frac{2u^2v}{u^4 + v^4}.$$

Aufgabe 3

$$(a) \quad \text{grad } f(x, y, z) = \frac{1}{1 + \frac{x^2 z^2}{y}} \begin{pmatrix} zy^{-\frac{1}{2}} \\ -\frac{1}{2}xy^{-\frac{3}{2}}z \\ xy^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix},$$

$$J(\mathbf{x})(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}} \\ 2(u-v) & -2(u-v) \\ \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

(b) Nach der Kettenregel in Ergebnis 6.8.3 können wir die partiellen Ableitungen der zusammengesetzten Funktion $g = f \circ \mathbf{x}$ an der Stelle $(u, v) = (1, 1)$ wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u}(1, 1) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}(1, 1)) \frac{\partial x}{\partial u}(1, 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}(1, 1)) \frac{\partial y}{\partial u}(1, 1) + \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{x}(1, 1)) \frac{\partial z}{\partial u}(1, 1) \quad \text{und} \\ \frac{\partial g}{\partial v}(1, 1) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}(1, 1)) \frac{\partial x}{\partial v}(1, 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}(1, 1)) \frac{\partial y}{\partial v}(1, 1) + \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{x}(1, 1)) \frac{\partial z}{\partial v}(1, 1). \end{aligned}$$

Um die hier auftretenden partiellen Ableitungen von f und $\mathbf{x}$ in $(u, v) = (1, 1)$ aus dem Gradientenfeld von f und der Funktionalmatrix von $\mathbf{x}$ ablesen zu können, berechnen wir zuerst $J(\mathbf{x})(1, 1)$ und $\text{grad } f(\mathbf{x}(1, 1))$.

$$\mathbf{x}(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \text{grad } f(\mathbf{x}(1, 1)) = \text{grad } f(2, 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$J(\mathbf{x})(1, 1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \implies \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Damit folgt schließlich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u}(1, 1) &= 0 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1, \\ \frac{\partial g}{\partial v}(1, 1) &= 0 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot 0 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1. \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Wir berechnen zuerst $\text{grad } f(x, y, z)$ und $J(\mathbf{x})(u, v, w)$:

$$\text{grad } f(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad J(\mathbf{x})(u, v, w) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Es sei bemerkt, dass die Spalten dieser Matrix $J(\mathbf{x})(u, v, w)$ die partiellen Ableitungen des Vektorfeldes $\mathbf{x}$ nach u, v, w sind, also:

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Nach der Kettenregel in Ergebnis 6.8.3 gilt:

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} = yz \cdot 1 + xz \cdot 2 + xy \cdot (-1) = yz + 2xz - xy,$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} = yz \cdot (-1) + xz \cdot 1 + xy \cdot 3 = -yz + xz + 3xy,$$

$$\frac{\partial F}{\partial w} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial w} = yz \cdot 1 + xz \cdot (-1) + xy \cdot (-2) = yz - xz - 2xy.$$

In diesen partiellen Ableitungen von F sind x, y, z als die durch die Koordinatendarstellung von $\mathbf{x}$ angegebenen Funktionen von u, v, w aufzufassen. Die partiellen Ableitungen von F der Ordnung 2 können nun wieder nach der Formel in dem Ergebnis 6.8.3 berechnet werden. Dazu benötigen wir außer den oben schon bestimmten partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

die Gradienten der partiellen Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial u}(x, y, z), \frac{\partial F}{\partial v}(x, y, z), \frac{\partial F}{\partial w}(x, y, z)$:

$$\text{grad } \frac{\partial F}{\partial u} = \begin{pmatrix} 2z - y \\ z - x \\ y + 2x \end{pmatrix}, \quad \text{grad } \frac{\partial F}{\partial v} = \begin{pmatrix} z + 3y \\ -z + 3x \\ -y + x \end{pmatrix}, \quad \text{grad } \frac{\partial F}{\partial w} = \begin{pmatrix} -z - 2y \\ z - 2x \\ y - x \end{pmatrix}.$$

Da die Werte der partiellen Ableitungen der Ordnung 2 von F an der Stelle $(1, 1, 1)$ zu berechnen sind, berechnen wir $\mathbf{x}(1, 1, 1)$ und setzen die Koordinaten in die Gradienten ein:

$$\mathbf{x}(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt:

$$\text{grad } \frac{\partial F}{\partial u}(\mathbf{x}(1, 1, 1)) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \text{grad } \frac{\partial F}{\partial v}(\mathbf{x}(1, 1, 1)) = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{grad } \frac{\partial F}{\partial w}(\mathbf{x}(1, 1, 1)) = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nach dem Satz von Schwarz brauchen wir nur 6 der 9 partiellen Ableitungen von F der Ordnung 2 an der Stelle $(1, 1, 1)$ zu berechnen.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(1, 1, 1) &= \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial u}(1, 1, 1) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial u}(1, 1, 1) \frac{\partial x}{\partial u}(1, 1, 1) + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial u}(1, 1, 1) \frac{\partial y}{\partial u}(1, 1, 1) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial u}(1, 1, 1) \frac{\partial z}{\partial u}(1, 1, 1) \\ &= (-2) \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 4 \cdot (-1) = -8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}(1, 1, 1) &= \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial v}(1, 1, 1) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial v}(1, 1, 1) \frac{\partial x}{\partial u}(1, 1, 1) + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial v}(1, 1, 1) \frac{\partial y}{\partial u}(1, 1, 1) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial v}(1, 1, 1) \frac{\partial z}{\partial u}(1, 1, 1) \\
&= 6 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) = 13 = \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u}(1, 1, 1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial w}(1, 1, 1) &= \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial w}(1, 1, 1) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial w}(1, 1, 1) \frac{\partial x}{\partial u}(1, 1, 1) + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial w}(1, 1, 1) \frac{\partial y}{\partial u}(1, 1, 1) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial w}(1, 1, 1) \frac{\partial z}{\partial u}(1, 1, 1) \\
&= (-4) \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = -9 = \frac{\partial^2 F}{\partial w \partial u}(1, 1, 1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}(1, 1, 1) &= \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial F}{\partial v}(1, 1, 1) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial v}(1, 1, 1) \frac{\partial x}{\partial v}(1, 1, 1) + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial v}(1, 1, 1) \frac{\partial y}{\partial v}(1, 1, 1) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial v}(1, 1, 1) \frac{\partial z}{\partial v}(1, 1, 1) \\
&= 6 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 = -6,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial w}(1, 1, 1) &= \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial F}{\partial w}(1, 1, 1) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial w}(1, 1, 1) \frac{\partial x}{\partial v}(1, 1, 1) + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial w}(1, 1, 1) \frac{\partial y}{\partial v}(1, 1, 1) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial w}(1, 1, 1) \frac{\partial z}{\partial v}(1, 1, 1) \\
&= (-4) \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 5 = \frac{\partial^2 F}{\partial w \partial v}(1, 1, 1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial w^2}(1, 1, 1) &= \frac{\partial}{\partial w} \frac{\partial F}{\partial w}(1, 1, 1) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial w}(1, 1, 1) \frac{\partial x}{\partial w}(1, 1, 1) + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial w}(1, 1, 1) \frac{\partial y}{\partial w}(1, 1, 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial w}(1, 1, 1) \frac{\partial z}{\partial w}(1, 1, 1) \\
& = (-4) \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) = -4.
\end{aligned}$$

Mathematik für Chemiker

Brunner, G.; Brück, R.

2013, IX, 374 S., Softcover

ISBN: 978-3-642-37504-0